Moisil-Theodorsco 方程组的一个非线性边值问题*

李觉友

(重庆师范大学 数学与计算机科学学院, 重庆 400047)

摘　要 考虑了在 $\mathbf{R}^3$ 空间中的非齐次 Moisil-Theodorsco 方程组的一个非线性边值问题,首先讨论 Moisil-Theodorsco 方程组的 Cauchy 型积分,Plemelj 公式,进而得到了非齐次 Moisil-Theodorsco 方程组解的积分表示式和它的 Plemelj 公式,在此基础上还讨论了它的一个非线性边值问题 $A(\eta)F^+(\eta)+B(\eta)F^-(\eta)=g(\eta)f(\eta,F^+(\eta),F^-(\eta)),\eta\in\Gamma$。为了证明以上非线性边值问题解的存在性,利用已得到的 Plemelj 公式,将非线性边值问题转化为与它等价的积分方程 $(A+B)\left(-\frac{\varphi}{2}+K\varphi\right)+(A+1)\varphi+(A+B)\tilde{T}f=gf$,其中 $(K\varphi)(\eta)=\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma\frac{(\xi-\eta)}{|\xi-\eta|^3}n(\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}S_\xi,\eta\in\Gamma$,$\tilde{T}f=-\frac{1}{4\pi}\int_D\frac{(\xi-\eta)}{|\xi-\eta|^3}f(\xi)\mathrm{d}V_\xi$,最后运用 Schauder 不动点原理证明了该边值问题解的存在性,同时也给出了其解的积分表示式 $F(\xi)=\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma\frac{(\zeta-\xi)}{|\zeta-\xi|^3}n(\zeta)\varphi(\zeta)\mathrm{d}S_\zeta+\tilde{T}f(\xi),\xi\notin\Gamma$。

关键词 :Moisil-Theodorsco 方程组 ;Plemelj 公式 ;边值问题

中图分类号 :O175.5　　**文献标识码** :A　　**文章编号** :1672-6693(2008)01-0042-05

1 准备工作

众所周知,处理弹性力学和流体力学或其它问题时,空间问题比平面问题要复杂得多,其原因之一是单复变函数尤其是解析函数有一整套完整的理论[1-2],而对空间问题来说就困难得多。Moisil 和 Theodorsco 在文献[3]首先研究了空间中的 Cauchy-Riemann 方程组,即所谓的 Moisil-Theodorsco 方程组,它是平面上 Cauchy-Riemann 方程组在高维空间的推广。黄烈德对此作了不少有益工作,在文献[4]中他引进了全纯向量函数概念,讨论了空间中线性和非线性 Hilbert 边值问题。2006 年,杨丕文在文献[5]又研究了 $\mathbf{R}^3$ 中的 Moisil-Theodorsco 方程组 Riemann-Hilbert 边值问题。随后,文献[6]考察了 Moisil-Theodorsco 方程组的一个带常系数的 Riemann 边值问题。最近,文献[7]还讨论了非齐次 Moisil-Theodorsco 方程组的一个带变系数的 Riemann 边值问题。本文主要在文献[5-7]工作基础上,运用高维空间研究边值问题的方法[8-10]讨论了 $\mathbf{R}^3$ 空间中的非齐次 Moisil-Theodorsco 方程组的 Plemelj 公式和它的一个非线性边值问题,相应地推广了文献[4,6-7]的某些结果。

Moisil 和 Theodorsco 在文献[3]中考虑 $\mathbf{R}^3$ 中的复值函数 $\Psi_1(x,y,t)$,$\Psi_2(x,y,t)$ 的一阶偏微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Psi_1}{\partial t}-\left(\dfrac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_2=0\\[2ex]\dfrac{\partial\Psi_2}{\partial t}-\left(\dfrac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_1=0\end{cases}\tag{1}$$

设 $\partial=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial t} & -2\dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}} & \dfrac{\partial}{\partial t}\end{pmatrix}$,$\bar{\partial}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial t} & 2\dfrac{\partial}{\partial z}\\ -2\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}} & \dfrac{\partial}{\partial t}\end{pmatrix}$,这里 $\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$,$\dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$。

* 收稿日期 :2007-07-03　　修回日期 :2007-09-17

资助项目 :国家自然科学基金(No. 10671207)

作者简介 :李觉友(1980-),男,四川大竹人,助教,研究方向为复分析中的边值问题。

记 $\mathbf{R}^3=\mathbf{C}\times\mathbf{R}$,$\mathbf{R}^3$ 中的点 $\eta=(x,y,t)=(z,t)$,于是方程(1)可写为 $\partial\Psi(\eta)=0,\eta\in D\subset\mathbf{R}^3$,此时则称 $\Psi(\eta)$ 是 D 内的正则函数,其中 $\Psi(\eta)=\begin{pmatrix}\Psi_1(\eta)\\ \Psi_2(\eta)\end{pmatrix}$ 是复值向量函数。

在文献[5]中,作者研究非齐次 Moisil-Theodorsco 方程组

$$\partial F=f \tag{2}$$

在 $\mathbf{R}^3$ 中的分布解及其一些性质,提出并解决了相应的 Riemann-Hilber 边值问题。

若 $U=\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}$ 是一复值向量函数,定义其范数 $|U|=\sqrt{|u_1|^2+|u_2|^2}$,设 $\Theta=\left(Z\,\middle|\,Z=\begin{pmatrix}z_1 & z_2\\ -\bar z_2 & \bar z_1\end{pmatrix},\forall z_1,z_2\in\mathbf{C}\right)$,并定义其范数 $|Z|=\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2}$,对 $\forall Z,Z'\in\Theta$ 有 $|ZZ'|=|Z||Z'|$。又设 $Z\in\Theta$,U 是一个 2×1 的复值矩阵,则 $|ZU|\leqslant|Z||U|$。

定义1 设 $\lambda(x)$ 是一个定义在 D 的边界 Γ 上的 $n\times m$ 的复值矩阵函数,如果 $\lambda(x)$ 满足以下条件

$$|\lambda(x)-\lambda(y)|=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}|\lambda_{ij}(x)-\lambda_{ij}(y)|^2}\leqslant B|x-y|^\beta,x,y\in\Gamma,0<\beta<1$$

其中 B 是一个不依赖于 x,y 的正常数,则称 $\lambda(x)$ 为 Γ 的 Hölder 连续函数,记 Γ 上的 Hölder 连续函数集合为 $H(\Gamma,\beta)$。

任取 $\varphi\in H(\Gamma,\beta)$,定义 φ 的范数为 $\|\varphi\|_\beta=C(\varphi,\Gamma)+H(\varphi,\Gamma,\beta)$,其中

$$C(\varphi,\Gamma)=\max_{x\in\Gamma}|\varphi(x)|,H(\varphi,\Gamma,\beta)=\sup_{x_1\neq x_2,x_1,x_2\in\Gamma}\frac{|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|}{|x_1-x_2|^\beta}$$

显然 $H(\Gamma,\beta)$ 构成 Banach 空间,并且易证,若 $f,g\in H(\Gamma,\beta)$,则

$$\|f+g\|_\beta\leqslant\|f\|_\beta+\|g\|_\beta,\|fg\|_\beta\leqslant J_1\|f\|_\beta\|g\|_\beta$$

其中 J_1 为正常数。

2 方程 $\partial F=f$ 的解和 Plemelj 公式

以下设 D 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个有界区域,其边界 Γ 是分片光滑的 Liapunov 曲面,并记 Γ 的内部为 D^+,记 $\mathbf{R}^3\backslash\bar D$ 为 D^-,根据散度定理可得引理1。

引理1 (Pempeiu 公式)若向量函数 $U(\eta)\in C^1(D)\cap C(\bar D)$,则

$$U(\eta)=\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma\frac{(\zeta-\eta)}{|\zeta-\eta|^3}n(\zeta)U(\zeta)\mathrm{d}S_\zeta-\frac{1}{4\pi}\int_D\frac{(\zeta-\eta)}{|\zeta-\eta|^3}\partial U(\zeta)\mathrm{d}V_\zeta,\eta\in D$$

其中 $\zeta=(z',t')$,$\eta=(z,t)$,$(\zeta-\eta)=\begin{pmatrix}t'-t & \bar z'-\bar z\\ -(z'-z) & t'-t\end{pmatrix}$ 是复二阶矩阵,α,β,γ 分别是曲面 Γ 上点 ζ 处的外法线方向与 x,y,t 轴的夹角,$n(\zeta)=\begin{pmatrix}\cos\gamma & -\cos\alpha+\mathrm{i}\cos\beta\\ \cos\alpha+\mathrm{i}\cos\beta & \cos\gamma\end{pmatrix}$。

设 $\varphi(\zeta)$ 为 Γ 上的 Hölder 连续函数,定义 Cauchy 型积分

$$\Phi(\eta)=\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma\frac{(\zeta-\eta)}{|\zeta-\eta|^3}n(\zeta)\varphi(\zeta)\mathrm{d}S_\zeta,\eta\notin\Gamma \tag{3}$$

显然 $\Phi(\eta)$ 在 Γ 外正则,且 $\Phi(\infty)=0$。

引理2[7] 设 $\varphi(\zeta)\in H(\Gamma,\beta)$,$0<\beta<1$,当 η 分别从 D^+,D^- 趋于 $\zeta\in\Gamma$ 时 Cauchy 型积分(3)式的极限值存在,相应地记为 $\Phi^+(\eta)$,$\Phi^-(\eta)$,则有 $\begin{cases}\Phi^+(\eta)=\frac{1}{2}\varphi(\eta)+(K\varphi)(\eta),\eta\in\Gamma\\ \Phi^-(\eta)=-\frac{1}{2}\varphi(\eta)+(K\varphi)(\eta),\eta\in\Gamma\end{cases}$,其中 $(K\varphi)(\eta)=\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma\frac{(\zeta-\eta)}{|\zeta-\eta|^3}n(\zeta)\varphi(\zeta)\mathrm{d}S_\zeta,\eta\in\Gamma$ 是 Cauchy 主值积分,且 $\|K\varphi\|_\beta\leqslant c\|\varphi\|_\beta$,这里 c 是不依赖于 φ 的正常数。

由引理 2 可得 $\left\|-\frac{\varphi}{2}+K\varphi\right\|_{\beta}\leqslant J_2\|\Phi\|_{\beta}$，$\left(J_2=\frac{1}{2}+c\right)$。

设 $f(\xi)$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中复值向量函数，从 Pempeiu 公式中引进积分算子 $\tilde{T}f=-\frac{1}{4\pi}\int_D\frac{(\xi-\eta)}{|\xi-\eta|^3}f(\xi)\mathrm{d}V_\xi$。

引理 3[5]　若 $f\in L_p(\overline{D})$，$p>3$，则 $\tilde{T}f$ 是方程(2)式的分布解，即 $\partial(\tilde{T}f)=f$，且 $\tilde{T}f\in C_\alpha(\overline{D})$，其中 $\alpha=1-\frac{3}{p}$。

由 Cauchy 型积分(3)式和引理 3 有定理 1。

定理 1　设 $f\in L_p(\overline{D})$，$p>3$，则非齐次 Moisil-Theodorsco 方程组(2)式的解可用积分表示为

$$F(\xi)=\Phi(\xi)+\tilde{T}f(\xi),\xi\in D \tag{4}$$

其中 $\Phi(\xi)$ 是 D 内的正则函数。

再根据 Cauchy 型积分(3)式和引理 2 有定理 2。

定理 2　设 $f(\xi)\in L_p(\mathbf{R}^3)$，$p>3$，则以下的 Plemelj 公式成立

$$\begin{cases}F^{+}(\eta)=\frac{1}{2}\varphi(\eta)+(K\varphi)(\eta)+\tilde{T}f(\eta),\eta\in\Gamma\\F^{-}(\eta)=-\frac{1}{2}\varphi(\eta)+(K\varphi)(\eta)+\tilde{T}f(\eta),\eta\in\Gamma\end{cases} \tag{5}$$

3 非线性边值问题解的存在性讨论

问题 SR　设有界连通开集 $D\subset\mathbf{R}^3$，其边界 Γ 是分片光滑的 Liapunov 曲面，设 $A(\eta)$，$B(\eta)$，$g(\eta)$ 是 Γ 上给定的复值二阶矩阵，$f(\eta,F^{(1)},F^{(2)})$ 在 $\Gamma\times\mathbf{C}^2\times\mathbf{C}^2$ 上给定。寻求 D^+，D^- 内满足方程(2)式的解 $F(\xi)$，使它在 $D^++\Gamma$，$D^-+\Gamma$ 上连续，且适合 $F(\infty)=0$ 和非线性边界条件

$$A(\eta)F^{+}(\eta)+B(\eta)F^{-}(\eta)=g(\eta)f(\eta,F^{+}(\eta),F^{-}(\eta)),\eta\in\Gamma \tag{6}$$

则称以上问题为问题 SR。

将(5)式代入(6)式有 $A\left[\frac{\varphi}{2}+K\varphi+\tilde{T}f\right]+B\left[-\frac{\varphi}{2}+K\varphi+\tilde{T}f\right]=gf$，并整理得

$$(A+B)\left(-\frac{\varphi}{2}+K\varphi\right)+(A+1)\varphi+(A+B)\tilde{T}f=gf$$

引进算子

$$R\varphi=(A+B)\left(-\frac{\varphi}{2}+K\varphi\right)+(A+1)\varphi+(A+B)\tilde{T}f-gf$$

于是问题 SR 就转化为求解奇异积分方程

$$R\varphi=\varphi \tag{7}$$

的问题。

定理 3　设在问题 SR 中给定复值二阶矩阵函数 $A(\eta)$，$B(\eta)$，$g(\eta)\in H(\Gamma,\beta)$，$f(\xi)\in L_p(\mathbf{R}^3)$，$p>3$，$1>\beta>\alpha$，$\alpha=\frac{p-3}{p}$，又设函数 $f(\eta,F^{(1)},F^{(2)})$ 对任意的 $F^{(1)}$，$F^{(2)}$ 关于 η 是 Hölder 连续的，且对任意的 $\eta\in\Gamma$ 关于 $F^{(1)}$，$F^{(2)}$ 是满足 Lipschitz 条件的，即

$$|f(\eta_1,F_1^{(1)},F_1^{(2)})-f(\eta_2,F_2^{(1)},F_2^{(2)})|\leqslant J_3|\eta_1-\eta_2|^{\beta}+J_4|F_1^{(1)}-F_2^{(1)}|+J_5|F_1^{(2)}-F_2^{(2)}| \tag{8}$$

其中 J_3，J_4，J_5 是与 η_j，$F_j^{(1)}$，$F_j^{(2)}$，$j=1,2$ 无关的正常数，再设 $f(0,0,0)=0$，$A(\eta)$，$B(\eta)$ 适合

$$\mu=J_1[J_2\|A+B\|_{\beta}+\|A+1\|_{\beta}]<1，且\ \|g\|_{\beta}<\delta,\|\tilde{T}f\|_{\beta}<\delta,$$

那么当 $0<\delta<\frac{M(1-\mu)}{1/J_2+J_1(J_{10}+J_{11}M)}$ 时，问题 SR 有解，解的积分表示式由(4)和(3)式给出。此外 M 是正常数($\|\varphi\|_{\beta}\leqslant M$)，$J_{10}$，$J_{11}$ 是适合 $\|f\|_{\beta}\leqslant J_{10}+J_{11}\|\varphi\|_{\beta}$ 的正常数。

证明　记连续函数空间 $C(\Gamma)$ 的子集合 $T=\{\varphi\,|\,\varphi\in H(\Gamma,\beta),\|\varphi\|_{\beta}\leqslant M\}$。

1）先证 R 是映射集合 T 到自身的映射。由(7)式有

$$\| R\varphi \|_\beta \leqslant J_1 \| A + B \|_\beta \left\| -\frac{\varphi}{2} + K\varphi \right\|_\beta + J_1 \| A + 1 \|_\beta \| \varphi \|_\beta + J_1 \| A + B \|_\beta \| \tilde{T}f \|_\beta + J_1 \| g \|_\beta \| f(\eta, F^+, F^-) \|_\beta$$

利用引理2以及条件(8)式有

$$C(f,\Gamma) \leqslant J_6 + J_7 \| \varphi \|_\beta \tag{9}$$

再根据条件(8)式和引理2有

$$\left| f\left(\eta_1, \frac{\varphi(\eta_1)}{2} + K\varphi(\eta_1), \frac{-\varphi(\eta_1)}{2} + K\varphi(\eta_1)\right) - f\left(\eta_2, \frac{\varphi(\eta_2)}{2} + K\varphi(\eta_2), \frac{-\varphi(\eta_2)}{2} + K\varphi(\eta_2)\right) \right| \leqslant (J_8 + J_9 \| \varphi \|_\beta) | \eta_1 - \eta_2 |^\beta, (J_8 = J_3) \tag{10}$$

综合(9),(10)式有 $\| f \|_\beta \leqslant J_{10} + J_{11} \| \varphi \|_\beta$,由题设知 $\| A + B \|_\beta < 1/(J_1 J_2)$,$\| \varphi \|_\beta \leqslant M$,所以 $\| R\varphi \|_\beta \leqslant \mu M + \delta[1/J_2 + J_1(J_{10} + J_{11}M)] < M$,即证 R 是映射集合 T 到自身。

2)再证 R 是连续映射。任取 $\varphi^n(\eta) \in T$,设 $\{\varphi^n(\eta)\}$ 一致收敛 $\varphi(\eta)$,$\eta \in \Gamma$,对任给 $\varepsilon > 0$,那么当 n 充分大时,$\| \varphi^n - \varphi \|_\beta$ 可以充分小。考察 $K\varphi^n(\eta) - K\varphi(\eta)$,任取 $\xi \in \Gamma$,记 $\delta = |\xi - \eta| > 0$,据文献[8-9]存在充分小的 $d > 0$,当 $6\delta < d$ 时,以 η 为球心,3δ 为半径作球,记 Γ 的位于该球内部的部分为 Γ_1,剩余的部分为 Γ_2。由此

$$| K\varphi^n(\eta) - K\varphi(\eta) | \leqslant \frac{1}{4\pi} \left| \int_\Gamma \frac{(\xi - \eta)}{|\xi - \eta|^3} n(\xi)[\varphi^n(\xi) - \varphi(\xi)] \mathrm{d}S_\xi \right| \leqslant$$

$$\frac{1}{4\pi} \left| \int_\Gamma \frac{(\xi - \eta)}{|\xi - \eta|^3} n(\xi)[\varphi^n(\xi) - \varphi^n(\eta) + \varphi(\eta) - \varphi(\xi)] \mathrm{d}S_\xi \right| + \frac{1}{4\pi} \left| \int_\Gamma \frac{(\xi - \eta)}{|\xi - \eta|^3} n(\xi)[\varphi^n(\eta) - \varphi(\eta)] \mathrm{d}S_\xi \right| \leqslant$$

$$\frac{1}{4\pi} \left| \int_{\Gamma_1} \frac{(\xi - \eta)}{|\xi - \eta|^3} n(\xi)[\varphi^n(\xi) - \varphi^n(\eta) + \varphi(\eta) - \varphi(\xi)] \mathrm{d}S_\xi \right| +$$

$$\frac{1}{4\pi} \left| \int_{\Gamma_2} \frac{(\xi - \eta)}{|\xi - \eta|^3} n(\xi)[\varphi^n(\xi) - \varphi^n(\eta) + \varphi(\eta) - \varphi(\xi)] \mathrm{d}S_\xi \right| + \frac{1}{2} \| \varphi^n - \varphi \|_\beta = L_1 + L_2 + \frac{1}{2} \| \varphi^n - \varphi \|_\beta$$

对 L_1 估计,有 $L_1 \leqslant J_{12} \int_0^{3\delta} \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^{1-\beta}} = J_{13}\delta^\beta$,再估计 L_2,有

$$L_2 = \frac{1}{4\pi} \left| \int_{\Gamma_2} \frac{(\xi - \eta)}{|\xi - \eta|^3} n(\xi)[(\varphi^n(\eta) - \varphi(\eta)) - (\varphi^n(\xi) - \varphi(\xi))] \mathrm{d}S_\xi \right| \leqslant J_{14} \| \varphi^n - \varphi \|_\beta$$

所以 $| K\varphi^n(\eta) - K\varphi(\eta) | < J_{13}\delta^\beta + J_{14} \| \varphi^n - \varphi \|_\beta + \frac{1}{2} \| \varphi^n - \varphi \|_\beta$,选取 δ 充分小,使 $J_{13}\delta^\beta < \frac{\varepsilon}{2}$,再选取 n 充分大,使 $\| \varphi^n - \varphi \|_\beta < \frac{\varepsilon}{2J_{14} + 1}$,于是对 $\forall \eta \in \Gamma$ 有

$$| K\varphi^n(\eta) - K\varphi(\eta) | < \varepsilon \tag{11}$$

综合(7)、(8)和(11)式,可选取充分大的 n,使对 $\forall \eta \in \Gamma$,有 $| R\varphi^n(\eta) - R\varphi(\eta) | < \varepsilon$。即 R 是连续映射。根据 Arzela-Ascoli 定理知,T 连续函数空间 $C(\Gamma)$ 中的紧集。因此连续映射 R 是映射 $C(\Gamma)$ 中的闭凸集 T 到自身,并且 $R(T)$ 也是 $C(\Gamma)$ 中的紧集。再利用 Schauder 不动点原理知至少存在一个 $\varphi_0 \in H(\Gamma, \beta)$ 适合积分方程(7)式,则问题 SR 至少存在一个解,其解可由(4)和(3)式积分表示。 证毕

注1 在定理3中,若 $A \equiv 1$,$f \equiv 1$,那么非线性边值问题 SR 就变成 Riemann 边值问题,可证得它存在唯一解,即文献[7]中的定理5。

注2 在定理3中,若给 f 再加上适当的限制,则非线性边值问题 SR 亦存在唯一解,其解可用逐次逼近法求得。

参考文献:

[1] VEKUA I N. Generalized Analytic Functions[M]. London:Pergamon Press,1962.

[2] 闻国椿. 共形映射与边值问题[M]. 北京 高等教育出版社,1985.

[3] MOISIL G C, THEODORESCO N. Fonections Holomorphies dans l'espass [J]. Mathematica, 1931,5:142-159.

[4] 黄烈德. 空间的线性和非线性 Hilbert 边值问题解的存在性和唯一性定理[J]. 同济大学学报, 1981(2):58-71.

[5] YANG Pi-wen. The Riemann-Hilbert Boundary Value Problem for the Moisil-Theodorsco System[J]. 数学物理学报, 2006, 26A (7):1057-1063.

[6] 姚益民. Moisil-Theodorsco 方程组的 Riemann 边值问题[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2006, 29(2):188-191.

[7] 李觉友. 非齐次 Moisil-Theodorsco 方程组的 Riemann 边值问题[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2007, 24(4):26-29.

[8] 黄沙. Clifford 分析中的一个带位移的非线性边值问题[J]. 系统科学与数学, 1991, 11(4):336-345.

[9] XU Zhen-yuan. On Linear and Nonlinear Riemann-Hilbert Problem for Regular Functon with in a Clifford Algebra[J]. Chin Ann of Math, 1990, 11B(3):349-358.

[10] 李觉友, 杨丕文. Clifford 分析中的一类广义正则函数的非线性边值问题[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2006, 29 (1):30-33.

A Nonlinear Boundary Value Problem in Moisil-Theodorsco System

LI Jue-you

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: It is well known that function theory methods become, in recent years, powerfull mathematical tool for the treatment of various boundary value problems which have a lots of application in mathematical physics and engineering in domains over Eulidean spaces of higher dimension. In this paper the nonlinear boundary value problem is investigated in inhomogeneous Moisil-Theodorsco system $\partial F = f$ in the domain D which is a bounded domain of $\mathbf{R}^3$ with a piece-wise smooth Liapunov surface Γ. Find a solution $F(\xi)$ of equation $\partial F(\xi) = f(\xi)$ in the domain D, which is continuous in $\overline{D}$, such that $F(\infty) = 0$ and the nonlinear boundary condition $A(\eta)F^+(\eta) + B(\eta)F^-(\eta) = g(\eta)f(\eta, F^+(\eta), F^-(\eta))$, $\eta \in \Gamma$, where $A(\eta), B(\eta), g(\eta) \in H(\Gamma, \beta)$ are given complex value matrix function on Γ. To deal with the nonlinear boundary value problem, first of all, this article studies some properties of the Cauchy type integral and the Plemelj formulae in Moisil-Theodorsco system, and then gives the integral expression of its solution as $F(\xi) = \Phi(\xi) + \tilde{T}f(\xi)$, $\xi \in D$, where $\tilde{T}f = -\frac{1}{4\pi}\int_D \frac{(\xi - \eta)}{|\xi - \eta|^3} f(\xi)\,\mathrm{d}V_\xi$, $\Phi(\xi)$ is a regular function in D, and the Plemelj formulae in inhomogeneous Moisil-Theodorsco system are $\begin{cases} F^+(\eta) = \frac{1}{2}\varphi(\eta) + (K\varphi)(\eta) + \tilde{T}f(\eta) \\ F^-(\eta) = -\frac{1}{2}\varphi(\eta) + (K\varphi)(\eta) + \tilde{T}f(\eta) \end{cases}$ $\eta \in \Gamma$, where $(K\varphi)(\eta) = \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{(\xi - \eta)}{|\xi - \eta|^3} n(\xi)\varphi(\xi)\,\mathrm{d}S_\xi$, $\eta \in \Gamma$. Then in the use of the above obtained Plemelj formulae, the nonlinear boundary value problem should be translated correspondingly the equivalent integral equation $(A+B)\left(-\frac{\varphi}{2} + K\varphi\right) + (A+1)\varphi + (A+B)\tilde{T}f = gf$. Finally, applying the method of integral equations and Schauder fixed point theorem, existence of the solution to the above mentioned boundary value problem has already be proved. At the same time the precisely integral expression of its solution is also obrained $F(\xi) = \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{(\zeta - \xi)}{|\zeta - \xi|^3} n(\zeta)\varphi(\zeta)\,\mathrm{d}S_\zeta + \tilde{T}f(\xi)$, $\xi \notin \Gamma$.

Key words: Moisil-Theodorsco system; Plemelj formulae; boundary value problem

(责任编辑 黄 颖)