

广义渐近拟非扩张型映象不动点的逼近*

胡国英, 梁天娟

(重庆师范大学 数学与计算机科学学院, 重庆 400047)

摘 要 本文讨论了 Banach 空间中非空闭凸子集上的广义渐近拟非扩张型映象的迭代逼近问题,给出了具误差的修改的 Ishikawa 迭代序列 $\{v_n\}$ 强收敛到广义渐近拟非扩张型映象 T 不动点的充要条件. 设 E 是 Banach 空间, C 是 E 中的非空闭凸子集, $T: C \rightarrow C$ 是广义渐近拟非扩张型映象,其渐近系数 k_n 满足 $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n - 1) < \infty$, 又设 $F(T)$ 有界,且 T 在 $F(T)$ 中的点处一致连续. 任取一点 $x_0 \in C$, $\{v_n\}$ 是根据 $\begin{cases} x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n T^m y_n + \gamma_n u_n \\ y_n = \xi_n x_n + \eta_n T^m x_n + \delta_n v_n \end{cases}$ 定义的具误差的修改的 Ishikawa 迭代得到的,其中 $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ 是 C 中的两个有界点列, $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}$, $\{\delta_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的 6 个数列且满足 $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$, $\xi_n + \eta_n + \delta_n = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty$. 则 $\{v_n\}$ 强收敛于 T 的不动点的充要条件是 $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$, 其中 $d(x, A)$ 为 x 到集合 A 的距离. 本文的结果推广改进了文献[1-7] 中的结论.

关键词 非空闭凸集 广义渐近拟非扩张型映象 Ishikawa 迭代 不动点

中图分类号 O177.91

文献标识码 A

文章编号 1672-6693(2008)01-0010-04

不动点理论在各类方程研究中起着非常重要的作用,为了扩大其应用范围, Goebel 和 Kirk^[1] 首次引入了渐近非扩张映象之后,人们又相继提出了渐近非扩张型映象、渐近拟非扩张映象、渐近拟非扩张型映象等概念. 文献[2-6] 对这些映象的不动点问题进行了研究并得到了一些很好的结果. 最近,文献[7] 引入了一类更为广泛的广义渐近拟非扩张型映象并得到如下重要结果,有关定义及记号见预备知识.

定理 1^[7] 设 E 是 Banach 空间, $T: E \rightarrow E$ 是广义渐近拟非扩张型映象,其渐近系数 k_n 满足 $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n - 1) < \infty$, 若 T 在 $F(T)$ 中的点处一致连续,任取一点 $x_0 \in C$, $\{v_n\}$ 是根据

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T^m y_n + u_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T^m x_n + v_n, n \geq 0 \end{cases}$$

定义的具混合误差的 Ishikawa 迭代得到的,其中 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的两个数列且 $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ 收敛, $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ 是 E 中的两个点列且 $\{v_n\}$ 有界同时

$\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|$ 收敛,则 $\{v_n\}$ 强收敛于 T 在 E 中一个不动点的充要条件是 $\liminf_{n \rightarrow \infty} D(x_n, F(T)) = 0$.

受文献[7-9] 的启发,本文在非空闭凸子集上,研究了广义渐近拟非扩张型映象的不动点迭代逼近问题.

1 预备知识

定义 设 E 是 Banach 空间, C 是 E 中的非空闭凸子集, T 是从 C 到 C 的映象, $F(T)$ 是 T 的所有不动点构成的集合,则

1) 称 T 是广义渐近非扩张型映象^[7], 如果存在 $\{k_n\} \subset [1, \infty)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 1$, 使得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{x, y \in C} \{\|T^n x - T^n y\| - k_n \|x - y\|\} \leq 0;$$

2) 称 T 是广义渐近拟非扩张型映象^[7], 如果 $F(T)$ 非空且存在 $\{k_n\} \subset [1, \infty)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 1$, 使得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in C, p \in F(T)} \{\|T^n x - p\| - k_n \|x - p\|\} \leq 0, \text{ 其中 } k_n \text{ 称为 } T \text{ 的渐近系数.}$$

* 收稿日期 2007-03-27 修回日期 2007-11-01

资助项目 重庆市教委项目(No. KJ070806)

作者简介 胡国英(1982-),女,辽宁葫芦岛人,硕士研究生,研究方向为运筹学与控制论。

注1 在一般情况下,渐近拟非扩张映象、渐近拟非扩张型映象以及具不动点的渐近非扩张映象、渐近非扩张型映象、广义渐近非扩张型映象都是广义渐近拟非扩张型映象的特例。

故本文只是在非空闭凸子集上,研究了上述映象中最广泛的广义渐近拟非扩张型映象的不动点问题。为此,笔者需要如下引理。

引理1 设 C 是赋范空间的非空闭凸集, T 是从 C 到 C 的映象且 $F(T)$ 非空。若 T 在 $F(T)$ 中的点处一致连续,即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x \in C, p \in F(T)$ 且 $\|x - p\| < \delta$ 时,有 $\|Tx - Tp\| = \|Tx - p\| < \varepsilon$, 则 $F(T)$ 是 C 中的闭子集。

证明 设 $\{p_n\}$ 是 $F(T)$ 中任一点列且在 C 中强收敛于点 x^* , 由 T 在 $F(T)$ 中的点处一致连续可得, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x \in C, p \in F(T)$ 且 $\|x - p\| < \delta$ 时,有 $\|Tx - p\| < \varepsilon$ 。取 $\varepsilon_1 = \min(\delta, \varepsilon)$, 由于 $\{p_n\}$ 强收敛于点 $x^* \in C$, 故存在自然数 N , 当 $n \geq N$ 时, $\|x^* - p_n\| < \varepsilon_1$, 从而 $\|Tx^* - p_n\| < \varepsilon$ 。由此得 $\|Tx^* - x^*\| \leq \|Tx^* - p_n\| + \|p_n - x^*\| < 2\varepsilon$, 由 ε 的任意性知 $Tx^* = x^*$, 即 $x^* \in F(T)$ 。证毕

引理2^[4] 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 是3个非负数列, 满足 $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n < \infty, \sum_{n=n_0}^{\infty} c_n < \infty, a_{n+1} \leq (1 + b_n)a_n + c_n (n \geq n_0)$, 其中 n_0 是某非负整数, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在。

2 主要结论

定理2 设 E 是 Banach 空间, C 是 E 中的非空闭凸子集, $T: C \rightarrow C$ 是广义渐近拟非扩张型映象, 其渐近系数 k_n 满足 $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n - 1) < \infty$, 又设 $F(T)$ 有界, 且 T 在 $F(T)$ 中的点处一致连续。任取一点 $x_0 \in C$, $\{x_n\}$ 是根据

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n T^n y_n + \gamma_n u_n \\ y_n = \xi_n x_n + \eta_n T^n x_n + \delta_n v_n \end{cases} \quad n \geq 0 \quad (1)$$

定义的具误差修改的 Ishikawa 迭代得到的, 其中 $\{u_n\}, \{v_n\}$ 是 C 中的两个有界点列, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\xi_n\}, \{\eta_n\}, \{\delta_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的6个数列且满足 $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1, \xi_n + \eta_n + \delta_n = 1, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < +\infty$,

$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty$ 。则 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 的不动点的充要条件是 $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$, 其中 $d(x, A)$ 为 x 到集

合 A 的距离, 即 $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$ 。

为了证明定理2, 笔者先证明下面引理。

引理3 设定理2的条件都满足, 则存在自然数 N , 及序列 $\{b_n\}, \{c_n\}$, 当时 $n \geq N$ 时, 有

$$\begin{aligned} \text{i)} & d(x_{n+1}, F(T)) \leq (1 + b_n) d(x_n, F(T)) + c_n, \forall p \in F(T), \text{其中 } c_n = a\beta_n = b\gamma_n, a, b \text{ 为常数;} \\ \text{ii)} & \text{存在常数 } M > 0, \text{使得 } \|x_{n+m} - p\| \leq M \|x_n - p\| + M \sum_{k=n}^{\infty} c_k, \forall p \in F(T), m > 1. \end{aligned}$$

证明 由 $F(T)$ 有界, $\{u_n\}, \{v_n\}$ 是 C 中的两个有界点列, 可设

$$L = \sup \{\|u_n - p\|, \|v_n - p^*\| : n \geq 0, p \in F(T)\} \\ \forall p \in F(T), pn \geq 0 \quad (2)$$

另外, 由 T 是广义渐近拟非扩张型映象可知, 对于 $\forall \varepsilon > 0$ 不妨设 $0 < \varepsilon < 1$, 存在自然数 N , 当 $n \geq N$ 时

$$\|T^n x - p\| - k_n \|x - p\| < \varepsilon, \\ \forall x \in C, \forall p \in F(T), n \geq 0 \quad (3)$$

注意到 $\{k_n\} \subset [1, \infty)$, 对于任取的 $p \in F(T)$, 当 $n \geq N$ 时, 由(1)、(2)、(3)式有

$$\begin{aligned} \|y_n - p\| &= \|\xi_n(x_n - p) + \eta_n(T^n x_n - p) + \delta_n(v_n - p)\| \leq \\ &\xi_n \|x_n - p\| + \eta_n (\|T^n x_n - p\| - k_n \|x_n - p\|) + \\ &\eta_n k_n \|x_n - p\| + \delta_n \|v_n - p\| \leq \xi_n k_n \|x_n - p\| + \eta_n \varepsilon + \\ &\eta_n k_n \|x_n - p\| + \delta_n \|v_n - p\| \leq k_n \|x_n - p\| + \eta_n \varepsilon + \\ &\delta_n \|v_n - p\| \\ \|x_{n+1} - p\| &= \|\alpha_n(x_n - p) + \\ &\beta_n(T^n y_n - p) + \gamma_n(u_n - p)\| \leq \\ &\alpha_n \|x_n - p\| + \beta_n (\|T^n y_n - p\| - k_n \|y_n - p\|) + \\ &\beta_n k_n \|y_n - p\| + \gamma_n \|u_n - p\| \leq \alpha_n \|x_n - p\| + \\ &\beta_n \varepsilon + \beta_n k_n (k_n \|x_n - p\| + \eta_n \varepsilon + \delta_n \|v_n - p\|) + \\ &\gamma_n \|u_n - p\| \leq \alpha_n k_n^2 \|x_n - p\| + \beta_n \varepsilon + \\ &\beta_n k_n (k_n \|x_n - p\| + \eta_n \varepsilon + \delta_n \|v_n - p\|) + \gamma_n \|u_n - p\| \leq \\ &k_n^2 \|x_n - p\| + \beta_n (\varepsilon + k_n \varepsilon + k_n \|v_n - p\|) + \\ &\gamma_n \|u_n - p\| \leq k_n^2 \|x_n - p\| + \beta_n (\varepsilon + K\varepsilon + LK) + L\gamma_n \leq \\ &(1 + b_n) \|x_n - p\| + c_n \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $1 \leq K = \sup_{n \geq 1} k_n < \infty, 0 \leq b_n = k_n^2 - 1 \leq 2K(k_n - 1), c_n = \beta_n(K + LK) + L\gamma_n$ 。注意到 b_n 和 c_n 的选取均与点 p 无关, 故当 $n \geq N$ 时, 有

$$d(x_{n+1}, F(T)) \leq (1 + b_n) d(x_n, F(T)) + c_n \quad (5)$$

由(4)式可得, 对于 $\forall p \in F(T), m > 1$, 有

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - p\| &\leq (1 + b_{n+m-1}) \|x_{n+m-1} - p\| + c_{n+m-1} \leq \\ &(1 + b_{n+m-1}) \{ (1 + b_{n+m-2}) \|x_{n+m-2} - p\| + c_{n+m-2} \} + \\ &c_{n+m-1} \leq (1 + b_{n+m-1}) \cdots (1 + b_n) \|x_n - p\| + \end{aligned}$$

$$(1 + b_{n+m-1}) \cdots (1 + b_{n+1}) c_n + \cdots + (1 + b_{n+m-1}) c_{n+m-2} + \\ c_{n+m-1} \leq \exp\left(\sum_{k=n}^{\infty} b_k\right) \{\|x_n - p\| + \sum_{k=n}^{\infty} c_k\} \quad (6)$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, 故可取 $M = \exp\left(\sum_{k=n}^{\infty} b_k\right)$, 则有

$$\|x_{n+m} - p\| \leq M \|x_n - p\| + M \sum_{k=n}^{\infty} c_k \quad (7)$$

这样引理得证。

定理2的证明 必要性显然, 下证充分性。

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf d(x_n, F(T)) = 0$, 首先证明极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$ 存在且等于零。

事实上, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n - 1) < \infty$ 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, 又

由 $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty$ 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$, 故由引理3的 i) 及引理2立刻得知极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T))$ 存在, 再由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf d(x_n, F(T)) = 0$ 即可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0 \quad (8)$$

接下来证明 $\{x_n\}$ 是 C 中的 Cauchy 点列。由引理3的 ii), 对于 $\forall m, n \geq N$ 及 $\forall p \in F(T)$, 有

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq \|x_{n+m} - p\| + \|x_n - p\| \leq \\ (1 + M) \|x_n - p\| + M \sum_{k=n}^{\infty} c_k \quad (9)$$

由(9)式及 p 的任意性可得

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq (1 + M) d(x_n, F(T)) + M \sum_{k=n}^{\infty} c_k \quad (10)$$

由(8)式及 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 $N_1 \geq N$, 当 $n \geq N_1$ 时, 有

$$d(x_n, F(T)) \leq \frac{\varepsilon}{2(1+M)}, \sum_{n=1}^{\infty} c_n \leq \frac{\varepsilon}{2M} \quad (11)$$

由(10), (11)式知, 当 $n \geq N_1$ 时, 有

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq (1 + M) \frac{\varepsilon}{2(1+M)} + M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

这说明 $\{x_n\}$ 是 C 中的 Cauchy 点列, 由于 E 是完备的, 故存在 $p^* \in E$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p^*$ 。

最后证 $p^* \in F(T)$ 。事实上, 若 $p^* \notin F(T)$ 。由引理1可知 $F(T)$ 是闭子集, 故 $d(p^*, F(T)) > 0$, 从而对 $\forall p \in F(T)$, 有

$$\|p^* - p\| \leq \|p^* - x_n\| + \|x_n - p\|$$

再由 $p \in F(T)$ 的任意性知

$$d(p^*, F(T)) \leq \|p^* - x_n\| + d(x_n, F(T)) \quad (12)$$

由(8)和(12)式及 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p^*$ 得 $d(p^*, F(T)) = 0$, 这与 $d(p^*, F(T)) > 0$ 相矛盾, 故 $p^* \in F(T)$ 。即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p^* \in F(T)$, 定理2得证。 证毕

注2 在定理2中要求 $F(T)$ 是有界的, 这一条件较强, 为去掉 $F(T)$ 有界这一条件, 接下来笔者讨论在非空闭凸子集上广义渐近拟非扩张型映象 T 对不带误差的修改的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛到不动点的问题。

定理3 设 E 是 Banach 空间, C 是 E 中的非空闭凸子集, $T: C \rightarrow C$ 是广义渐近拟非扩张型映象, 其渐近系数 k_n 满足 $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n - 1) < \infty$, 又设 T 在 $F(T)$ 中的点处一致连续。任取一点 $x_0 \in C$, $\{x_n\}$ 是根据

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T^n y_n \\ y_n = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) T^n x_n \end{cases} \quad n \geq 0 \quad (13)$$

定义的, 不带误差的修改的 Ishikawa 迭代得到的, 其中 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中2个数列且 $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha_n) < \infty$ 。则 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 的不动点的充要条件是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf d(x_n, F(T)) = 0$ 。

证明 同样由 T 是广义渐近拟非扩张型映象可知, 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在自然数 N , 当 $n \geq N$ 时, 对 $\forall x \in C, p \in F(T)$ 有

$$\|T^n x - p\| - k_n \|x - p\| < \varepsilon$$

故当 $n \geq N$ 时, 对 $\forall p \in F(T)$ 有

$$\begin{aligned} \|y_n - p\| &= \|\beta_n (x_n - p) + (1 - \beta_n) (T^n x_n - p)\| \leq \\ &\beta_n \|x_n - p\| + (1 - \beta_n) \|T^n x_n - p\| = \beta_n \|x_n - p\| + \\ &(1 - \beta_n) (\|T^n x_n - p\| - k_n \|x_n - p\|) + \\ &(1 - \beta_n) k_n \|x_n - p\| \leq k_n \|x_n - p\| + \varepsilon \\ \|x_{n+1} - p\| &= \|\alpha_n (x_n - p) + (1 - \alpha_n) (T^n y_n - p)\| = \\ &\alpha_n \|x_n - p\| + (1 - \alpha_n) (\|T^n y_n - p\| - k_n \|y_n - p\|) + \\ &(1 - \alpha_n) k_n \|y_n - p\| \leq \alpha_n k_n^2 \|x_n - p\| + (1 - \alpha_n) \varepsilon + \\ &(1 - \alpha_n) k_n (k_n \|x_n - p\| + \varepsilon) \leq k_n^2 \|x_n - p\| + \\ &(1 - \alpha_n) (\varepsilon + k_n \varepsilon) = (1 + b_n) \|x_n - p\| + c_n \end{aligned} \quad (14)$$

其中, $b_n = k_n^2 - 1$, $c_n = (1 - \alpha_n) (\varepsilon + k_n \varepsilon)$ 。显然 b_n , c_n 的选取与 p 无关, 故由(14)式可得 $d(x_{n+1}, F(T)) \leq$

$(1 + b_n) d(x_n, F(T)) + c_n$, 另外, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n - 1) < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha_n) < \infty$ 可知 $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n < \infty$, $\sum_{n=n_0}^{\infty} c_n < \infty$ 。

余下的证明与定理2的证明相同。

证毕

致谢 感谢向长合老师对本文的指导。

参考文献:

- [1] GOEBEL K, KIRK W A. A Fixed Point Theorem for Asymptotically Nonexpansive Mappings [J]. Proc Amer Math Soc, 1972, 35: 171-174.
- [2] KIRK W A. Fixed Point Theorems Non-Lipschitzian Mappings of Asymptotically Nonexpansive Type [J]. Israel J Math, 1974, 17: 339-346.
- [3] LIU Q H. Iterative Sequences for Asymptotically Quasi-nonexpansive Mappings with Error Member [J]. J Math Anal Appl, 2001, 259: 18-24.
- [4] ZHOU Y Y, CHANG S S. Convergence of Implicit Process for a Family of Asymptotically Mappings in Banach Spaces [J]. Numer Funct Anal and Optimiz, 2002, 23: 911-921.
- [5] CHANG S S, KIM J K, KANG S M. Fixed Point of Asymptotically Quasi-Nonexpansive Type Mappings by the Iterative Sequences with Mixed Errors [J]. Dynamic Systems and Applications, 2004, 13: 179-186.
- [6] 王绍荣, 杨泽恒. Banach 空间中渐近拟非扩张型映象不动点的具混合误差的 Ishikawa 迭代逼近问题 [J]. 西南师范大学学报 (自然科学版), 2004, 29 (4): 578-581.
- [7] 向长合. Banach 空间上广义渐近拟非扩张型映象的不动点逼近 [J]. 重庆师范大学学报 (自然科学版), 2005, 22 (4): 5-9.
- [8] 熊明, 王绍荣, 杨泽恒. Banach 空间中几乎渐近非扩张型映象不动点的迭代逼近问题 [J]. 四川大学学报 (自然科学版), 2007, 44 (3): 485-489.
- [9] 张菊, 郑锋. 一类 ϕ -强增生算子方程解带误差的 Ishikawa 迭代逼近 [J]. 西华师范大学学报 (自然科学版), 2007, 28 (2): 154-157.

Approximation of Fixed Points of a Generalized Asymptotically Quasi-nonexpansive Type Mapping

HU Guo-ying, LIANG Tian-juan

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract The purpose of this paper is to study the strong convergence of a generalized asymptotically quasi-nonexpansive type mapping in the non-empty closed and convex subset in Banach spaces, and to give some necessary and sufficient conditions for the modified Ishikawa iterative sequence with errors to converge strongly to a fixed point of the generalized asymptotically quasi-nonexpansive type mapping. Let E is a Banach space, C is a nonempty closed convex subset of E , and $T: C \rightarrow C$ is a generalized asymptotically quasi-nonexpansive type mapping with asymptotically Coefficient k_n such that $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n - 1) < \infty$. Let $F(T)$ is bounded, and T strongly converges to a point of $F(T)$ again. Define the modified Ishikawa iterative sequence $\{x_n\}$ with error as given in (1) with $\{u_n\}, \{v_n\}$ bounded sequences in C and $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\xi_n\}, \{\eta_n\}, \{\delta_n\}$ sequences in $[0, 1]$ satisfying $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1, \xi_n + \eta_n + \delta_n = 1, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < +\infty, \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty$. Then, $\{x_n\}$ converges to a fixed point of T . If and only if $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$, where $d(x, A)$ denotes the distance of x to set A . The results presented in this paper extend and improve the corresponding results of refs [1-7].

Key words non-empty closed and convex subset; generalized asymptotically quasi-nonexpansive type mapping; Ishikawa iterative sequence; fixed point

(责任编辑 游中胜)