

浅议导出玻尔量子化条件的驻波条件*

罗光,肖广渝

(重庆师范大学 物理学与信息技术学院,重庆 400047)

摘要:从教科书中根据直线弦振动的驻波条件,处理电子绕核作圆周运动角动量的量子化问题,导致了与玻尔理论量子化条件不一致的结论。提出利用驻波的特点和封闭弦振动驻波满足的对称性,得出圆形封闭弦形成驻波的条件为周长是半波长的偶数倍。利用此条件可以处理电子绕核作圆周运动的角动量量子化问题,从而得出与玻尔定态理论一致的结论。最后把玻尔定态理论的3个假设分别与驻波特点相对应,用驻波的特性解释了电子绕核运动的能量、角动量的量子化问题。

关键词:量子力学;玻尔量子化条件;驻波;角动量

中图分类号:O413.1

文献标识码:A

文章编号:1672-6693(2008)02-0088-03

大学物理教材中^[1-3],处理电子绕核运动的角动量是量子化的这一玻尔量子化条件假设时,一般从驻波的特征出发得出形成驻波的条件,再联系电子具有的波动属性,确定出电子的波长,导出角动量是量子化的,并以此建立了德布罗意波和玻尔理论的联系,以说明或验证玻尔轨道角动量量子化的条件。由于把原子定态与驻波联系起来,也使能量量子化与有限空间驻波的波长和频率的离散性联系起来,建立了经典理论和量子理论的和谐性。

虽然从量子力学^[4]的角度看这种联系待磋商,但是因为能让学生从较易接受的具体弦振动的简正模式出发,来理解抽象的量子力学中轨道角动量的量子化,容易被学生接受。因而很多教材^[1-3]都采用这种方式给出电子具有波动性的属性。然而只要稍加分析就可以看出,这种联系是不严密的。因为形成驻波的条件与在建立德布罗意波和玻尔理论的关系的驻波条件的表达式是不完全相同的。为什么有这样的区别,没有哪个教材作了相关的解释。因而细心的读者一旦发现这种不一样,往往陷入模棱两可的境地,反而使本就艰深的量子力学变得更加令人费解。

1 由直线弦振动的驻波条件导出的角动量

对于具有一定长度且两端固定的弦,根据弦振

动的简正模式可以形成驻波。波长 λ_n 和弦长 l 之间必须满足^[5]

$$l = n \frac{\lambda_n}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1)$$

事实上,按此条件是无法导出与玻尔理论相一致的角动量量子化条件的。因为根据德布罗意波的波长公式,质量为 m 的电子,以速率 v 运动时,其波长 λ 为

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad (2)$$

结合(1)式,当 $\lambda_n = \lambda$ 时,以半径为 r 的圆周运动的电子的角动量 L 为

$$L = mvr = n \frac{h}{4\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3)$$

由(3)式可以看出,这与玻尔理论的角动量量子化条件的假设^[2]

$$L = n \frac{h}{2\pi} \quad (4)$$

不一致。

为了避免这种不一致,很多普通物理学教材^[1-3]在作这样的解释时,都把形成驻波的条件改为

$$l = n\lambda_n \quad (5)$$

但没有说明理由。由于两端固定的弦形成驻波的条件是由(1)式确定。在将直线弦弯曲成圆形封闭弦时,形成驻波的条件就变成了(5)式。因而学生在碰到上述问题时,大都陷入模棱两可的境地。

* 收稿日期:2007-09-03 修回日期:2008-02-20

作者简介:罗光(1973-)男,讲师,博士研究生,研究方向为理论物理。

2 圆形封闭弦形成驻波条件

圆形封闭弦的驻波图样可以由直线弦驻波图样经适当变形似乎很自然地可以得到,如图1所示,直线弦驻波具有的性质封闭弦也应该有。当两端固定时,波节数 n 和波腹数 m 间的关系为 $n-1=m$,任意一个波节两边的点的相位相差 π ,波长 λ_n 和弦长 l 之间必须满足(1)式,才能形成驻波。当两端点合在一点构成封闭弦,即始于同一点,反向沿圆周传播时(该点为可区分时),与直线弦两端固定时形成驻波的条件一样,也是(1)式,此时的弦长即为圆周长。当然根据此条件只能得到描述‘角动量量子化条件’的(3)式,无法得到与玻尔理论角动量量子化条件相一致的结果。但是当弦的两端点与其它点无法区分时,也无需区分时,这时形成驻波的条件与直线弦形成驻波的条件就不一样了,此时波节数 n 和波腹数 m 间的关系为 $n=m$,任意一个波节两边的点的相位相差 π ,波长 λ_n 和弦长 l 间的关系也将有所变化,端点也成为节点之一,如图1中c和d所示以及图2所示,根据波节两边点的相位相差 π 的关系,可以看出,图2所示的情形是不能形成驻波的(因为节点1两边的点的相位是相同的)。由此可以得出,当两列波起于同一点反向沿同一圆周传播时,要形成驻波,则波长 λ_n 和弦长 l 之间满足的关系式(1)中的 n 必须是偶数,在圆周上必须只有偶数个波腹偶数个波节,才能够形成驻波。电子绕核运动的方式与圆形封闭弦形成驻波的条件吻合。

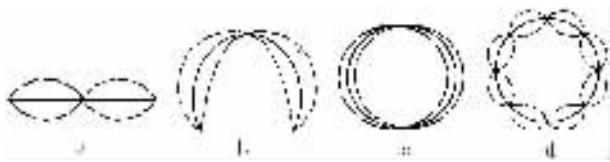


图1 直线弦驻波过渡到圆形封闭弦驻波示意图

a 直线弦驻波示意图 b 由直线弦向封闭弦驻波的过渡 c 圆周长等于波长时的封闭弦驻波示意图 d 圆周长是波长4倍时的封闭弦驻波示意图



图2 圆形封闭弦端点固定时形成的驻波示意图

a 圆周长刚好是半波长时的封闭弦驻波示意图 b 圆周长是半波长3倍时的封闭弦驻波示意图

对于圆形封闭弦,当弦的端点无法(也无须)与

其他点区分时,就有以下两种可能:

1) 假如圆周长 l 为电子的德布罗意波长 λ 的关系为

$$l = 2\pi r = \frac{\lambda}{2}(2n+1) \quad (6)$$

即圆周长是半波长的奇数倍时,则无法形成驻波。因为只有奇数个波腹、奇数个波节,根据圆的对称性要求,在一个圆周上假如是奇数个波腹(或波节),肯定是不对称,此时波节两边的点的相位相同。如图2所示,比如选择1点,就无与它对称的点。这时点1就是可以区分的点(其它点也类似,都不具有中心对称性),就不适合描述电子围绕核运动的特点——绕核运动、关于中心对称以及无始点和终点(终点和始点不可分辨)等。

2) 要满足电子绕核运动的特点,则要求圆周长 l 为电子的德布罗意波长 λ 的整数倍,即

$$l = 2\pi r = n\lambda \quad (7)$$

如图1中c和d的情形。这种情况就满足了对称性要求,此时波节两边的点的相位相差 π ,也满足驻波形成的条件(1)式。

因此,把电子绕核作定态圆周运动看成是德布罗意几率波的波动,利用封闭弦的简正模式来分析驻波条件,这时波长 λ 和弦长 l 之间必须满足(7)所示的关系,利用(2)式,就可以得出与玻尔理论角动量量子化的条件(4)式相一致的表达式。

在德布罗意物质波的理论中,电子在原子中的运动对应着一种波动,虽然这是一种几率波,不同于机械波,但是同样满足波的相关特性,比如干涉、衍射等。而且利用驻波形成后的特点可以在一定程度上解释玻尔理论的以下3个假设。

a) 电子在原子中,可以在一些特定圆轨道上运动而不辐射电磁波,这时原子处于稳定状态,并具有一定的能量。对于电子绕核的这种特殊的运动,既要满足波动,又不辐射能量,这种波动只有形成驻波时才能同时满足。

b) 电子以速度 v 在半径为 r 的圆轨道上绕核运动时,只有电子的角动量等于 $h/2\pi$ 的整数倍的那些轨道才是稳定的。从波动属性可以得出,要形成驻波,此时电子的波长和圆周长间必须满足形成驻波的条件(5)式,这时电子的角动量刚好等于 $h/2\pi$ 的整数倍,正如(4)式所描述的一样。

c) 当原子从高能级的定态跃迁到低能级的定态,要辐射一定频率的光子。根据驻波形成的特点——波的能量不再作定向传播,只能是动能和势

能的不断相互转化(机械能守恒),电子绕核运动的动能和相对核的势能之和(机械能)就是一个确定的值。当不同的轨道之间发生跃迁时,即是驻波的封闭弦半径发生了变化,而这种变化由于驻波条件限制,导致了不连续性。在经典力学中可以推出电子具有的动能和势能,从而可以得出电子的机械能发生了相应的变化,机械能的增加量或减少量就对应了电子将吸收或辐射的能量。由于半径的变化是离散的,吸收或辐射的能量也是离散的。假如原子是从高能态的定态跃迁到低能量的定态,则以光子的形式辐射的能量就是一定的,相应的频率也是一定的。

3 结论

总之,在分析电子绕核作定态圆周运动,利用振动的简正模式形成驻波的条件来导出玻尔理论中的角动量量子化条件的假设时,关键的问题是要搞清楚直线弦与圆形封闭弦按振动的简正模式形成驻波所具有的特点。利用圆形封闭弦所具有的中心对称

性,对直线弦形成驻波的弦长与波长满足的条件作适当的改进,就可以保证在逻辑严密,理论自洽上得出玻尔理论中角动量量子化的条件,从而能达到让学生从较熟悉的驻波的特点更充分地理解相对艰深的量子理论。

致谢:重庆工学院杨光富教授对本文给予了悉心指导,谨此致谢!

参考文献:

- [1] 程守洙,江之永.普通物理学(下册)[M].第6版.北京:高等教育出版社,2006.238.
- [2] 马文蔚,解希顺,周雨青.物理学(下册)[M].第5版.北京:高等教育出版社,2006.332.
- [3] 梁绍荣,管靖.基础物理学(下册)[M].北京:高等教育出版社,2002.208-209.
- [4] 林祯祺.从量子论到玻色-爱因斯坦统计[M].重庆师范大学学报(自然科学版),2006,23(4):45-49.
- [5] 马文蔚,解希顺,周雨青.物理学(下册)[M].第5版.北京:高等教育出版社,2006.68-69.

A Tentative Study of Standing Wave Condition Used to Deduce Bohr Quantized Condition

LUO Guang, XIAO Guang-yu

(College of Physics and Information Technology, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: This paper thinks that the conclusion will disagree with the Bohr angular momentum quantized condition, if the standing wave condition of linear string vibration is used directly to deal with angular momentum of the motion of electron going round nucleus in a circle in the textbook. The paper holds that if one employs the character of the standing wave and the symmetry satisfied by standing wave condition of circular string vibration, he can reach that the condition of the standing wave of circular string vibration is just the circumference of the circle equal to even times of half of the wavelength. Through that condition, one can obtain the quantized angular momentum consistent with the stationary state of Bohr Theory. At the end of the paper the authors explain the quantized angular momentum and the quantized energy with the character of the standing wave.

Key words: quantum mechanics; Bohr quantized condition; standing wave; angular momentum

(责任编辑 李若溪)