两类非线性发展方程组解的爆破和熄灭*

王 凡 彬[1,2]

(1. 四川省高等学校数值仿真重点实验室;2. 内江师范学院 数学与信息科学学院, 四川 内江 641112)

摘　要:考虑一类非线性双曲抛物耦合方程组和一类非线性反应扩散方程组具有三类边界条件的初边值问题,讨论它们解的爆破与熄灭。首先在区域 Ω 上建立一个含参数 t 的积分,得到一个以 t 为变量的函数,然后用凸分析的方法对该函数进行分析。在分析过程中利用了自共轭椭圆算子的特征函数,Grenn 第一、第二公式,Jensen 不等式,Hölder 不等式等方法。证明了当非线性项、初值函数满足一定的条件,方程组的解必在有限时间内爆破或熄灭,给出了其解爆破或熄灭的充分条件。给出的充分条件比较简洁,较之繁冗的充分条件,更易于实际应用。

关键词:非线性发展方程组;初边值问题;解;爆破;熄灭

中图分类号:O175.29;O175.9　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2008)04-0033-04

考察一类非线性双曲抛物耦合方程组的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=f(u_t,v),(x,t)\in\Omega\times(0,T) \\ v_t-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)=g(u_t,v),(x,t)\in\Omega\times(0,T) \\ u(x,0)=u_0(x),u_t(x,0)=u_1(x),v(x,0)=v_0(x),x\in\Omega \\ \left(\frac{\partial u}{\partial\gamma}+\sigma(x)u\right)\Big|_{\partial\Omega}=0,\left(\frac{\partial v}{\partial\gamma}+\sigma(x)v\right)\Big|_{\partial\Omega}=0,t\in(0,T) \end{cases} \tag{1}$$

和一类非线性反应扩散方程组的初边值问题

$$\begin{cases} u_t-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=f(u,v),(x,t)\in\Omega\times(0,T) \\ v_t-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)=g(u,v),(x,t)\in\Omega\times(0,T) \\ u(x,0)=u_0(x),v(x,0)=v_0(x),x\in\Omega \\ \left(\frac{\partial u}{\partial\gamma}+\sigma(x)u\right)\Big|_{\partial\Omega}=0,\left(\frac{\partial v}{\partial\gamma}+\sigma(x)v\right)\Big|_{\partial\Omega}=0,t\in(0,T) \end{cases} \tag{2}$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$,$\Omega$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中具光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界域;$\frac{\partial u}{\partial\gamma}$,$\frac{\partial v}{\partial\gamma}$ 分别是 u,v 在 $\partial\Omega$ 上关于矩阵 $(a_{ij}(x))$ 的余法向导数,即 $\frac{\partial u}{\partial\gamma}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(n,x_i)$,$\frac{\partial v}{\partial\gamma}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}\cos(n,x_i)$,$n=(n_1,n_2,\cdots,n_n)$ 是 $\partial\Omega$ 上单位外法矢;$a_{ij}(x)$ 充分光滑,矩阵 $(a_{ij}(x))$ 对称、正定;$\sigma(x)\geqslant 0$,即相应的边界条件为第一、二、三类边界条件;f,g 是关于 u,u_1,v 的非线性函数,$u_0(x)$,$u_1(x)$,$v_0(x)$ 适当光滑。

关于非线性发展方程解的爆破和熄灭,已有较多文献讨论[1-3]。但关于非线性发展方程组解的爆破和熄灭的讨论,并不多见[4-7]。本文利用特征函数法,在三类边界条件下讨论了问题(1)、(2) 解的爆破和熄灭,同时也补充和完善了相关文献的结果。

---

* 收稿日期:2007-11-12
资助项目:四川省教育厅重点科研项目(No. 2004A173)
作者简介:王凡彬(1957-),男,教授,研究方向为偏微分方程。

以下为方便起见,记 $L=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j})$;$\mathrm{d}s$ 表示 $\partial\Omega$ 上的面积元素;$|\Omega|=\int_\Omega \mathrm{d}s$。

1 引理

引理1 特征值问题

$$\begin{cases}L\varphi+\lambda\varphi=0, x\in\Omega\\ \left.(\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}+\sigma\varphi)\right|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{3}$$

的第一特征值 $\lambda\geqslant 0$,相应地有特征函数 $\varphi(x)>0$,且 $\int_\Omega\varphi(x)\mathrm{d}x=1$。

引理2 (Jensen 不等式)设 $g(u):u\in[\alpha,\beta]\mapsto\mathbf{R}$ 为凸函数,$f:t\in[a,b]\mapsto[\alpha,\beta]$,$P(t)$ 为连续函数,$P(t)\geqslant 0$,$P(t)$ 不恒等于零,则积分不等式 $g\left[\frac{\int_a^b f(t)P(t)\mathrm{d}t}{\int_a^b P(t)\mathrm{d}t}\right]\leqslant\frac{\int_a^b g(f(t))P(t)\mathrm{d}t}{\int_a^b P(t)\mathrm{d}t}$ 成立。

2 主要结果

定理1 如果问题(1)满足条件

ⅰ) $f+g\geqslant\lambda(u+v)+c|u_t+v|^p$,其中 $c>0$,$p>1$ 为常数

ⅱ) $\int_\Omega\varphi(x)(u_1(x)+v_0(x))\mathrm{d}x>0$

则其解 $u(x,t)$,$v(x,t)$ 必在有限时间内爆破或熄灭。

证明 设 $I(t)=\int_\Omega\varphi[u_t(x,t)+v(x,t)]\mathrm{d}x$,则

$$I'(t)=\int_\Omega\varphi(u_{tt}+v_t)\mathrm{d}x=\int_\Omega\varphi(Lu+f+Lv+g)\mathrm{d}x=$$

$$\int_\Omega[(\varphi Lu-uL\varphi)+(\varphi Lv-vL\varphi)]\mathrm{d}x+\int_\Omega(\varphi f+uL\varphi+\varphi g+vL\varphi)\mathrm{d}x\tag{4}$$

由 Green 第二公式[8] 及(1)、(3)式边界条件,知 $$\int_\Omega[(\varphi Lu-uL\varphi)+(\varphi Lv-vL\varphi)]\mathrm{d}x=0\tag{5}$$

又由引理1,知 $$\int_\Omega(\varphi f+uL\varphi+\varphi g+vL\varphi)\mathrm{d}x=\int_\Omega\varphi[f+g-\lambda(u+v)]\mathrm{d}x\tag{6}$$

把(5)、(6)式代入(4)式,得 $$I'(t)=\int_\Omega\varphi[(f+g-\lambda(u+v))]\mathrm{d}x$$

由条件 ⅰ),有 $$I'(t)\geqslant c\int_\Omega\varphi|u_i+v|^p\mathrm{d}x$$

再由 Jensen 不等式,得 $$I'(t)\geqslant c\left|\int_\Omega\varphi(u_i+v)\mathrm{d}x\right|^p=c|I(t)|^p\tag{7}$$

又据条件 ⅱ)知 $$I(0)=\int_\Omega\varphi(x)[u_1(x)+v_0(x)]\mathrm{d}x>0\tag{8}$$

由(7)、(8)式知在 $[0,T]$ 上,有 $I(t)>0$,从而由(7)式得 $$\frac{\mathrm{d}I(t)}{cI^p(t)}\geqslant\mathrm{d}t\tag{9}$$

(9)式两端在 $[0,t]$ 上积分,得 $$t\leqslant\int_0^t\frac{\mathrm{d}I(t)}{cI^p(t)}\overset{I(t)=j}{=}\int_{I(0)}^{I(t)}\frac{\mathrm{d}j}{cj^p}\tag{10}$$

注意 $P>1$,由(10)式得 $T\leqslant\int_{I(0)}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}j}{cj^p}=\frac{1}{c(p-1)I^{p-1}(0)}<+\infty$,即问题(1)的解在有限时间内爆破或熄灭。

证毕

定理2 如果问题(2)满足条件

ⅲ) $f+g\geqslant\lambda(u+v)+c|u+v|^p$,其中 $c>0$,$p>1$ 为常数

ⅳ) $\int_\Omega \varphi(x)(u_0(x)+v_0(x))\mathrm{d}x>0$

则其解 $u(x,t)$,$v(x,t)$ 必在有限时间内爆破。

证明　设 $J(t)=\int_\Omega \varphi[u(x,t)+v(x,t)]\mathrm{d}x$,类似定理 1 的证明,可得

$$J'(t)=\int_\Omega \varphi[(f+g-\lambda(u+v))]\mathrm{d}x$$

由条件 ⅲ),有 $J'(t)\geqslant c\int_\Omega \varphi|u+v|^p\mathrm{d}x$,再由 Jensen 不等式,得

$$J'(t)\geqslant c\left|\int_\Omega \varphi(u+v)\mathrm{d}x\right|^p=c|J(t)|^p \tag{11}$$

由条件 ⅳ),知

$$J(0)=\int_\Omega \varphi(x)[u_0(x)+v_0(x)]\mathrm{d}x>0 \tag{12}$$

由(11)、(12)式,类似定理 1 的证明,可知 $T\leqslant \dfrac{1}{c(p-1)J^{p-1}(0)}<+\infty$,即问题(2)的解在有限时间内爆破。

证毕

在初值条件的另一种情形,有定理 3。

定理 3　如果问题(2)适合条件

ⅴ) $f+g=c|u+v|^{p-1}(u+v)$,$c\neq 0$,$p>1$ 为常数

ⅵ) $\int_\Omega[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial(u_0+v_0)}{\partial x_i}\frac{\partial(u_0+v_0)}{\partial x_j}-\frac{c}{p+1}|u_0+v_0|^{p+1}]\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\sigma(u_0+v_0)^2\mathrm{d}s<0$,在第一、二类边界条件时 $\sigma=0$

ⅶ) $u+v\neq 0$,$(x,t)\in\Omega\times[0,T)$

则其解必在有限时间内爆破。

证明　设 $E(t)=\int_\Omega[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial(u+v)}{\partial x_i}\frac{\partial(u+v)}{\partial x_j}-\frac{c}{p+1}|u+v|^{p+1}]\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\frac{1}{2}\sigma(u+v)^2\mathrm{d}s$

注意到条件 ⅶ),则

$$E'(t)=\int_\Omega[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial(u_t+v_t)}{\partial x_i}\frac{\partial(u+v)}{\partial x_j}-c|u+v|^{p-1}(u+v)(u_t+v_t)]\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\sigma(u+v)(u_t+v_t)\mathrm{d}s$$

由 Green 第一公式[8]及问题(2)边界条件,可知

$$\begin{aligned}E'(t)=&\int_{\partial\Omega}\frac{\partial(u+v)}{\partial\gamma}(u_t+v_t)\mathrm{d}s-\int_\Omega(u_t+v_t)L(u+v)\mathrm{d}x-\int_\Omega c|u+v|^{p-1}(u+v)(u_t+v_t)\mathrm{d}x+\\&\int_{\partial\Omega}\sigma(u+v)(u_t+v_t)\mathrm{d}s=-\int_\Omega(u_t+v_t)L(u+v)\mathrm{d}x-\int_\Omega c|u+v|^{p-1}(u+v)(u_t+v_t)]\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{13}$$

再由(2)式及条件 ⅴ),(13)式化为

$$E'(t)=-\int_\Omega(u_t+v_t)(u_t+v_t-f-g+c|u+v|^{p-1}(u+v))\mathrm{d}x=-\int_\Omega(u_t+v_t)^2\mathrm{d}x\leqslant 0$$

又由条件 ⅶ)知 $E(0)<0$,从而 $E(t)\leqslant E(0)<0$。又设 $K(t)=\frac{1}{2}\int_\Omega(u+v)^2\mathrm{d}x$,则

$$K'(t)=\int_\Omega(u_t+v_t)(u+v)\mathrm{d}x=\int_\Omega[L(u+v)(u+v)+(f+g)(u+v)]\mathrm{d}x$$

由条件 ⅴ)及 Green 第一公式[8],得

$$\begin{aligned}K'(t)=&\int_{\partial\Omega}\frac{\partial(u+v)}{\partial\gamma}(u+v)\mathrm{d}s-\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial(u+v)}{\partial x_i}\frac{\partial(u+v)}{\partial x_j}\mathrm{d}x+c\int_\Omega|u+v|^{p+1}\mathrm{d}x=\\(-2)&\{\int_\Omega\left[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial(u+v)}{\partial x_i}\frac{\partial(u+v)}{\partial x_j}-\frac{c}{p+1}|u+v|^{p+1}\right]\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\sigma(u+v)^2\mathrm{d}s\}+\int_\Omega c\frac{p-1}{p+1}|u+v|^{p+1}\mathrm{d}x=\\&-2E(t)+\frac{c(p-1)}{p+1}\int_\Omega|u+v|^{p+1}\mathrm{d}x\geqslant\frac{c(p-1)}{p+1}\int_\Omega|u+v|^{p+1}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由 Hölder 不等式，知 $K'(t) \geqslant 2^{\frac{p+1}{2}} \dfrac{c(p-1)}{p+1} |\Omega|^{-\frac{p-1}{2}} \left| \dfrac{1}{2}\int_{\Omega}(u+v)^2 \mathrm{d}x \right|^{\frac{p+1}{2}} = b|K(t)|^{\frac{p+1}{2}}$，其中 $b = 2^{\frac{p+1}{2}} \dfrac{c(p-1)}{p+1} |\Omega|^{-\frac{p-1}{2}}$。根据条件 vii)，有 $K(0) = \dfrac{1}{2}\int_{\Omega}(u_0+v_0)^2 \mathrm{d}x > 0$，类似定理 1 的证明，即知 $T \leqslant \int_{K(0)}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}j}{bj^{\frac{p+1}{2}}} = \dfrac{1}{b(p-1)K^{\frac{p-1}{2}}(0)} < +\infty$，从而问题(2)的解必在有限时间内爆破。 证毕

参考文献：

[1] 王凡彬. 两类非线性发展方程解的爆破[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2008，25(1)：34-37.

[2] 陈勇明，杨晗. 一类非线性四阶波动方程解的爆破[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2004，29(4)：545-548.

[3] 戴中林. 一类高阶非线性微分方程的解法[J]. 西华师范大学学报(自然科学版)，2008，29(1)：76-79.

[4] 王凡彬. 一类双曲抛物耦合方程组的爆破现象[J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，1990，13(2)：49-53.

[5] 张健. 关于反应扩散组的高度不稳定性[J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，1990，13(2)：1-5.

[6] LI Ta-tsien，ZHOU Yi，KONG De-xing. Global Classical Solutions for General Quasilinear Hyperbolic Systems with Decay Initial Data[J]. Nonlinear Analysis，Theory，Methods & Applications，1997，26(8)：1299-1332.

[7] GLASSEY R T. Finite-Time Blow-up for Solutions of Nonlinear Wave Equations[J]. Mathematische Zeitschrift，1981，177：323-340.

[8] 谷超豪，李大潜，陈恕行，等. 数学物理方程[M]. 北京：人民教育出版社，1979：99-108.

Blowing up and Dying out of the Solutions to Two Types of Nonlinear Systems of Evolution Equations

WANG Fan-bin[1,2]

(1. Key Laboratory of Numerical Simulation of Sichuan Province；

2. College of Mathematics and Information Science，Neijiang Normal University，Neijiang Sichuan 641112，China)

Abstract：This paper considers the initial boundary value problems with three types of boundary conditions for a class systems of nonlinear hyperbolic parabolic coupled equations and a class systems of nonlinear reaction-diffusion equations. It discusses how to blow up and die out of their solutions. At first，we establish an integral containing the parameter t in the region Ω，get a function that t is variable and then use convex analysis method for analysis of the function. In the analysis of reasoning，eigenfunction of elf-conjugate elliptic operator，Grenn formula，the second formula，Jensen inequality，Hölder inequality and other methods are used. There when the nonlinear term，the initial function meet certain conditions，equations solution blowing up and dying out in the limited time are proved，sufficient conditions of their solution to blow up and die out are given. The sufficient condition is relatively simple，compared with the multiplication of sufficient conditions，and is more easily practical application.

Key words：nonlinear systems of evolution equations；initial-boundary value problem；solution；blow up；die out

(责任编辑 黄 颖)