# 两类非线性发展方程解的爆破*

王 凡 彬[1,2]

(1. 内江师范学院 数学系;2. 四川省高等学校数值仿真重点实验室,四川 内江 641112)

摘 要:考虑一类非线性双曲方程和一类非线性抛物方程的具有三类边界条件的初边值问题,讨论其古典解的爆破。首先利用含参数 $t$ 的积分,构造一个关于时间 $t$ 的函数,然后利用凸分析的方法对该函数进行分析,讨论其性态。在此过程中,利用了自共轭椭圆算子的特征函数、Jensen 不等式、格林公式等方法。在大初值情形,证明了当非线性项 $f(u)$、线性项系数 $c(x)$ 及初值函数 $u_0(x)$,$u_1(x)$ 满足一定条件时,两类方程的古典解 $u(x,t)$ 必在有限时间内爆破。给出了解爆破的充分条件,并利用积分中值定理、格林公式对大初值做了定量的讨论。本文的优点在于非线性项 $f(u)$ 简洁,实际应用中易于实现,在定理 1、定理 2 中只要求 $f(u)\geqslant b|u|^p$,$b>0$,$p>1$($b$,$p$ 为常数);在定理 2 中只要求 $f(u)=|u|^{p-1}u$,$p>1$($p$ 为常数)。

关键词:非线性发展方程;古典解;爆破

中图分类号:O175.26;O175.27　　文献标识码:A　　文章编号:1672-6693(2008)01-0034-04

对于非线性发展方程的整体解或解的破裂问题,由于其理论上的重要性和广泛应用,成了人们关注的热点问题[1-9],讨论的方法各一。

考虑下列一类非线性双曲方程和一类非线性抛物方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-\sum\limits_{i,j=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\Big)-c(x)u=f(u), \\ \quad (x,t)\in\Omega\times(0,T) \\ Bu|_{\partial\Omega}=0, t\in[0,T) \\ u(x,0)=u_0(x), u_t(x,0)=u_1(x), x\in\overline{\Omega} \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} u_{t}-\sum\limits_{i,j=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\Big)-c(x)u=f(u), \\ \quad (x,t)\in\Omega\times(0,T) \\ Bu|_{\partial\Omega}=0, t\in[0,T) \\ u(x,0)=u_0(x), x\in\overline{\Omega} \end{cases} \tag{2}$$

其中 $T>0$,$\partial\Omega$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中光滑有界区域 $\Omega$ 的边界,$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$;$Bu$ 表示 $u$ 或 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\cos(n,x_i)+\sigma(x)u(\sigma\geqslant 0)$,即相应的是第一、第二或第三类边界条件;$a_{ij}(x)$ 充分光滑,$a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$,$i,j=1,2,\cdots,n$,且存在正常数 $\delta$,对

$$\forall x\in\Omega,\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n$$

都有 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant\delta\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2$;$\sum\limits_{i,j=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big)$ 为自共轭椭圆算子(以下为讨论方便起见,记该算子为 $L$,即 $L=\sum\limits_{i,j=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\dfrac{\partial}{\partial x_j}\Big)$);$f$ 是关于 $u$ 的高次非线性函数;$c(x)$,$u_0(x)$,$u_1(x)$ 充分光滑。

对问题(1)、(2),文献[2]证明了只要 $c\geqslant\lambda$,尽管初值任意小,解总要在有限时间内爆破。本文则要证明,在 $c<\lambda$ 时,只要初值充分大,解也要在有限时间内爆破。

## 1 预备知识

首先介绍两个引理。

**引理 1** 记 $\lambda$ 为下列自共轭椭圆算子特征值问题

$$\begin{cases} L\varphi+\lambda\varphi=0 \\ B\varphi|_{\partial\Omega}=0 \end{cases} \tag{3}$$

的第一特征值。对于三类边界条件,总有 $\lambda\geqslant 0$,且相应于 $\lambda$,有特征函数 $\varphi(x)$,使得

$$\begin{cases} \varphi(x)>0, x\in\Omega \\ \int_\Omega\varphi(x)\mathrm{d}x=1 \end{cases} \tag{4}$$

**引理 2** (Jensen 不等式) 设 $g(u): u\in[\alpha,\beta]\mapsto\mathbf{R}$ 为凸函数,$f: t\in[a,b]\mapsto[\alpha,\beta]$,$P(t)$ 为连续函数,$P(t)\geqslant 0$,$P(t)$ 不恒等于零,则下列积分不等

* 收稿日期:2007-01-08　　修回日期:2007-10-31

资助项目:四川省教育厅重点科研项目(No. 2004A173)

作者简介:王凡彬(1957-),男,四川富顺人,教授,研究方向为偏微分方程。

式成立

$$g\left[\frac{\int_a^b f(t)P(t)\mathrm{d}t}{\int_a^b P(t)\mathrm{d}t}\right] \leqslant \frac{\int_a^b g(f(t))P(t)\mathrm{d}t}{\int_a^b P(t)\mathrm{d}t} \quad (5)$$

## 2 主要结果

如果问题(1)适合下列条件

1) $c$ 为常数,且 $c < \lambda$;

2) $f(u) \geqslant b|u|^p, b > 0, p > 1, b, p$ 为常数;

3) $\int_\Omega u_0(x)\varphi(x)\mathrm{d}x > \left(\frac{\lambda - c}{b}\right)^{\frac{1}{p-1}}$,

$$\int_\Omega u_1(x)\varphi(x)\mathrm{d}x > 0$$

那么就有定理1。

**定理1** 在条件1)~3)下,问题(1)的古典解 $u(x,t)$ 必在有限时间内爆破。

**证明** 记 $I(t) = \int_\Omega u(x,t)\varphi(x)\mathrm{d}x$

则

$$I'(t) = \int_\Omega u_t(x,t)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$I''(t) = \int_\Omega u_{tt}(x,t)\varphi(x)\mathrm{d}x \quad (6)$$

由问题(1),(6)式化为

$$I''(t) = \int_\Omega (Lu + cu + f)\varphi\mathrm{d}x \quad (7)$$

应用格林公式[10]和(3),(7)式化为

$$I''(t) = \int_\Omega [f + (c - \lambda)u]\varphi\mathrm{d}x$$

由条件2)及上式,得

$$I''(t) \geqslant \int_\Omega [b|u|^p + (c - \lambda)u]\varphi\mathrm{d}x \quad (8)$$

根据(4)式及Jensen不等式(5)式,从(8)式得

$$I''(t) \geqslant b|I(t)|^p + (c - \lambda)I(t) \quad (9)$$

由(9)及条件3),可以断定在$[0,T)$内一定有 $I''(t) > 0, I'(t) > 0, I(t) > 0$。事实上,由条件3)可知,当 $t = 0$ 时,有

$$I(0) = \int_\Omega u_0(x)\varphi(x)\mathrm{d}x > \left(\frac{\lambda - c}{b}\right)^{\frac{1}{p-1}} > 0 \quad (10)$$

$$I'(0) = \int_\Omega u_1(x)\varphi(x)\mathrm{d}x > 0 \quad (11)$$

由(9)、(10)式,有

$$I''(0) \geqslant b|I(0)|^p + (c - \lambda)I(0) =$$

$$I(0)[bI^{p-1}(0) + c - \lambda] > I(0)\left(b\frac{\lambda - c}{b} + c - \lambda\right) = 0$$

因此至少在 $t=0$ 的某个右邻域内,总有 $I''(t) > 0$, $I'(t) > 0, I(t) > 0$。设 $t_0 (0 < t_0 < T)$ 为使 $I''(t) = 0$ 的最小值,即在 $[0,t_0)$ 上,$I''(t) > 0$,而 $I''(t_0) = 0$,于是可知在 $[0,t_0]$ 上,$I'(t)$ 单调增加,由(11)式知 $I'(t) > 0 (t \in [0,t_0])$,从而亦知在 $[0,t_0]$ 上 $I(t)$ 单调增加,由(10)式知 $I(t_0) > I(0) > \left(\frac{\lambda - c}{b}\right)^{\frac{1}{p-1}} > 0$,于是由(9)式有

$$I''(t_0) \geqslant I(t_0)[bI^{p-1}(0) + c - \lambda] >$$

$$I(t_0)\left(b\frac{\lambda - c}{b} + c - \lambda\right) = 0$$

与 $I''(t_0) = 0$ 矛盾。即在 $[0,T)$ 上总有 $I''(t) > 0$,再由(10)、(11)式可知在 $[0,T)$ 上也有 $I'(t) > 0$,$I(t) > 0$。

在(9)式两端同乘以 $I'(t)$ 并在上 $[0,t]$ 积分,得

$$\frac{1}{2}[I'^2(t) - I'^2(0)] \geqslant$$

$$\frac{b}{p+1}[I^{p+1}(t) - I^{p+1}(0)] +$$

$$\frac{c - \lambda}{2}[I^2(t) - I^2(0)] \quad (12)$$

记 $A = \frac{-2b}{P+1}I^{p+1}(0) - (c - \lambda)I^2(0) + I'^2(0)$,从(12)式得

$$I'^2(t) \geqslant \frac{2b}{p+1}I^{p+1}(t) + (c - \lambda)I^2(t) + A \quad (13)$$

又记 $J(t) = \frac{2b}{p+1}I^{p+1}(t) + (c - \lambda)I^2(t) + A =$

$$I^2(t)\left[\frac{2b}{p+1}I^{p-1}(t) + (c - \lambda)\right] + A$$

由 $p > 1$, $I(t)$ 单调增加且 $I(t) > 0$,知 $J(t)$ 也单调增加。因为 $J(0) = I'^2(0) > 0$,所以 $J(t) > 0 (t \in [0,T))$,从而由(13)式得

$$I'(t) \geqslant \sqrt{\frac{2b}{p+1}I^{p+1}(t) + (c - \lambda)I^2(t) + A}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\sqrt{\frac{2b}{p+1}I^{p+1}(t) + (c - \lambda)I^2(t) + A}} \geqslant \mathrm{d}t \quad (14)$$

(14)式两端在 $[0,t)(t \leqslant T)$ 积分,得

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}I(t)}{\sqrt{\frac{2b}{p+1}I^{p+1}(t) + (c - \lambda)I^2(t) + A}} \geqslant t \quad (15)$$

令 $I(t) = k$,(15)式变为

$$t \leqslant \int_{I(0)}^{I(t)} \frac{\mathrm{d}k}{\sqrt{\frac{2b}{p+1}k^{p+1} + (c - \lambda)k^2 + A}},$$

令 $t \to T^-$,得

$$T \leqslant \int_{I(0)}^{I(T)} \frac{\mathrm{d}k}{\sqrt{\frac{2b}{p+1}k^{p+1} + (c-\lambda)k^2 + A}} \quad (16)$$

因为 $I(T) \leqslant +\infty$,注意 $p > 1$,从(16)式得

$$T \leqslant \int_{I(0)}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k}{\sqrt{\frac{2b}{p+1}k^{p+1} + (c-\lambda)k^2 + A}} < +\infty \quad (17)$$

从(16)、(17)式可知 $I(T) = +\infty$,即

$$\lim_{t\to T^-} I(t) = \lim_{t\to T^-}\int_\Omega u(x,t)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$$

从而 $\limsup\limits_{t\to T^-\ x\in\Omega} |u(x,t)| = +\infty$,说明 $u(x,t)$ 必在有限时间内爆破。　　证毕

对于问题(2),考虑其适合条件

4) $c$ 为常数,且 $c < \lambda$;

5) $f(u) \geqslant b|u|^p, b > 0, p > 1, b, p$ 为常数;

6) $\int_\Omega u_0(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x > \left(\frac{\lambda - c}{b}\right)^{\frac{1}{p-1}}$

则有定理 2。

**定理 2**　在条件 4) ~ 6) 之下,问题(2)的古典解 $u(x,t)$ 必在有限时间内爆破。

**证明**　与定理 1 类似,有

$$I'(t) \geqslant b|I(t)|^p + (c-\lambda)I(t) \quad (18)$$

类似还可知在 $[0,T)$ 上,总有 $I'(t) > 0, I(t) > 0$。

记　$I(t) = bI^p(t) + (c-\lambda)I(t) = I(t)[bI^{p-1}(t) + c - \lambda]$

与定理 1 类似可得 $I(t) > 0 (t \in [0,T))$,从(18)式可得

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{bI^p(t) + (c-\lambda)I(t)} \geqslant \mathrm{d}t \quad (19)$$

注意 $p > 1$,从(19)式类似可知存在

$$T \leqslant \int_{I(0)}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k}{bk^p + (c-\lambda)k} < +\infty$$

使　$\lim\limits_{t\to T^-} I(t) = \lim\limits_{t\to T^-}\int_\Omega u(x,t)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$

即 $\limsup\limits_{t\to T^-\ x\in\Omega} |u(x,t)| = +\infty$,从而 $u(x,t)$ 必在有限时间内爆破。　　证毕

**注 1**　在定理 1 和定理 2 中,分别由条件 3) 和 4) 及积分中值定理、(4)式,知在 $\overline{\Omega}$ 上至少存在一点 $\xi$,使 $u_0(\xi) > \left(\frac{\lambda - c}{b}\right)^{\frac{1}{p-1}}$,即初值必须充分大。

另外再考虑问题(1)适合条件

7) $c = c(x) < \lambda$;

8) $f(u) = |u|^{p-1}u, p > 1, p$ 为常数;

9) $\int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}\left[ u_1^2(x) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\frac{\partial u_0}{\partial x_j} - c(x)\right] - \frac{1}{p+1}|u_0|^{p+1}\right\}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\sigma u_0^2(x)\,\mathrm{d}s < 0$。

在第一、第二类边界条件时,$\sigma = 0$,则有定理 3。

**定理 3**　在条件 7) ~ 9) 之下,问题(1)的古典解 $u(x,t)$ 必在有限时间内爆破。

类似按文献[2]即可证本文定理 3。

再考察问题(2),如果其适合条件

10) $c = c(x) < \lambda$;

11) $f(u) = |u|^{p-1}u, p > 1, p$ 为常数;

12) $\int_\Omega \left[ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\frac{\partial u_0}{\partial x_j} - c(x)u_0^2 - \frac{1}{p+1}|u_0|^{p+1}\right]\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\sigma u_0^2\,\mathrm{d}s < 0$,

在第一类、第二类边界条件时,$\sigma = 0$,就有定理 4。

**定理 4**　在条件 10) ~ 12) 之下,问题(2)的古典解 $u(x,t)$ 必在有限时间内爆破。

类似按文献[2]即可证本文定理 4。

**注 2**　本文定理 3、定理 4 与文献[2]中定理 3、定理 4 的条件是不同的。由于条件 7) 和 10),即 $c = c(x) < \lambda$,导致了条件 9) 和 12) 中的初值不能任意小,而必须充分大。例如取

$u_0(x) = M\Psi(x)$ ($M > 0$ 常数), $u_1(x) = 0$

分别代入条件 9)、12),可得

$$\int_\Omega \left\{ \frac{M^2}{2}\left[ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial\Psi}{\partial x_i}\frac{\partial\Psi}{\partial x_j} - c(x)\Psi^2\right] - \frac{M^{p+1}}{p+1}\Psi^{p+1}\right\}\mathrm{d}x + \frac{M^2}{2}\int_{\partial\Omega}\sigma\Psi^2\,\mathrm{d}s < 0 \quad (20)$$

由格林公式,知

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial\Psi}{\partial x_i}\frac{\partial\Psi}{\partial x_j} = \int_{\partial\Omega}\Psi(-\sigma\Psi)\,\mathrm{d}s - \int_\Omega \Psi L\Psi\,\mathrm{d}x = -\int_{\partial\Omega}\sigma\Psi^2\,\mathrm{d}s + \lambda\int_\Omega \Psi^2\,\mathrm{d}x \quad (21)$$

将(21)式代入(20)式,得

$$\frac{M^2}{2}\int_\Omega \left[ (\lambda - c)\Psi^2 - \frac{2M^{p-1}}{p+1}\Psi^{p+1}\right]\mathrm{d}x < 0$$

亦即　$\int_\Omega [(\lambda - c)\Psi^2\,\mathrm{d}x < \frac{2M^{p-1}}{p+1}\int_\Omega \Psi^{p+1}\,\mathrm{d}x$

由上式即知　$M > \left[ \frac{(p+1)\int_\Omega (\lambda - c)\Psi^2\,\mathrm{d}x}{2\int_\Omega \Psi^{p+1}\,\mathrm{d}x}\right]^{\frac{1}{p-1}}$

从而 $M$ 不能任意小,即 $u_0(x) = M\Psi(x)$ 也不能任意小。

## 参考文献：


[1] 李大潜，陈韵梅. 非线性发展方程[M]. 北京：科学出版社，1997.

[2] 郑宋穆，陈韵梅. 非线性发展方程初边值问题解的破裂[J]. 复旦学报(自然科学版)，1987,26(1):19-27.

[3] 王凡彬. 广义神经传播型非线性拟双曲方程解的爆破和熄灭[J]. 应用数学和力学，1996,17(11):1039-1043.

[4] GLASSEY R T. Finite-Time Blow-up for Solutions of Nonlinear Wave Equations [J]. Mathematische Zeitschrift, 1981,177:323-340.

[5] LI Ta-tsien, ZHOU Yi, KONG De-xing. Global Classical Solutions for General Quasilinear Hyperbolic Systems with Decay Initial Data[J]. Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, 1997,26(8):1299-1332.

[6] GLASSEY R T. Blow-up Theorems for Nonlinear Wave Equations[J]. Mathematics Zeitschrift, 1973,132:181-302.

[7] 吴至友. 非线性规划的单调化方法[J]. 重庆师范大学学院(自然科学版),2004,21(2):4-7.

[8] 孟宪良，蒋毅，蒲志林. 一类非线性 Klein-Gordon 方程组的整体解和爆破解[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2006,29(5):526-529.

[9] 蒋毅，蒲志林，孟宪良. 一类非线性 Schrödinger 方程组的整体解和爆破解[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2006,29(1):22-25.

[10] 谷超豪，李大潜，陈恕行，等. 数学物理方程[M]. 北京：人民教育出版社，1979.


# Blow up of the Solution to Two Types of Nonlinear Evolution Equations


*WANG Fan-bin*[1,2]

(1. Dept. of Mathematics, Neijiang Teachers College;

2. Key Laboratory of Numerical Simulation of Sichuan Province, Neijiang Sichuan 641112, China)



**Abstract**: This paper focuses on the initial boundary value problems with three types of boundary conditions for a type of nonlinear hyperbolic equations and a type of nonlinear parabolic equations and discusses the blow up of the classical solutions. Firstly, we use the integral containsing parameters $t$ to make up the function of time $t$ and then use convex analysis method for analysis, discuss its behavior. In the process, eigenfunction of elf-conjugate elliptic operator, Jensen inequality, Grenn formula and other methods is used. In the larger initial case, we proved that when the nonlinear terms $f(u)$, coefficient $c(x)$ of the linear terms and the initial function $u_0(x)$, $u_1(x)$ meet certain conditions, the classical solutions $u(x,t)$ of the two types of equation blow up in the limited time. We give the sufficient conditions of the blow up, and using integral value theorem and Green formula do a quantitative discussion for the great initial. This article enjoys the advantage of being simple nonlinear term, practical applications which are easy to implement, theorem 1 and theorem 2 only requires that $f(u) \geqslant b|u|^p, b>0, p>1$ ($b, p$ is a constant); theorem 2 only request that $f(u) = |u|^{p-1}u, p>1$ ($p$ is a constant.).



**Key words**: nonlinear evolution equations; classical solution; blow up


(责任编辑　黄　颖)