运筹学与控制论

一类非凸二次规划问题的全局最优性充分条件*

王杉林
(兰州商学院 陇桥学院,兰州 730101)

摘 要:研究了一类带二次等式约束的二次规划问题,利用求非凸优化问题全局最优性条件的一个新方法—L-次微分方法(与凸分析中的概念不同,一个函数在某点的 L-次微分可能是一些非线性函数组成的集合),对二次函数的 L-次微分进行了刻画,最后建立带二次等式约束非凸二次极小化规划问题的全局最优化的一个充分条件。

关键词:非凸二次规划;二次等式约束;L-次微分;全局优化条件
中图分类号:O221.2 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2008)04-0005-03

全局优化问题是数学规划理论中重要而又困难的一个研究领域,它研究的是非线性函数在某个区域上全局最优点的特征和计算方法[1]。经典的 KKT 等局部最优性条件的发现,极大地推动了数学规划理论的发展,它们也是各种局部优化算法的理论基础。同样,全局最优性条件对全局优化问题的研究也是至关重要的[2-3]。对于凸规划问题,即目标函数是凸函数,可行域是凸集的最优化问题,它的局部最优点就是全局最优点。因此,凸规划问题的局部最优性条件就是全局最优性条件,一般的求局部最优点的方法可以用来求全局最优点。但是,对于非凸优化问题,求解和验证全局最优解是一件非常困难的事情。

所谓二次约束二次规划问题(QQP)的全局优化问题,是指在二次函数的约束条件下求二次函数 $q(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx+b^{\mathrm{T}}x$ 的全局极小(全局极大)的问题。近年来关于此问题全局最优性条件的研究已有了很大进展,例如,在文献[4]中作者发现当约束为 $g(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Q_1x+b_1^{\mathrm{T}}x\leqslant 0$ 时 $\bar{x}$ 为 $q(x)$ 的全局极小的充要条件是,在 $\bar{x}$ 点,KKT 条件成立,且 $Q+\bar{\mu}Q_1$ 是半正定的,其中 $\bar{\mu}$ 是拉格朗日乘子;在文献[5]中彭基民和袁亚湘给出了当约束为 $g_i(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Q_ix+b_i^{\mathrm{T}}x\leqslant 0\ (i=1,2)$ 时,$\bar{x}$ 成为一个二次函数的全局极小的一个充分条件和一个必要条件。在这些条件中,除了 KKT 条件以外,$\bar{x}$ 成为 $q(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx+b^{\mathrm{T}}x$ 的全局极小的必要条件是,矩阵 $Q+\bar{\mu}_1Q_1+\bar{\mu}_2Q_2$ 至少有一个负的特征值,而充分条件是 $Q+\bar{\mu}_1Q_1+\bar{\mu}_2Q_2$ 为半正定的;在文献[6]中作者又利用求非凸优化问题全局最优性条件的 L-次微分方法建立了带二次约束二次极小化问题的全局优化拉格朗日乘子条件。

本文主要研究一类特殊的带二次等式约束的非凸二次规划问题(QP)

$$\begin{aligned}\min\quad & x^{\mathrm{T}}Ax\\ \text{s.t.}\quad & x^{\mathrm{T}}Bx-\beta=0\\ & x^{\mathrm{T}}Cx-\gamma=0\end{aligned}$$

其中 A,B,C 都是 n 阶实对称矩阵。当 A 是正定矩阵时,此问题已在文献[7]中有所研究,文献[1]假定 A 是半正定矩阵的情形下研究了(QP)的全局最优性条件,文献[8]又在下列假设下考虑了此问题的全局最优性条件,i)A 没有限制;ii)B 是正定的,C 是半正定的;iii)$\beta=\gamma=1$。本文将利用求非凸优化全局最优性条件的 L-次微分方法,根据文献[6]给出的非凸优化问题的全局优化条件和拉格朗日乘子之间的关系,建立带二次等式约束非凸二次规划问题的全局最优性充分条件。不失一般性,总假定可行域非空、约束条件是正则的且 $\beta^2+\gamma^2\neq 0$。

1 L-次微分和全局最优化

以下将用到符号:$\mathbb{R}^n$ 是 n 维欧式空间,用 S_n 来表示所有实对称矩阵而成的集合;$A\succeq 0$ 表示 A 是半正定矩阵;用 $diag(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 表示主对角线上

* 收稿日期:2008-04-14 修回日期:2008-05-28
作者简介:王杉林(1969-),男,讲师,硕士,研究方向为组合最优化、全局优化。

为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,其余元素都为零的对角矩阵。

定义1 (L-次微分)设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$,$L=\{l\mid l:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}\}$,$l\in L$,如果

$$f(x)\geqslant f(x_0)+l(x)-l(x_0),\forall x\in\mathbf{R}^n$$

则称 l 是 f 在 x_0 处的L-次梯度,f 在 x_0 处的所有L-次梯度的集合称为 f 在 x_0 处的L-次微分,记作 $\partial_L f(x_0)$。

注意在上面定义中若 L 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的线性函数的集合,那么对于定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的实值凸函数 f,有 $\partial_L f(x)=\partial f(x)$,其中 $\partial f(x)$ 是凸分析意义下的次微分。

考虑最优化问题(P)

$$\min\{f(x)\mid x\in S=\{x\in\mathbf{R}^n\mid g_i(x)\leqslant 0,i=1,\cdots,m\}\}$$

引理1[6] 设 L 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的实值函数集合,使得对任意 $l\in L$ 有 $-l\in L$。对于问题(P),设 $\bar{x}\in S$,如果 $f\in L$,存在 $\lambda\in\mathbf{R}^m_+$ 使得 $-f\in\partial_L(\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i)(\bar{x})$,且 $\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i(\bar{x})=0$,那么 $\bar{x}$ 是(P)的一个全局极小解。

证明 若 $-f\in\partial_L(\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i)(\bar{x})$,由L-次微分定义可知

$$\left(\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i\right)(x)\geqslant\left(\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i\right)(\bar{x})-f(x)+f(\bar{x})$$

再由 $\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i(\bar{x})=0$ 可得,$f(x)\geqslant f(\bar{x})-\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i(x)$。根据条件 $\lambda_i\in\mathbf{R}_+$ $(i=1,\cdots,m)$,$g_i(x)\leqslant 0$,$i=1,\cdots,m$,于是得到 $f(x)\geqslant f(\bar{x})$。即 $\bar{x}$ 是(P)的一个全局极小解。 证毕

引理2 取

$$L=\{l:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}\mid l(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax+b^{\mathrm{T}}x,A\in S_n,b\in\mathbf{R}^n\}$$

设 $x_0\in S$,$f(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\bar{A}x+\bar{a}^{\mathrm{T}}x+\bar{c}$,$\bar{A}\in S_n$,$\bar{a}\in\mathbf{R}^n$,$\bar{c}\in\mathbf{R}$。则 $\partial_L f(x_0)=\{\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax+b^{\mathrm{T}}x\mid A=\bar{A}-B,b=\bar{a}+Bx_0,B\in S_n,B\succeq 0\}$

证明 设 $l\in L$,其中

$$l(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax+b^{\mathrm{T}}x$$

那么 $l\in\partial_L f(x_0)$ 当且仅当 $f(x)-f(\bar{x})\geqslant l(x)-l(x_0)$。设 $\varphi(x)\geqslant f(x)-l(x)$,则 $\varphi(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(\bar{A}-A)x+(\bar{a}-b)^{\mathrm{T}}x+\bar{c}$,由条件,对于每个 $x\in\mathbf{R}^n$ 都有 $\varphi(x)\geqslant\varphi(x_0)$,可知 $\bar{A}-A\succeq 0$。再有 $\varphi(x)$ 在 x_0 处取得极小值的充要条件是 $\nabla\varphi(\bar{x})=0$,于是 $b=\bar{a}+(\bar{A}-A)x_0$。取 $B=\bar{A}-A$,可以看出 $l\in\partial_L f(x_0)$ 当且仅当 $B\in S_n$,$B\succeq 0$,$b=\bar{a}+(\bar{A}-A)x_0A=\bar{A}-B$。 证毕

2 带两个二次等式约束二次规划问题的全局最优性条件

取 $L=\{l:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}\mid l(x)=x^{\mathrm{T}}Qx,Q\in S_n\}$,下面计算出二次函数 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 的L-次微分 $\partial_L f(x)$ 有如下结果。

定理1 设 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$,$\bar{x}=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$,那么 $\partial_L f(\bar{x})=\{x^{\mathrm{T}}Qx\mid A-Q\succeq 0,(A-Q)\bar{x}=0\}$。

证明 若 $l\in\partial_L f(\bar{x})$ 当且仅当

$$f(x)\geqslant f(\bar{x})+l(x)-l(\bar{x}),\forall x\in\mathbf{R}^n$$

设 $l(x)=x^{\mathrm{T}}Qx$,$\varphi(x)=f(x)-l(x)$,那么 $\varphi(x)=x^{\mathrm{T}}(A-Q)x\geqslant\bar{x}^{\mathrm{T}}(A-Q)\bar{x}=\varphi(\bar{x})$,$\forall x\in\mathbf{R}^n$。因此 φ 在 $\bar{x}$ 取得极小值,又由于 φ 是二次函数,于是 $A-Q\succeq 0$。故 φ 在 $\mathbf{R}^n$ 上是凸函数,若 φ 在 $\bar{x}$ 取得极小值当且仅当 $\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}}=0$,所以有 $(A-Q)\bar{x}=0$。 证毕

定理2 设

$$g_1(x)=x^{\mathrm{T}}Bx-\beta,g_2(x)=x^{\mathrm{T}}Cx-\gamma,\bar{x}\in S$$

其中 $S=\{x\in\mathbf{R}^n\mid g_1(x)=0,g_2(x)=0\}$,假定存在 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}_+$,使得 $\lambda_1 g_1(\bar{x})+\lambda_2 g_2(\bar{x})=0$ 且 $0\in\partial_L f(\bar{x})+\partial_L(\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2)(\bar{x})$,那么 $\bar{x}$ 是(QP)的一个全局最优解。

证明 若存在 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}_+$,$l\in L$,满足 $-l\in\partial_L f(\bar{x})$,$l\in\partial_L(\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2)(\bar{x})$。根据L-次微分的定义,对于每个 $x\in\mathbf{R}^n$,有

$$f(x)\geqslant f(\bar{x})-l(x)+l(\bar{x})=f(\bar{x})-(l(x)-l(\bar{x}))\geqslant$$
$$f(\bar{x})-(\lambda_1 g_1(x)+\lambda_2 g_2(x)-\lambda_1 g_1(\bar{x})-\lambda_2 g_2(\bar{x})=0)=f(\bar{x})$$

因此对于每个 $x\in S$,$f(x)\geqslant f(\bar{x})$,于是 $\bar{x}$ 是(QP)的一个全局最优解。 证毕

定理3 设 $\bar{x}\in S$,若存在 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}_+$,满足

$$\lambda_1 B+\lambda_2 C+A\geqslant 0$$

那么 $\bar{x}$ 是(QP)的一个全局最优解。

证明 利用条件和引理1,取 $Q=-A$,于是

$$\partial_L(\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2)(\bar{x})=$$
$$\{\bar{x}^{\mathrm{T}}(-A)\bar{x}\mid\lambda_1 B+\lambda_2 C+A\succeq 0,(\lambda_1 B+\lambda_2 C+A)\bar{x}=0\}$$

那么 $-f\in\partial_L(\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2)(\bar{x})$,故 $\bar{x}$ 是(QP)的一个全局最优解。 证毕

参考文献：

[1] HORST R，PARDALOS P M，THOAI N V. 全局优化引论[M]. 黄红选译. 北京：清华大学出版社，2003.

[2] 吴至友，白富生. 一种新的求全局优化最优性条件的方法[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2006，23：1-5.

[3] 王丽. 一类非光滑广义凸多目标规划的最优性条件[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2005，30(1)：41-46.

[4] MORE J J. Generalizations of the Trust Region Problem[J]. Optimization Methods and Software，1993(2)：189-209.

[5] PENG J M，YUAN Y X. Optimality Condtions for The Minimization of A Quadratic with Two Quadrtic Constraints[J]. OPTIAI，1997(3)：579-594.

[6] JEYAKUMAR V，RUBINOV A M，WU Z Y. Non-convex Quadratic Minimization Problems with Quadratic Constraints：Global Optimality Conditions[J]. Math Program，2007，110(3)：521-541.

[7] BAR-ON J R，GRASSE K A. Global Optimization of a Quadratic Functional with Quadratic Equality Constraints[J]. Journal of Optimization Theory and Applications，1994，82(2)：379-386.

[8] BAR-ON J R，GRASSE K A. Global Optimization of a Quadratic Functional with Quadratic Equality Constraints[J]. Journal of Optimization Theory and Applications，1997，93(3)：547-556.

Global Optimality Conditions of Non-convex Quadratic Problem with Quadratic Equality Constraints

WANG Shan-lin

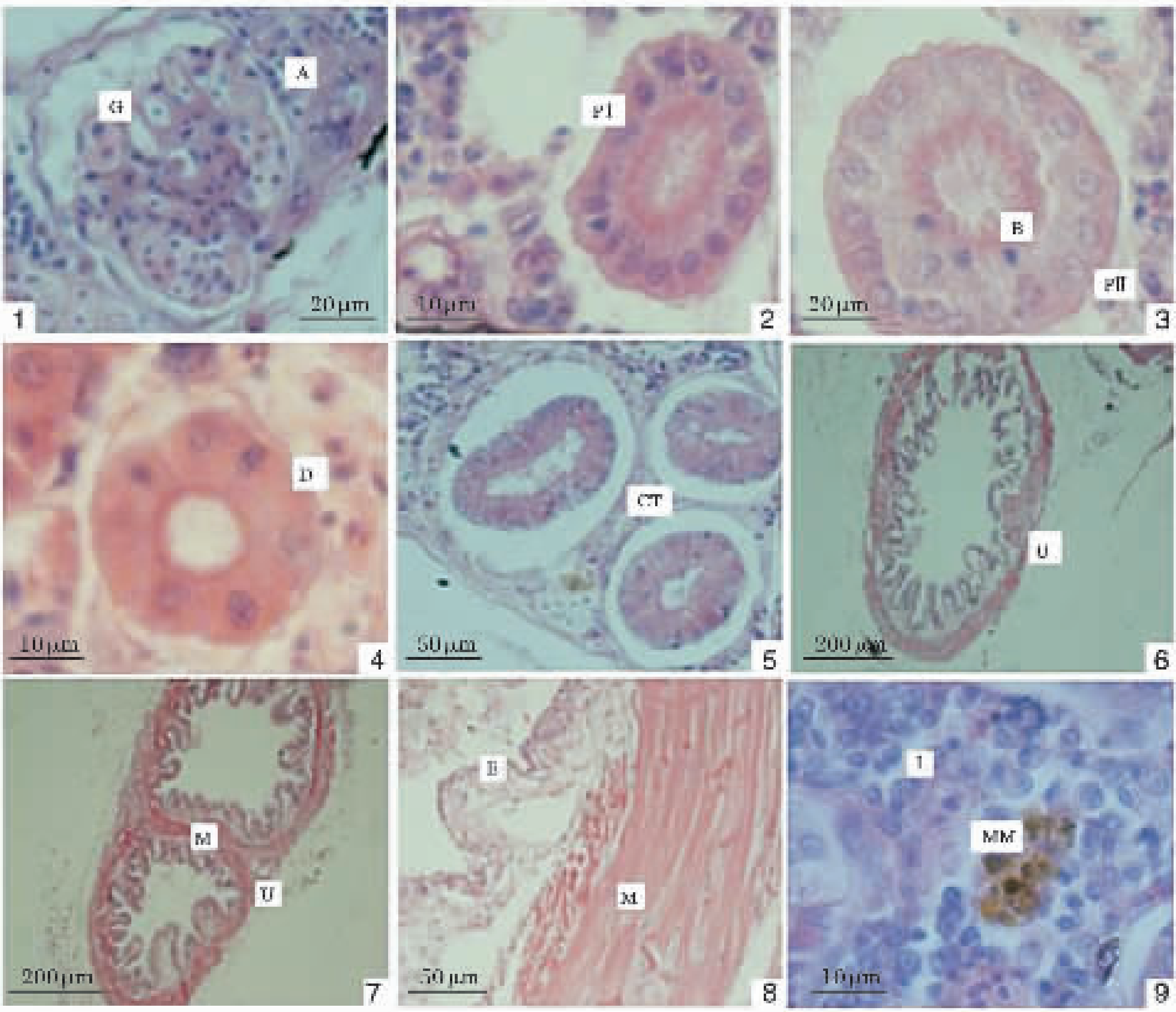
(College of Longqiao，Lanzhou University of Finance and Economics，Lanzhou 730101，China)

Abstract：In this paper，a class of constrained optimization problem with quadratic objective function and equality constraints is studied. We present a new approach which makes use of a global subdifferential—L-subdifferential(unlike convex subdifferential，an L-subdifferential is defined by functions which are not necessarity linear functions). It gives explicit descriptions to quadratic functions. Established is a sufficient condition which ensures that a feasible point is a global minimzer of a non-convex quadratic minimization problem subject to quadratic equality constraints.

Key words：non-convex quadratic programming；quadrtic equality constraints；L-subdifferential；global optimality conditions

(责任编辑 黄 颖)

（接正文8页）



图版I 西藏墨头鱼泌尿系统结构

PlateI Structure of the Urinary System of *Garrakempi hora*

1. 肾小体，示肾小囊、肾小球(G)和血管极(A)；2. 第一近端小管(PI)；3. 第二近端小管(PII)；4. 远端小管(D)；5. 集合管(CT)；6. 输尿管(U)；7. 合并的输尿管；8. 膀胱壁；9. 淋巴组织，示黑色素巨噬细胞(MM)

A. 血管极；G. 肾小球；PI. 第一近端小管；PII. 第二近端小管；B. 刷状缘；D. 远端小管；CT. 集合管；U. 输尿管；E. 上皮组织；M. 肌肉层；L. 淋巴组织；MM. 黑色素巨噬细胞

1. Renal corpuscle, showing glomerulus(G), afferent arteriole(A); 2. Primary proximal segment(PI); 3. Second proximal segment(PII); 4. Distal segment(D); 5. Collecting segment(CT); 6. Ureter(U); 7. Combining ureter; 8. Urinary bladder; 9. Lymphoid tissue, showing melano-macrophage (MM)

A: afferent arteriole; G: glomerulus; PI: Primary proximal segment; PII: Second proximal segment; B: brush border; D: Distal segment; CT: Collecting segment; U: Ureter; E: epithelium; M: muscular layer; L: Lymphoid tissue; MM: melano-macrophage