运筹学与控制论

渐近非扩张映象的粘性逼近序列的强收敛定理*

李 沛 瑜
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047)

摘 要:假设 E 是具有一致 Gâteaux 可微范数的实 Banach 空间,D 是 E 的非空闭凸子集,$f:D\to D$ 是压缩映象,$T:D\to D$ 是渐近非扩张映象。设粘性逼近序列 $\{x_n\}$ 定义为 $x_{n+1}=\alpha_n f(y_n)+(1-\alpha_n)T^n y_n$,$y_n=\beta_n x_n+(1-\beta_n)T^n x_n$($\forall n\geqslant 0$),其中 $\alpha_n\in[0,1]$,$\beta_n\in[0,1]$。本文给出了 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 的不动点的充要条件:若 $\{\alpha_n\}$ 满足如下条件:$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$,定义一簇压缩映象 $S_n:D\to D$ 为 $S_n(z)=(1-d_n)f(z)+d_nT^nz$,$z\in D$,其中 $d_n=\dfrac{t_n-\alpha}{k_n-\alpha}$,$t_n\in(\alpha,1)$($n=1,2,\cdots$),$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=1$ 且 $k_n^2-1\leqslant(1-d_n)^2$,$\forall n\geqslant n_0$,设 $z_n\in D$ 是 S_n 的唯一不动点,即 $z_n=S_n(z_n)=(1-d_n)f(z_n)+d_nT^nz_n$,$\forall n\geqslant 1$,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=0$ 且 $\{z_n\}$ 强收敛于 $z_*\in F(T)$,则 $\{x_n\}$ 强收敛于 $z_*\in F(T)$ 的充分必要条件是 $\{y_n\}$ 有界。本文的结果不仅是对 Reich 公开问题的解答,而且是对 Reich[1-2]、Shioji 和 Takahashi[3]、张石生[4] 相应结果的推广。

关键词:Banach 空间;渐近非扩张映象;粘性逼近;不动点
中图分类号:O177.91 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2008)02-0004-04

Reich[1-2] 在 1974 年和 1983 年提出如下公开问题:设 E 是 Banach 空间,D 是 E 中一非空弱紧凸集且 D 关于非扩张映象具有不动点性质,$T:D\to D$ 是 E 中非扩张映象,$\forall x_0,y\in D$,对于序列 $\{x_n\}$,$x_{n+1}=\alpha_n y+(1-\alpha_n)Tx_n$,$n\geqslant 0$,问是否存在 $\{\alpha_n\}\in[0,1]$,使得 $\{x_n\}$ 收敛于非扩张映象 T 的一个不动点?Reich[1-2] 在 1974 年和 1983 年证明了当 E 是一个一致光滑 Banach 空间时,存在 $\{\alpha_n=n^{-\alpha}\}$,$\alpha\in(0,1)$,使得 $\{x_n\}$ 收敛于非扩张映象 T 的一个不动点。Wittmann[5] 在 1992 年证明了当 E 是一个 Hilbert 空间,且 $\{\alpha_n\}\in[0,1]$ 满足条件:1)$\alpha_n\to 0$;2)$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_2\to\infty$;3)$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|<\infty$ 时,$\{x_n\}$ 收敛于非扩张映象 T 的一个不动点。Reich[6] 在 1994 年把 Wittmann 的结论推广到某些具有一定限制条件的 Banach 空间。Shioji 和 Takahashi[3] 在 1997 年把 Wittmann 的结论推广到具有一致 Gâteaux 可微范数的实 Banach 空间。Moudafi[7] 在 2000 年首先引入了一种粘性逼近序列 $x_{n+1}=\alpha_{n+1}f(x_n)+(1-\alpha_{n+1})Tx_n$,$n\geqslant 0$,并得到其强收敛定理。张石生教授[4] 在 2007 年把文献[5] 中的结论从非扩张映象推广到了渐近非扩张映象。

受上述文献启发,本文主要目的是将张石生教授[4] 在 2007 年提出的两步逼近序列 $\{x_n\}$ 改进为两步粘性逼近序列 $\{x_n\}$,并研究其强收敛性。

1 预备知识

设 E 是实 Banach 空间,其对偶空间为 E^*,映象 J 是从 E 到 2^{E^*} 的正规对偶映象,即 $J(x)=\{f\in E^*:\langle x,f\rangle=\|x\|\cdot\|f\|,\|x\|=\|f\|\}$,$\forall x\in E$,其中,$\langle *,*\rangle$ 是 E 与 E^* 之间的广义对偶对。

定义 1[4] 设 E 是 Banach 空间,D 是 E 中一非空子集,映象 $T:D\to D$,若存在序列 $\{k_n\}\subset[1,\infty)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$,使得 $\|T^nx-T^ny\|\leqslant k_n\|x-y\|$,$\forall x,y\in D$,$n\geqslant 1$,则称 T 是渐近非扩张映象。

定义 2[4] 设 E 是 Banach 空间,D 是 E 中一非空子集,映象 $f:D\to D$,若存在常数 $\alpha\in(0,1)$,使得 $\|f(x)-$

---

* 收稿日期:2007-08-27 修回日期:2007-11-26
资助项目:重庆市教委项目(No. KJ070806)
作者简介:李沛瑜(1980-),男,硕士研究生,研究方向为最优化理论及算法。

$f(y)\| \leqslant \alpha\|x-y\|, \forall x,y\in D$,则称 $f:D\to D$ 是一个压缩映象。

定义3[4] 设 $U=\{x\in E:\|x\|=1\}$,若 $\forall y\in U$,极限 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}$,$x\in U$ 一致存在,则称 E 的范数是一致 Gâteaux 可微的。

定义4 设 E 是 Banach 空间,$D\subset E$ 是一非空闭凸子集,$f:D\to D$ 是一个压缩映象,$T:D\to D$ 是渐近非扩张映象,其渐近参数 $\{k_n\}\subset[1,\infty)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$,则两步粘性逼近序列 $\{x_n\}$ 定义为

$$\begin{cases}x_{n+1}=\alpha_n f(y_n)+(1-\alpha_n)T^n y_n\\ y_n=\beta_n x_n+(1-\beta_n)T^n x_n,\forall n\geqslant 0\end{cases},\ \{\alpha_n\}\subset[0,1],\ \{\beta_n\}\subset[0,1] \tag{*}$$

引理1[8] 设 E 是一个具有一致 Gâteaux 可微范数的实 Banach 空间,则正规对偶映象 J 是单值映象且在 E 中任一有界子集上从 E 上的强拓扑到 E^* 上的弱*拓扑是一致连续的。

引理2[9] 设 E 是一个实 Banach 空间,则 $\forall x,y\in E$,下面不等式成立。

(a) $\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\langle y,j(x+y)\rangle,\forall j(x,y)\in J(x+y)$;

(b) $\|x+y\|^2\geqslant\|x\|^2+2\langle y,j(x)\rangle,\forall j(x)\in J(x)$。

引理3[10] 设 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$ 是3个非负实数列,满足下列条件:$a_{n+1}\leqslant(1-\lambda_n)a_n+b_n+c_n(\forall n\geqslant n_0)$,$\lambda_n\in[0,1]$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n=\infty$,$b_n=o(\lambda_n)$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n<\infty$,其中,$n_0$ 是某非负整数,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

2 主要结果

定理1 设 E 是一个具有一致 Gâteaux 可微范数的实 Banach 空间,$D\subset E$ 是一非空闭凸子集,$f:D\to D$ 是一个压缩映象,压缩系数为 α,$T:D\to D$ 是渐近非扩张映象,其渐近参数 $\{k_n\}\subset[1,\infty)$,$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(k_n-1)<\infty$,$F(T)=\{x\in D:x=Tx\}$ 非空。对任意给定的 $x_0\in D$,设 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$ 按照(*)所定义,其中 $\{\alpha_n\}\subset[0,1]$,$\{\beta_n\}\subset[0,1]$,且 $\{\alpha_n\}$ 满足如下条件:$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$。定义一簇压缩映象 $S_n:D\to D$ 为 $S_n(z)=(1-d_n)f(z)+d_nT^nz,z\in D$,其中 $d_n=\frac{t_n-\alpha}{k_n-\alpha}$,$t_n\in(\alpha,1)(n=1,2,\cdots)$,$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=1$ 且 $k_n^2-1\leqslant(1-d_n)^2$,$\forall n\geqslant n_0$。设 $z_n\in D$ 是 S_n 的唯一不动点,即

$$z_n=S_n(z_n)=(1-d_n)f(z_n)+d_nT^nz_n,\forall n\geqslant 1 \tag{1}$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=0$ 且 $\{z_n\}$ 强收敛于 $z_*\in F(T)$,则 $\{x_n\}$ 强收敛于 $z_*\in F(T)$ 的充分必要条件是 $\{y_n\}$ 有界。

证明 若 $\{x_n\}$ 强收敛于 $z_*\in F(T)$,因为 $T:D\to D$ 是渐近非扩张映象,由(*)得

$$\|y_n-z_*\|=\|\beta_n(x_n-z_*)+(1-\beta_n)(T^nx_n-z_*)\|\leqslant\beta_n\|x_n-z_*\|+(1-\beta_n)k_n\|x_n-z_*\|\leqslant k_n\|x_n-z_*\|\to 0(n\to\infty) \tag{2}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=z_*$。故 $\{y_n\}$ 有界,必要性得证,下面证明充分性。

设 $\{y_n\}$ 有界,首先证明 $\{x_n\}$,$\{T^nx_n\}$,$\{T^ny_n\}$ 都有界。因为 $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$,故 $\{k_n\}$ 有界。由(1)有

$$\|x_{n+1}-z_*\|=\|\alpha_n(f(y_n)-z_*)+(1-\alpha_n)(T^ny_n-z_*)\|\leqslant$$
$$\alpha_n\|f(y_n)-f(z_*)\|+\alpha_n\|f(z_*)-z_*\|+(1-\alpha_n)k_n\|y_n-z_*\|\leqslant$$
$$\alpha_n\alpha\|y_n-z_*\|+\alpha_n\|f(z_*)-z_*\|+(1-\alpha_n)k_n\|y_n-z_*\|\leqslant\|f(z_*)-z_*\|+k_n\|y_n-z_*\|,\forall n\geqslant 0$$

从而 $\{x_n\}$ 有界。又因为 $\|T^nx_n-z_*\|\leqslant k_n\|x_n-z_*\|$,$\|T^ny_n-z_*\|\leqslant k_n\|y_n-z_*\|(n\geqslant 0)$,故 $\{x_n\}$,$\{T^nx_n\}$,$\{T^ny_n\}$ 都有界。

现证 $\limsup\limits_{n\to\infty}\langle f(z_*)-z_*,J(x_n-z_*)\rangle\leqslant 0$。由(1)式有 $x_n-z_m=(1-d_m)[x_n-f(z_m)]+d_m(x_n-T^mz_m)$,$\forall n\geqslant 0,m\geqslant 1$,由引理2(b),得

$$d_m^2\|x_n-T^mz_m\|^2=\|(x_n-z_m)-(1-d_m)[x_n-f(z_m)]\|^2\geqslant$$
$$\|x_n-z_m\|^2-2(1-d_m)\langle x_n-f(z_m),J(x_n-z_m)\rangle=$$
$$\|x_n-z_m\|^2-2(1-d_m)\langle x_n-z_m+z_m-f(z_m),J(x_n-z_m)\rangle=$$
$$[1-2(1-d_m)]\|x_n-z_m\|^2+2(1-d_m)\langle f(z_m)-z_m,J(x_n-z_m)\rangle$$

由上式变形得

$$\langle f(z_m)-z_m,J(x_n-z_m)\rangle\leqslant\frac{1-2d_m}{2(1-d_m)}\|x_n-z_m\|^2+\frac{d_m^2}{2(1-d_m)}\|T^mz_m-x_n\|^2=$$
$$\frac{2d_m-1}{2(1-d_m)}[\|T^mz_m-x_n\|^2-\|x_n-z_m\|^2]+\frac{1-d_m}{2}\|T^mz_m-x_n\|^2\leqslant$$
$$\frac{2d_m-1}{2(1-d_m)}[(\|T^mz_m-T^mx_n\|+\|T^mx_n-x_n\|)^2-\|x_n-z_m\|^2]+\frac{1-d_m}{2}\|T^mz_m-x_n\|^2\leqslant$$
$$\frac{2d_m-1}{2(1-d_m)}[(k_m\|z_m-x_n\|+\|T^mx_n-x_n\|)^2-$$
$$\|x_n-z_m\|^2]+\frac{1-d_m}{2}\|T^mz_m-x_n\|^2=\frac{2d_m-1}{2(1-d_m)}[(k_m^2-1)\|z_m-x_n\|^2+2k_m\|z_m-x_n\|\cdot\|T^mx_n-x_n\|+$$
$$\|T^mx_n-x_n\|)^2]+\frac{1-d_m}{2}\|T^mz_m-x_n\|^2 \tag{3}$$

因为 $\{x_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 有界,$\|T^mz_m-x_n\|\leqslant\|T^mz_m-z_*\|+\|x_n-z_*\|\leqslant k_m\|z_m-z_*\|+\|x_n-z_*\|$,故 $\{\|T^mz_m-x_n\|\}$ 也有界。设 $K=\sup_{m\geqslant1,n\geqslant0}\{\|T^mz_m-x_n\|,\|z_m-x_n\|,\|x_n-z_*\|\}<\infty$,则(3)式可写为

$$\langle f(z_m)-z_m,J(x_n-z_m)\rangle\leqslant\frac{2d_m-1}{2(1-d_m)}\{(k_m^2-1)K^2+2k_mK\|T^mx_n-x_n\|^2+\|T^mx_n-x_n\|^2\}+\frac{1-d_m}{2}K^2 \tag{4}$$

现用数学归纳法证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T^mx_n-x_n\|=0,\forall m\geqslant1$。当 $m=1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=0$ 成立;假设当 $m\geqslant1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\|T^mx_n-x_n\|=0$,由 $\|T^{m+1}x_n-x_n\|\leqslant\|T^{m+1}x_n-T^mx_n\|+\|T^mx_n-x_n\|\leqslant k_m\|Tx_n-x_n\|+\|T^mx_n-x_n\|$,得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T^{m+1}x_n-x_n\|=0$,归纳得证。由于 $k_n^2-1\leqslant(1-d_n)^2,\forall n\geqslant n_0$,由(4)式得

$$\limsup_{n\to\infty}\langle f(z_m)-z_m,J(x_n-z_m)\rangle\leqslant\frac{2d_m-1}{2(1-d_m)}(k_m^2-1)K^2+\frac{1-d_m}{2}K^2\leqslant(2d_m-1)\frac{1-d_m}{2}K^2+\frac{1-d_m}{2}K^2=$$

$(1-d_m)d_mK^2,\forall m\geqslant1,\forall\varepsilon>0,\exists N$,当 $n\geqslant N$ 时,$\langle f(z_m)-z_m,J(x_n-z_m)\rangle\leqslant(1-d_m)d_mK^2+\varepsilon,m\geqslant1$。又因为 z_n 强收敛于 z_*,E 是具有一致 Gâteaux 可微范数的实 Banach 空间[11-13],由引理 1 知正规对偶映象 J 是单值映象且在 E 中任一有界子集上从 E 上的强拓扑到 E^* 上的弱 * 拓扑是一致连续的,故有

$$\limsup_{m\to\infty}\langle f(z_m)-z_m,J(x_n-z_m)\rangle=\langle f(z_*)-z_*,J(x_n-z_*)\rangle\leqslant\varepsilon,\forall n\geqslant N,\text{由此得}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\langle f(z_*)-z_*,J(x_n-z_*)\rangle\leqslant0 \tag{5}$$

令 $\gamma_n=\max\{\langle f(z_*)-z_*,J(x_n-z_*)\rangle,0\}\geqslant0,\forall n\geqslant0$,现证 $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=0$。事实上,由(5)式知,$\forall\varepsilon>0$,$\exists n_1$,使得 $\langle f(z_*)-z_*,J(x_n-z_*)\rangle<\varepsilon,\forall n\geqslant n_1$,即 $0\leqslant\gamma_n<\varepsilon,\forall n\geqslant n_1$,由 ε 的任意性,$\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=0$。由引理 2($a$)和(*),有

$$\|x_{n+1}-z_*\|^2=\|\alpha_n(f(y_n)-z_*)+(1-\alpha_n)(T^ny_n-z_*)\|^2\leqslant$$
$$(1-\alpha_n)^2\|T^ny_n-z_*\|^2+2\alpha_n\langle f(y_n)-z_*,J(x_{n+1}-z_*)\rangle\leqslant$$
$$(1-\alpha_n)^2k_n^2\|y_n-z_*\|^2+2\alpha_n\langle f(y_n)-z_*,J(x_{n+1}-z_*)\rangle,\forall n\geqslant0 \tag{6}$$

考虑(6)式的右边第 1 项,由(2)式得

$$(1-\alpha_n)^2k_n^2\|y_n-z_*\|^2\leqslant(1-\alpha_n)^2k_n^4\|x_n-z_*\|^2=(1-\alpha_n)^2\|x_n-z_*\|^2+(1-\alpha_n)^2(k_n^4-1)\|x_n-z_*\|^2\leqslant$$
$$(1-\alpha_n)^2\|x_n-z_*\|^2+(k_n-1)\cdot M_1 \tag{7}$$

其中,$M_1=\sup_{n\geqslant0}\{(k_n^3+k_n^2+k_n+1)\cdot\|x_n-z_*\|^2\}$。由(6)式和(7)式得

$$\|x_{n+1}-z_*\|^2\leqslant(1-\alpha_n)^2\|x_n-z_*\|^2+(k_n-1)M_1+2\alpha_n\langle f(y_n)-z_*,J(x_{n+1}-z_*)\rangle\leqslant(1-\alpha_n)^2\|x_n-z_*\|^2+(k_n-1)M_1+2\alpha_n\langle f(y_n)-f(z_*)+f(z_*)-z_*,J(x_{n+1}-z_*)\rangle\leqslant(1-\alpha_n)^2\|x_n-z_*\|^2+(k_n-1)\cdot M_1+\alpha_n\alpha(\|y_n-z_*\|^2+\|x_{n+1}-z_*\|^2)+2\alpha_n\langle f(z_*)-z_*,J(x_{n+1}-z_*)\rangle\leqslant(1-\alpha_n)^2\|x_n-z_*\|^2+(k_n-1)\cdot M_1+\alpha_n\alpha(k_n\|x_n-z_*\|^2+\|x_{n+1}-z_*\|^2)+2\alpha_n\gamma_{n+1}$$

故

$$(1-\alpha_n\alpha)\|x_{n+1}-z_*\|^2\leqslant(1-2\alpha_n+\alpha_nk_n\alpha)\|x_n-z_*\|^2+\alpha_n^2\|x_n-z_*\|^2+2\alpha_n\gamma_{n+1}+(k_n-1)\cdot M_1\leqslant(1-2\alpha_n+\alpha_nk_n\alpha)\|x_n-z_*\|^2+\alpha_n(\alpha_nM_1+2\gamma_{n+1})+(k_n-1)\cdot M_1 \tag{8}$$

因$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$,故$\exists n_2$,使得$1-\alpha_n\alpha>1/2$,$\forall n\geqslant n_2$。由(8)式得

$$\|x_{n+1}-z_*\|^2\leqslant\frac{1-2\alpha_n+\alpha_nk_n\alpha}{1-\alpha_n\alpha}\|x_n-z_*\|^2+2\alpha_n(\alpha_nM_1+2\gamma_{n+1})+2(k_n-1)M_1 \tag{9}$$

又因为$\{k_n\}\subset[1,\infty)$,$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$,故$\exists n_3$,使得$k_n<1/\alpha$,$\forall n\geqslant n_3$。取$N^*=\max\{n_2,n_3\}$,当$n\geqslant N^*$时,有

$$\frac{1-2\alpha_n+\alpha_nk_n\alpha}{1-\alpha_n\alpha}=1-\frac{2\alpha_n-\alpha_nk_n\alpha-\alpha_n\alpha}{1-\alpha_n\alpha}\leqslant1-\frac{2\alpha_n-\alpha_n-\alpha_n\alpha}{1-\alpha_n\alpha}\leqslant1-\alpha_n(1-\alpha)$$

再考虑(9)式,当$n\geqslant N^*$时有

$$\|x_{n+1}-z_*\|^2\leqslant[1-\alpha_n(1-\alpha)]\|x_n-z_*\|^2+2\alpha_n(\alpha_nM_1+2\gamma_{n+1})+2(k_n-1)M_1 \tag{10}$$

记$a_n=\|x_{n+1}-z_*\|^2$,$\lambda_n=\alpha_n(1-\alpha)$,$b_n=2\alpha_n(\alpha_nM_1+2\gamma_{n+1})$,$c_n=2(k_n-1)\cdot M_1$,易知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n=\infty$,$b_n=o(\lambda_n)$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n<\infty$,故由引理3得$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-z_*\|=0$。因此$\{x_n\}$强收敛于$z_*\in F(T)$,充分性证毕。

注1 在定理1中,取$\beta_n=1$,则粘性逼近序列$\{x_n\}$由$x_{n+1}=\alpha_nf(x_n)+(1-\alpha_n)T^nx_n(\forall n\geqslant0)$确定,相应结论仍成立。

注2 在定理1中,若取$f(x)=y$,$\forall x\in D$,其中y是D中给定的一点,则$f:D\to D$是压缩映象,且压缩系数为$\alpha=0$,所得结果即为张石生教授[4]的主要成果。

参考文献:

[1] REICH S. Some Fixed Point Problems[J]. Atti Accad Naz Lincei, 1974, 57: 194-198.

[2] REICH S. Some Problems and Results in Fixed Point Theory[J]. Contemp Math, 1983, 21: 179-187.

[3] SHIOJI N, TAKAHASHI W. Strong Convergence of Approximated Sequence for Nonexpansive Mappings[J]. Proc Amer Math Soc, 1997, 125(12): 3641-3645.

[4] ZHANG S S, JOSEPH LEE H W, CHAN C K. On Reich's Strong Convergence Theorem for Asymptotically Nonexpansive Mappings in Banach Space[J]. Nonlinear Anal, 2007, 66(11): 2346-2374.

[5] WITTMANN R. Aproximation of Fixed Points of Nonexpansive Mappings[J]. Arch Math, 1992, 58: 486-491.

[6] REICH S. Aproximating Fixed Points of Nonexpansive Mappings[J]. Panamer Math J, 1994, 4(2): 23-28.

[7] MOUDAFI A. Viscosity Approximation Methods for Fixed-points Problems[J]. J Math Anal Appl, 2000, 241: 46-55.

[8] REICH S. On the Asymptotic Behavior of Nonlinear Semigroups and Range of Accretive Operators[J]. J Math Anal Appl, 1981, 79: 113-126.

[9] CHANG S S. On Chidume's Open Questions and Approximation Solutions of Multivalued Strongly Accretive Mappings Equations in Banach Space[J]. J Math Anal Appl, 1997, 216: 94-111.

[10] LIU L S. Ishikawa and Mann Iterative Processes with Errors for Nonlinear Strongly Accretive Mappings in Banach Spaces [J]. J Math Anal Appl, 1995, 194: 114-125.

[11] 向长合. 有限个渐近非扩张映象公共不动点的逼近[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2007, 24(1): 7-10.

[12] 向长合. Banach空间上广义渐近拟非扩张型映象不动点的逼近[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2005, 22(4): 6-9.

[13] 唐玉华. Banach空间中一迭代序列及其耦合不动点[J]. 西华师范大学学报(自然科学版), 2002, 23(3): 256-259.

Strong Convergence Theorem in Viscosity Approximation Sequence of Asymptotically Nonexpansive Mappings

LI Pei-yu

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: Suppose that E is a real Banach space with uniformly Gâteaux differentiable norm, D is a nonempty closed convex subset of E, and $f: D\to D$ is a contraction mapping and $T: D\to D$ is an asymptotically nonexpansive mapping. Let $\{x_n\}$ be the viscosity approximaton sequence defined by $x_{n+1}=\alpha_n f(y_n)+(1-\alpha_n)T^n y_n$, $y_n=\beta_n x_n+(1-\beta_n)T^n x_n$ $(\forall n\geqslant 0)$, where $\alpha_n\in[0,1]$, $\beta_n\in[0,1]$. This paper gives a necessary and sufficient condition for $\{x_n\}$ converges strongly to a fixed point of T. Let $\{\alpha_n\}$ satisfy the following conditions: $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$, define a sequence of contractive mappings S_n by $S_n(z)=(1-d_n)f(z)+d_n T^n z$, $z\in D$, where $d_n=\dfrac{t_n-\alpha}{k_n-\alpha}$, $t_n\in(\alpha,1)$ $(n=1,2,\cdots)$, $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=1$ and $k_n^2-1\leqslant(1-d_n)^2$, $\forall n\geqslant n_0$, let $z_n\in D$ be the unique fixed point of S_n, i. e., $z_n=S_n(z_n)=(1-d_n)f(z_n)+d_n T^n z_n$, $\forall n\geqslant 1$, if $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=0$ and $\{z_n\}$ converges strongly to some $z_*\in F(T)$, then the sequence $\{x_n\}$ converges strongly to the fixed $z_*\in F(T)$, if and only if $\{y_n\}$ is bounded. My main result is as follows: The result presented in the paper not only gives an affirmative partial ansewer to Reich's open question, but also extends and improves the corresponding results of Reich[1-2], Shioji and Takahashi[3] and S. S. Chang[4].

Key words: Banach space; asymoptotically nonexpansive mappings; viscosity approximation; fixed point

（责任编辑　游中胜）