运筹学与控制论

E-凸函数的一个新性质*

陈 乔
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047)

摘 要:最近,彭在文献[1]中提出了关于拟半 E-凸函数的一个判别准则。本文首先利用 E-凸函数和凸函数的定义给出了 E-凸函数的一个等价条件,即在 $E:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,$M\subseteq\mathbf{R}^n$ 是一个 E-凸集,$E(M)$ 是凸集,f 是定义在 M 上的实值函数的情况下,若函数 f 在 M 上是 E-凸的当且仅当 $\phi(\lambda)=f[E(y)+\lambda(E(x)-E(y))]$ 在 $[0,1]$ 上是凸函数。其次,本文对文献[1]中关于拟半 E-凸函数的结论进行了研究分析,指出其结论在本质上来说可以退化到拟凸函数的情形。

关键词:E-凸集;E-凸函数;拟半 E-凸函数;等价条件
中图分类号:O221.2 文献标识码:A 文章编号:1672-6693(2008)04-0003-02

在数学规划、最优化等领域中,凸性及广义凸性起着十分重要的作用。因此,对凸性及广义凸性的研究具有十分重要的意义,众多的学者对此进行了深入的研究[2-10]。E. Youness 在文献[2]中提出了 E-凸函数和 E-凸规划,建立了相应的一些结果。Yang[3] 和 Jian[4] 分别对文献[2]做了修正和改进。最近,文献[1]提出了拟半 E-凸函数的判别准则。本文首先给出了 E-凸函数的等价条件。同时指出文献[1]中的结论可退化到拟凸函数的情形。

1 预备知识

本文首先回顾 E-凸性的一些相关概念。

定义 1[6] $M\subseteq\mathbf{R}^n$ 为凸集,若 $\forall x,y\in M,\forall\lambda\in[0,1]$,有 $\lambda x+(1-\lambda)y\in M$。

定义 2[6] $M\subseteq\mathbf{R}^n$ 是凸集,$f:M\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$,若 $\forall x,y\in M,\forall\lambda\in[0,1]$,有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

则称 f 是 M 上的凸函数。

定义 3[2] $M\subseteq\mathbf{R}^n$ 是 E-凸集。若 $\exists E:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,使得

$$\lambda E(x)+(1-\lambda)E(y)\in M,\forall x,y\in M,\forall\lambda\in[0,1]$$

定义 4[2] $f:M\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是 E-凸函数。若 $\exists E:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 使得 M 为 E-凸集,且

$$f(\lambda E(x)+(1-\lambda)E(y))\leqslant\lambda f(E(x))+(1-\lambda)f(E(y)),\forall x,y\in M,\forall\lambda\in[0,1]$$

定义 5[7] $f:M\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是半 E-凸函数。若 $\exists E:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 使得 M 为 E-凸集,且

$$f(\lambda E(x)+(1-\lambda)E(y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\forall x,y\in M,\forall\lambda\in[0,1]$$

定义 6[7] $f:M\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是拟半 E-凸函数。若 $\exists E:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 使得 M 为 E-凸集,且

$$f(\lambda E(x)+(1-\lambda)E(y))\leqslant\max\{f(x),f(y)\}\quad\forall x,y\in M,\forall\lambda\in[0,1]$$

2 主要结论及其证明

2.1 E-凸函数的一个等价条件

集合 $X\subseteq\mathbf{R}^n$ 为凸集,则 $f(x)$ 为定义在 X 上的凸函数等价于

$$\forall x,y\in X,\phi(\lambda)=f(y+\lambda(x-y))$$

是定义在 $[0,1]$ 上的凸函数。

下面得到了 E-凸函数在一定条件下相类似的结果。

定理 1 设 $E:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,$M\subseteq\mathbf{R}^n$ 是一个 E-凸集,$E(M)$ 是凸集,f 是定义在 M 上的实值函数。如果函数 f 在 M 上是 E-凸的当且仅当

$$\phi(\lambda)=f[E(y)+\lambda(E(x)-E(y))]$$

在 $[0,1]$ 上是凸函数。

证明 充分性。$\phi(\lambda)$ 在 $[0,1]$ 上是凸函数,则对 $\forall\lambda_1,\lambda_2\in[0,1],\forall\alpha\in[0,1]$,都有

$$\phi(\alpha\lambda_1+(1-\alpha)\lambda_2)\leqslant\alpha\phi(\lambda_1)+(1-\alpha)\phi(\lambda_2)\tag{1}$$

---

* 收稿日期:2008-05-19
资助项目:国家自然科学基金(No. 10471159)
作者简介:陈乔(1981-),女,硕士研究生,研究方向为最优化理论与算法。

特别地,取 $\lambda_1=1,\lambda_2=0$,代入(1)式可得

$$\phi(\alpha\times 1+(1-\alpha)\times 0)=\phi(\alpha)\leqslant \alpha\phi(1)+(1-\alpha)\phi(0)$$

即

$$f[E(y)+\alpha(E(x)-E(y))]=f(\alpha E(x)+(1-\alpha)E(y))\leqslant \alpha f(E(x))+(1-\alpha)f(E(y)),\forall x,y\in M$$

所以 f 是 M 上的 E-凸函数。

必要性。$\forall\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$,$\forall\alpha\in[0,1]$,有

$$\phi(\alpha\lambda_1+(1-\alpha)\lambda_2)=\phi(\lambda_2+\alpha(\lambda_1-\lambda_2))=f\{E(y)+[\lambda_2+\alpha(\lambda_1-\lambda_2)]\times[E(x)-E(y)]\}=$$

$$f[E(y)+\lambda_2(E(x)-E(y))+\alpha(\lambda_1-\lambda_2)(E(x)-E(y))]=$$

$$f\{E(y)+\lambda_2(E(x)-E(y))+\alpha[(E(y)+\lambda_1(E(x)-E(y)))-(E(y)+\lambda_2(E(x)-E(y)))]\}$$

由 $E(M)$ 是凸集可知

$$E(y)+\lambda_1(E(x)-E(y))\in E(M)$$
$$E(y)+\lambda_2(E(x)-E(y))\in E(M)$$

从而存在 $x',y'\in M$,使得

$$E(x')=E(y)+\lambda_1(E(x)-E(y))$$
$$E(y')=E(y)+\lambda_2(E(x)-E(y))$$

因而

$$\phi(\alpha\lambda_1+(1-\alpha)\lambda_2)=f[E(y')+\alpha(E(x')-E(y'))]=f(\alpha E(x')+(1-\alpha)E(y'))$$

由 f 是 E-凸函数可得

$$f(\alpha E(x')+(1-\alpha)E(y'))\leqslant \alpha f(E(x'))+(1-\alpha)f(E(y'))$$

因此

$$\phi(\alpha\lambda_1+(1-\alpha)\lambda_2)\leqslant \alpha f(E(x'))+(1-\alpha)f(E(y'))=\alpha f[E(y)+\lambda_1(E(x)-E(y))]+(1-\alpha)f[E(y)+\lambda_2(E(x)-E(y))]=\alpha\phi(\lambda_1)+(1-\alpha)\phi(\lambda_2)$$

即 $\phi(\lambda)=f[E(y)+\lambda(E(x)-E(y))]$ 在 $[0,1]$ 上是凸函数。 证毕

2.2 对文献[1]中结论的分析

文献[1]中给出了下面的结论。

引理[1] 设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是凸集 $M\subseteq\mathbf{R}^n$ 上的实值函数,若存在线性映射 $E:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 使得 $E(M)\subseteq M$,对 $\forall x\in M$,有 $f(x)\leqslant f(E(x))$,且存在 $\alpha\in(0,1)$,使得

$$f(\alpha E(x)+(1-\alpha)E(y))\leqslant \max\{f(x),f(y)\},\forall x,y\in M \quad (2)$$

且当 $\alpha=0$ 和 1 时上式也成立,则集合

$$A=\{\lambda\in[0,1]:f(\lambda E(x)+(1-\lambda)E(y))\}\leqslant \max\{f(x),f(y)\},\forall E(x),E(y)\in M\}$$

在 $[0,1]$ 上是稠密的。

分析 若 $f(x)\geqslant f(y)$,假设 $\alpha=0$ 对(2)式成立,有 $f(E(y))\leqslant\max\{f(x),f(y)\}=f(x)$

$\alpha=1$ 对(2)式成立,有

$$f(E(x))\leqslant\max\{f(x),f(y)\}=f(x)$$

若 $f(x)\leqslant f(y)$,假设 $\alpha=0$ 对(2)式成立,有 $f(E(y))\leqslant\max\{f(x),f(y)\}=f(y)$。

$\alpha=1$ 对(2)式成立,有

$$f(E(x))\leqslant\max\{f(x),f(y)\}=f(y)$$

此与已知条件 $f(x)\leqslant f(E(x)),\forall x\in M$ 可推出 $f(E(x))=f(x),\forall x\in M$。即是 $f\circ E=f$,所以 $E(x)=I(x),\forall x\in M$。

那么引理就退化为下述性质。

性质1 设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是凸集 $M\subseteq\mathbf{R}^n$ 上的实值函数,且存在 $\alpha\in(0,1)$,使得

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant\max\{f(x),f(y)\},\forall x,y\in M$$

则集合

$$A=\{\lambda\in[0,1]:f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant \max\{f(x),f(y)\},\forall x,y\in M\}$$

在 $[0,1]$ 上是稠密的。

由上面的分析可以看出,文献[1]中给出的下面的定理相应地也可以得到其退化的相应命题。

定理2[1] 设 $f:M\to\mathbf{R}$ 是凸集 $M\subseteq\mathbf{R}^n$ 上的上半连续函数,若存在线性映射 $E:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 使得 $E(M)\subseteq M$,对 $\forall x\in M$ 有 $f(x)\leqslant f(E(x))$,且当 $E(y_n)\to E(y)$ 时有 $y_n\to y$ 成立,则 f 为拟半 E-凸函数 $\Leftrightarrow\exists\beta\in(0,1)$ 使得

$$f(\beta E(x)+(1-\beta)E(y))\leqslant\max\{f(x),f(y)\},\forall x,y\in M$$

且当 $\beta=0$ 或 1 时上式也成立。

性质2 设 $f:M\to\mathbf{R}$ 是凸集 $M\subseteq\mathbf{R}^n$ 上的上半连续的实值函数,f 为拟凸函数当且仅当 $\exists\beta\in(0,1)$ 使得

$$f(\beta x+(1-\beta)y)\leqslant\max\{f(x),f(y)\},\forall x,y\in M$$

性质2是关于上半连续函数的拟凸性问题,文献[5]对此已做了详细的研究。

参考文献:

[1] 彭再云. 关于拟半 E-凸函数的一个新的判别准则[J]. 长春师范学院学报,2006,25(1):4-5.

[2] YOUNESS E A. E-Convex Sets, E-Convex Functions and E-Convex Programming[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1999, 102(2):439-450.

[3] YANG X M. On E-Convex Sets, E-Convex Functions, and E-Convex Programming[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2001,109(3):699-704.

[4] JIAN J B. Incorrect Results for E-Convex Functions and E-Convex Programming[J]. Mathematical Research and Exposition,2003,23(3):461-466.

[5] 杨新民. 上半连续函数的拟凸性[J]. 运筹学学报,1999,3(1):48-51.

[6] HOANG T. Convex Analysis and Global Optimization[M]. Dordrecht:Kluwer Academic Publishers, 1998.

[7] CHEN X S. Some Properties of Semi-E-Convex Functions [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2002, 275:251-262.

[8] 彭再云,李婷,敖军,等. 三类G-广义单调性G-凸性及其应用[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2007, 24(1):25-28.

[9] 刘彩平. 非光滑函数的半严格拟不变凸性[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2007,24(3):1-3.

[10] 王丽. 一类非光滑广义凸多目标规划的最优性条件[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2005,30(1):41-46.

A New Characterization of E-Convex Functions

CHEN Qiao

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: Recently a new criterion of quasi-semi-E-convex functions was introduced by Peng in 2006 for a new criterion of quisi-semi-E-convex functions. In this paper, firstly, we propose a necessary and sufficient condition for E-convex functions by using the definitions of E-convex function and convex function, that is, Let $E:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, $M\subseteq\mathbf{R}^n$ is a E-convex set, $E(M)$ is a convex set, f is a real-valued function defined in M, so f is E-convex function if and only if $\phi(\lambda)=f[E(y)+\lambda(E(x)-E(y))]$ is convex function under some conditions. Then we have the other theorem, let $f: M\to\mathbf{R}$ is a upper semi-continuous function in convex set $M\subseteq\mathbf{R}^n$, if there exists a linear mapping $E:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, such that $E(M)\subseteq M$, for $\forall x\in M$ have $f(x)\leqslant f(E(x))$, and $y_n\to y$ as $E(y_n)\to E(y)$, then f is a quasi-semi-E-convex function$\Leftrightarrow\exists\beta\in(0,1)$ (or $\beta=0,1$), such that $f(\beta E(x)+(1-\beta)E(y))\leqslant\max\{f(x),f(y)\}$, $\forall x,y\in M$.

Key words: E-convex set; E-convex functions; quasi-semi-E-convex functions; equivalent condition

(责任编辑 黄 颖)