运筹学与控制论

误工排序问题的研究*

唐 国 春[1,2]
(1. 上海第二工业大学 管理工程研究所,上海 201209;2. 重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047)

摘要:误工排序问题是经典排序论中最基本和最重要的问题。40 年来国内外许多学者对其进行研究的兴趣有增无减,深刻的成果不断涌现。本文阐述 2006 年以来重庆师范大学运筹学与控制论专业的硕士研究生在研究误工排序问题上得到的成果及其意义。这些成果包括研究经典的和推广的误工问题,包括某些工件必须不误工,或者工件的就绪时间不相同、与交货期有一致性的,或者带权的误工排序问题,或者工件的加工时间与工件的权有反向一致性,或者多台平行机误工排序问题等等得到的成果。

关键词:排序;误工;算法;最优性
中图分类号:O223 文献标识码:A 文章编号:1672-6693(2009)02-0001-06

经典排序论中使误工工件的个数最少的单台机器排序问题称为误工排序问题,简称为误工问题[1],是排序论中最基本的问题之一,具有重要的理论意义和实用价值。1968 年 Moore 提出解决这个问题的多项式时间算法[2],可以在时间 $O(n\log n)$ 内得到误工排序问题的最优解。之后,40 年来国内外许多学者对其进行研究的兴趣有增无减,深刻的成果不断涌现。《现代排序论》的附录 3"国内外排序文献目录"中收录在 2002 年 12 月之前发表的误工排序问题文献就有 71 篇[1]。国际上最新的成果是 2007 年 Huo、Leung 和 Zhao 等证明以误工工件个数最少为第 1 目标、使总完工时间最小的多重目标排序问题 $1\|(\sum C_j/\sum U_j)$ 或者使总延误最小的多重目标排序问题 $1\|(\sum T_j/\sum U_j)$ 都是 NP 困难的[3],解决了长期以来国内外排序论学术界十分关注的两个 open(悬而未决的)问题。本文阐述 2006 年以来重庆师范大学数学与计算机科学学院运筹学与控制论专业的硕士研究生在研究误工排序问题上得到的成果及其意义。本文的第 1 节分析经典误工排序问题及其最优解的性质,第 2 节涉及推广的误工排序问题,第 3 节是结束语,介绍前面两节研究的意义和进一步研究的方向。

1 经典误工排序问题

1.1 Moore-Hodgson 算法

用排序论的语言,误工排序问题可以这样表述。设有 n 个工件 $J_1,J_2,\cdots,J_n$ 要在一台机器上加工。记这 n 个工件的集合为 $J=\{J_1,J_2,\cdots,J_n\}$。在不至于混淆的情况下,也用工件 J_j 的下标 j 来表示这个工件。因此,这 n 个工件的集合也可以写成 $J=\{1,2,\cdots,n\}$。已知工件 j 的加工时间是 p_j,交货期是 d_j。这些工件已经全部准备就绪,都可以进行加工。这台机器每次只能加工一个工件,并且加工不允许中断,只有当一个工件加工完成后才能加工其他工件。如果一个工件在交货期之后完工,这个工件称为是误工的,否则称为是不误工的。如何安排一个加工次序,使得误工工件的个数最少,这就是误工排序问题,用三参数表示为 $1\|\sum U_j$[1]。对于使得误工工件的个数最少的加工次序,称为是误工排序问题的最优排序,或者称为最优解。这个最少的误工工件个数称为是误工问题的最优值。

不失一般性,假设工件已经按照交货期从小到大的次序,即 J 的 EDD(Earliest due date)序进行编号,所以有 $d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_n$。这时工件 j 的下标是这个工件在 J 的 EDD 序中的序号。

* 收稿日期:2009-03-20
资助项目:国家自然科学基金(No. 70731160015);运筹学与系统工程重庆市市级重点实验室(No. YC200802)
作者简介:唐国春,男,教授,博士生导师,中国运筹学会排序分会主任,研究方向为排序论。

误工排序问题有非常明确的结构。孙叶平、唐万梅、唐国春等[4] 证明下面4个引理。

引理1 误工问题的一个排序没有工件误工的充分必要条件是工件集合 J 的EDD序没有工件误工。

引理2 误工问题存在这样的最优解,其可以分为前后两部分:

1)不误工的工件的全体(非误工工件集)E 按EDD序排在前面;

2)误工工件集 L 以任意次序排在后面。

引理3 如果工件集合 $\{j_1,j_2,\cdots,j_t\}$ $(1\leqslant t\leqslant n)$ 中的工件是按EDD序排列,并且最后一个工件 j_t 是误工的,那么对于 J 的任何排序,在工件 $j_1,j_2,\cdots,j_t$ 中至少有一个工件是误工的。

引理4 如果工件 k 是 J 的EDD序中第1个误工工件,记工件 k 之前的所有工件(包括工件 k)中加工时间最长的工件为 r,把工件 r 作为误工工件排在最后得到的排序记为 S',那么在工件集合 $\{1,2,\cdots,k\}$ 中只有工件 r 是在 S' 中误工的工件。

根据上述性质,引入下面的定义。

定义1 引理2形式的最优解称为是误工排序问题的E-L最优解。

采用引理2和引理4类似的证明,可以得到形式上更"一般"的引理2′和引理4′。

引理2′ 对于误工问题的任何一个最优解,都可以找到与其有相同误工工件的E-L最优解。

引理4′ 如果工件集合 $\{j_1,j_2,\cdots,j_t\}$ $(1\leqslant t\leqslant n)$ 中的工件是按EDD序排列,工件 j_t 是这个EDD序中第1个误工工件,记工件 j_t 之前的所有工件(包括工件 j_t)中加工时间最长的工件为 r',把工件 r' 作为误工工件排在最后得到的排序记为 S',那么在工件集合 $\{j_1,j_2,\cdots,j_t\}$ 中只有工件 r' 是在 S' 中误工的工件。

根据引理3,对于误工问题的任何最优解和 J 的EDD序中第1个误工工件 k,工件集合 $\{1,2,\cdots,k\}$ 中至少有一个工件在这个最优解中是误工的。因而,把引理4中加工时间最长的工件为 r 作为误工工件放在最后,可以使得其他工件向前移动最多,从而使得这些工件不容易误工。正是基于这个想法,1968年Moore提出得到误工问题最优解的算法[2]。这个算法经过Hodgson的修改,称为Moore-Hodgson算法,可以在时间 $O(n\log n)$ 内得到误工问题的最优解。Moore-Hodgson算法可以写成如下形式。

步骤1 置 $i=0$,把 J 中的工件按EDD序放进集合 E_i,置 L_i 为空集;

步骤2 如果在 E_i 中没有工件或者没有误工工件,那么算法终止,把 E_i(E_i 中没有工件时,E_i 为空集)中的工件放在 L_i 中的工件前面得到的排序 (E_i,L_i) 是误工问题的最优解;否则,记 E_i 中第1个误工工件为 k_{i+1};

步骤3 在 E_i 中确定排在工件 k_{i+1} 之前的所有工件(包括工件 k_{i+1})中加工时间最长的工件,记为 r_{i+1}。置 $E_{i+1}=E_i\setminus\{r_{i+1}\}$,$L_{i+1}=L_i\cup\{r_{i+1}\}$,$i=i+1$,转步骤2。

1.2 Moore-Hodgson算法的最优性

虽然经过Hodgson的修改,但是Moore-Hodgson算法最优性的证明仍然非常冗长和繁琐。许多文献对于这个算法最优性给出不同的证明[4-7]。下面的定理1是最为简洁的证明,是补充文献[4]中的证明。

定理1 Moore-Hodgson算法得到的排序是误工排序问题 $1\parallel\sum U_j$ 的最优解。

证明 设误工问题的最优解有 m 个误工工件。当 $m=0$ 时,误工问题的最优排序中没有误工工件,由引理1知 J 的EDD序中也没有误工工件。此时由Moore-Hodgson算法(下面简称为算法)得到的排序就是 J 的EDD序,因此算法得到的排序是最优解。下面证明 $m\geqslant 1$ 的情况。这时实施算法,当 $i\leqslant m-1$ 时,E_i 中一定有误工的工件。如果 E_i 中没有误工工件,那表明算法得到的排序中误工工件的个数少于 m 个,这与误工问题最优解有 m 个误工工件相矛盾。因而,算法实施直到 $i=m-1$ 的步骤2都不会终止。在实施 $i=m-1$ 的步骤3后所得到的是 E_m 和 L_m,其中 E_m 中的工件是按照EDD排序,$L_m=\{r_1,r_2,\cdots,r_m\}$。根据引理2′,不妨假设误工问题的最优解是E-L最优解 $S^*=(E^*,L^*)$,其中 E^* 中的工件按照EDD序排列,L^* 为 m 个误工工件的集合 $\{q_1,q_2,\cdots,q_m\}$,以任意次序排在 E^* 后面。下面证明 E_m 中没有误工工件,这也就证明算法得到的排序是最优解。

实际上,可以证明在适当调整 $L^*=\{q_1,q_2,\cdots,q_m\}$ 中 m 个工件的序号后有

$$q_i\neq r_1,r_2,\cdots,r_{i-1}\tag{1}$$

和

$$q_i\in\{1,2,\cdots,k_i\}\setminus\{r_1,r_2,\cdots,r_{i-1}\}\tag{2}$$

其中 r_0 是虚工件。因而，由 r_i 的定义知，误工工件 q_i（$1 \leqslant i \leqslant m$）还满足

$$p_{q_i} \leqslant p_{r_i} \tag{3}$$

并且，由(2)式知

$$q_i \leqslant k_i \tag{4}$$

用数学归纳法来证明。对于 $i = 1$ 的情况，k_1 是 $E_0 = \{1,2,\cdots,k_1\}$ 中第 1 个误工工件。算法是把工件集合 $\{1,2,\cdots,k_1\}$ 中加工时间最长的工件 r_1 放进集合 L_0，得到排序 (E_1, L_1)。由引理 4 知，集合 $\{1,2,\cdots,k_1\} \setminus \{r_1\}$ 中的工件在排序 (E_1, L_1) 中不会再有误工工件。如果 $r_1 \in L^*$，记 $q_1 = r_1$，那么 $q_1 \in \{1,2,\cdots,k_1\}$ 如果 $r_1 \notin L^*$，那么由引理 3 知，在 $\{1,2,\cdots,k_1\}$ 中至少有一个工件在 S^* 中是误工的，也就是说至少有一个工件是在 L^* 中。把 $\{1,2,\cdots,k_1\}$ 中在 S^* 里误工的(任选)一个工件记为 q_1。从而，无论 $r_1 \in L^*$，还是 $r_1 \notin L^*$，在 L^* 中都有工件 $q_1 \in \{1,2,\cdots,k_1\}$。这表明(1)、(2)式对于 $i = 1$ 都成立。因而，(3)、(4)式对于 $i = 1$ 也都成立。

对于 $i = 2$ 的情况，k_2 是 $E_1 = \{1,2,\cdots,k_2\} \setminus \{r_1\}$ 中第 1 个误工工件。算法是把工件集合 $\{1,2,\cdots,k_2\} \setminus \{r_1\}$ 中加工时间最长的工件 r_2 放进集合 L_1，得到排序 (E_2, L_2)。由引理 4′ 知，集合 $\{1,2,\cdots,k_2\} \setminus \{r_1, r_2\}$ 中的工件在排序 (E_2, L_2) 中不会再有误工工件。分两种情况来讨论。

(ⅰ) 如果 $r_2 \in L^* \setminus \{q_1\}$，记 $q_2 = r_2$，由于 $r_2 \neq r_1$，所以 $q_2 \neq r_1$，因此 $q_2 = r_2 \in \{1,2,\cdots,k_2\} \setminus \{r_1\}$，这表明(1)、(2)式对于 $i = 2$ 都成立。

(ⅱ) 如果 $r_2 \notin L^* \setminus \{q_1\}$，由于 k_2 是 $\{1,2,\cdots,k_2\} \setminus \{r_1\}$ 中第 1 个误工工件，又 $i = 1$ 时(3)式有 $p_{q_1} \leqslant p_{r_1}$，所以工件 k_2 也是 $\{1,2,\cdots,k_2\} \setminus \{q_1\}$ 中的误工工件。由引理 3 知，在 $\{1,2,\cdots,k_2\} \setminus \{q_1\}$ 中至少有一个工件是在 $L^* \setminus \{q_1\}$ 中，把其中的一个工件记为 q_2。这时，$q_2 \in L^* \setminus \{q_1\}$，并且 $q_2 \in \{1,2,\cdots,k_2\} \setminus \{q_1\}$。因而 $q_2 \neq q_1$。如果 $r_1 \in L^*$，那么由第 1 次迭代知，$q_1 = r_1$，由于 $q_2 \neq q_1$，因而 $q_2 \neq r_1$ 如果 $r_1 \notin L^*$，由于 $q_2 \in L^* \setminus \{q_1\}$，所以也有 $q_2 \neq r_1$。这表明无论 $r_1 \in L^*$，还是 $r_1 \notin L^*$，(1)式对于 $i = 2$ 成立。由 $q_2 \neq r_1$ 和 $q_2 \in \{1,2,\cdots,k_2\} \setminus \{q_1\}$，所以 $q_2 \in \{1,2,\cdots,k_2\} \setminus \{r_1\}$。这表明(2)式对于 $i = 2$ 成立。因而，(3)、(4)式对于 $i = 2$ 也都成立。

假设(1)～(4)式对于 $1,2,\cdots,i-1$ 都成立，下面要证明这些式子对于 i 也成立。对于算法的第 i 次迭代，k_i 是 E_{i-1} 中第 1 个误工工件。算法是把工件集合 $\{1,2,\cdots,k_i\} \setminus \{r_1, r_2, \cdots, r_{i-1}\}$ 中加工时间最长的工件 r_i 放进集合 L_{i-1}，得到排序 (E_i, L_i)。由引理 4′ 知，集合 $\{1,2,\cdots,k_i\} \setminus \{r_1, r_2, \cdots, r_{i-1}, r_i\}$ 中的工件在排序 (E_i, L_i) 中不会再有误工工件。分两种情况来讨论。

(ⅰ) 如果 $r_i \in L^* \setminus \{q_1, q_2, \cdots, q_{i-1}\}$，记 $q_i = r_i$，由(1)式 $r_i \neq r_1, r_2, \cdots, r_{i-1}$，所以 $q_i \neq r_1, r_2, \cdots, r_{i-1}$，那么 $q_i = r_i \in \{1,2,\cdots,k_i\} \setminus \{r_1, r_2, \cdots, r_{i-1}\}$，这表明(1)、(2)式对于 i 都成立。

(ⅱ) 如果 $r_i \notin L^* \setminus \{q_1, q_2, \cdots, q_{i-1}\}$，由于 k_i 是 $\{1,2,\cdots,k_i\} \setminus \{r_1, r_2, \cdots, r_{i-1}\}$ 中第 1 个误工工件，又对于 $1,2,\cdots,i-1$ 成立(3)式，有 $p_{q_1} \leqslant p_{r_1}, p_{q_2} \leqslant p_{r_2}, \cdots, p_{q_{i-1}} \leqslant p_{r_{i-1}}$，所以工件 k_i 也是 $\{1,2,\cdots,k_i\} \setminus \{q_1, q_2, \cdots, q_{i-1}\}$ 中的误工工件。由引理 3 知，在 $\{1,2,\cdots,k_i\} \setminus \{q_1, q_2, \cdots, q_{i-1}\}$ 中至少有一个工件是在 $L^* \setminus \{q_1, q_2, \cdots, q_{i-1}\}$ 中，把其中的一个工件记为 q_i。这时，$q_i \in L^* \setminus \{q_1, q_2, \cdots, q_{i-1}\}$，并且 $q_i \in \{1,2,\cdots,k_i\} \setminus \{q_1, q_2, \cdots, q_{i-1}\}$。因而 $q_i \neq q_1, q_2, \cdots, q_{i-1}$。如果 $r_1 \in L^*$，那么 $q_1 = r_1$，由于 $q_i \neq q_1$，因而 $q_i \neq r_1$ 如果 $r_1 \notin L^*$，由于 $q_i \in L^* \setminus \{q_1, q_2, \cdots, q_{i-1}\}$，所以也有 $q_i \neq r_1$。如果 $r_2 \in L^* \setminus \{q_1\}$，那么 $q_2 = r_2 \neq r_1$，由于 $q_i \neq q_2$，所以 $q_i \neq r_2$ 如果 $r_2 \notin L^* \setminus \{q_1\}$，由于 $q_i \in L^* \setminus \{q_1, q_2, \cdots, q_{i-1}\}$，所以也有 $q_i \neq r_2$。类似可以证明 $q_i \neq r_{i-1}$，这表明(1)式对于 i 成立。由(1)式和 $q_i \in \{1,2,\cdots,k_i\} \setminus \{q_1, q_2, \cdots, q_{i-1}\}$，所以 $q_i \in \{1,2,\cdots,k_i\} \setminus \{r_1, r_2, \cdots, r_{i-1}\}$。这表明(2)式对于 i 成立。因而，(3)、(4)式对于 i 也都成立。从而证明了对于 $1 \leqslant i \leqslant m$，(1)～(4)式都成立。

工件集合 $J \setminus \{r_1, r_2, \cdots, r_m\} = (\{1,2,\cdots,k_m\} \setminus \{r_1, r_2, \cdots, r_m\}) \cup \{k_m + 1, \cdots, n\}$。由(4)式可知，工件集合 $J \setminus \{q_1, q_2, \cdots, q_m\} = (\{1,2,\cdots,k_m\} \setminus \{q_1, q_2, \cdots, q_m\}) \cup \{k_m + 1, \cdots, n\}$。上述两个工件集合的 EDD 序就是 E_m 和 E^*。因而，在 E_m 和 E^* 中都有工件 $k_m + 1$，并且工件 $k_m + 1$ 之后的工件也都相同。由引理 4′ 知，集合 $\{1,2,\cdots,k_m\} \setminus \{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$ 中的工件在排序 (E_m, L_m) 中都不误工，所以，在 E_m 中位于工件 $k_m + 1$ 之前的工件都不误工。对于 E_m 中的工件 $k_m + 1$ 及其之后的工件，由(3)式知，在排序 (E_m, L_m) 中的完工时间比在最优排序 $S^* = (E^*, L^*)$ 中的完工时间提前 $\sum_{i=1}^{m} (p_{r_i} - p_{q_i}) \geqslant 0$。

由于 E^* 中的工件都不误工,所以 E_m 中工件 k_m+1 及其之后的工件也都不误工。因此,E_m 中没有误工工件。从而,证明了算法的最优性。　证毕

由定理 1 的证明,直接可以得到下面的推论 1。

推论 1　如果 Moore-Hodgson 算法得到的最优排序中 m 个误工工件是 $r_i(1\leqslant i\leqslant m)$,是第 i 次迭代第 1 个误工工件是 k_i,那么对于误工问题的任何最优解的 m 个误工工件 $q_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 在适当调整序号后必须满足前面的(1) ~ (4) 式。

推论 1 是给出误工排序问题最优解的必要条件。彭洪洁、苏文玉、黄婉珍、唐国春等最近完成的论文"Optimal E-L Schedules for Single Machine Problems to Minimize the Number of Tardy Jobs",不但得到上述必要条件,而且还得到误工问题 E-L 最优解的充分必要条件。

1.3 Moore-Hodgson 算法的性质

Moore-Hodgson 算法得到的最优解有一个重要性质是下面的定理 2 所述。

定理 2　Moore-Hodgson 算法得到的最优解中不误工工件的总的加工时间是所有的最优解中最短的。

这是关于 Moore-Hodgson 算法得到的最优解很本质的性质,是 1995 年 Pinedo[6] 在证明 Moore-Hodgson 算法最优性时给出的。然而这个证明不够严格,许多关键的地方交待不清。陈小林、苏文玉、唐国春等[8] 完善 Pinedo 的证明,并且提出一个非常有意义的课题'推广的误工排序问题是否具有这个性质"。之后,进行了深入研究,部分回答了这个问题(见本文第 2.3 节)。

2 推广的误工排序问题

2.1 某些工件必须不误工

某些工件必须不误工的误工排序问题是经典误工问题最初步、也是最简单的推广,三参数表示为 $1\mid T\mid\sum U_j$,其中 T 表示那些必须不误工的工件的集合。1973 年 Sidney 提出这个误工问题的多项式时间算法[9]。彭洪洁、苏永英、唐国春等[10] 把 Sidney 提出的算法修改成比较简洁的形式,并给出简洁的证明。

2.2 工件的就绪时间不相同

工件的就绪时间不相同、与交货期有一致性的误工排序问题是经典误工问题最重要的推广,三参数表示为 $1\mid(r_i\leqslant r_j)\Rightarrow(d_i\leqslant d_j)\mid\sum U_j$。1978 年 Kise、Ibaraki 和 Mine 等提出算法(简称为 KIM 算法);"证明"用 KIM 算法可以得到最优解[11]。然而,2007 年李杉林、陈志龙、唐国春等用反例指出他们证明最优性时提出的引理 2 是错误的,并给出新的证明。李杉林等的论文已经送《Operations Research》审查。孙叶平和唐国春[12] 分析引理 2 的错误所在,给出修改后的引理 2′,由此似乎应该修改 KIM 算法,然而,孙叶平和唐国春[12] 证明 KIM 算法仍然可以得到最优解。这可能是对于 KIM 算法最优性证明最简单的改正。

苏永英、蒋宗彩、孙叶平等[13] 提出工件的就绪时间不同、与交货期有一致性,并且某些工件必须不误工的比较一般的误工排序问题 $1\mid T,(r_i\leqslant r_j)\Rightarrow(d_i\leqslant d_j)\mid\sum U_j$,提出最优算法,并且证明算法的最优性。这个算法是 KIM 算法的推广,他们的证明也就隐含原来 KIM 算法最优性改正后的证明。

2.3 带权的误工排序问题

带权的误工排序问题 $1\parallel\sum w_jU_j$ 是 NP 困难的。在普遍认为 $\mathrm{P}\neq\mathrm{NP}$ 的情况下,带权的误工排序问题不存在多项式时间算法。然而,这个问题存在计算量是 $O(nT)$ 的拟多项式时间的动态规划算法[14],其中 T 是与问题的加工时间和交货期有关的量。可用分支定界等方法研究这个问题[5,15-16]。

1976 年 Lawler 研究工件的加工时间与工件的权有反向一致性的误工排序问题,三参数表示为 $1\mid(p_i\leqslant p_j)\Rightarrow(w_i\geqslant w_j)\mid\sum w_jU_j$,并得到多项式时间算法[17]。苏文玉和唐国春[18] 提出工件的加工时间与工件的权有反向一致性,并且某些工件必须不误工的比较一般的误工排序问题 $1\mid T,(p_i\leqslant p_j)\Rightarrow(w_i\geqslant w_j)\mid\sum w_jU_j$,提出最优算法,把文献[11]中 j-优集的概念和方法,应用和推广到证明误工排序问题 $1\mid T,(p_i\leqslant p_j)\Rightarrow(w_i\geqslant w_j)\mid\sum w_jU_j$ 算法的最优性,证明算法得到的最优解中不误工工件的总的加工时间是所有的最

优解中最短的。作为特殊情况，这也就证明问题 $1 \mid T \mid \sum U_j$ 和 $1 \mid (p_i \leqslant p_j) \Rightarrow (w_i \geqslant w_j) \mid \sum w_j U_j$ 的相应的算法的最优解也有这个重要性质。但是，对于问题 $1 \mid (r_i \leqslant r_j) \Rightarrow (d_i \leqslant d_j) \mid \sum U_j$ 和问题 $1 \mid T, (r_i \leqslant r_j) \Rightarrow (d_i \leqslant d_j) \mid \sum U_j$ 是否有这个性质？这个问题还没有解决。陈小林[19] 采用 Pinedo 在证明 Moore-Hodgson 算法最优性的方法证明算法的最优性，从而也证明算法得到的最优解中不误工工件的总的加工时间是所有的最优解中最短的。

2.4 多重目标的误工排序问题

对排序问题的 2 个目标函数 γ_1 和 γ_2 来讲，如果是在第 1 个目标函数 γ_1 为最优的条件下，要使得第 2 个目标函数 γ_2 为最优，这样的问题称为多重目标排序问题，得到的解称为多重解（hierarchical solution）[20]，用三参数可以表示为 $1 \parallel (\gamma_2 / \gamma_1)$。早在 1956 年 Smith[21] 就研究过在没有工件误工的所谓完美的（perfect）排序中，寻找使总完工时间为最小的排序问题 $1 \parallel (\sum C_j / \sum U_j = 0)$，并提出搜索这种最优解的 Smith 法则。

对于第 1 目标函数和第 2 目标函数分别是最大延误 $T_{\max}$，总完工时间 $\sum C_j$，带权完工时间 $\sum w_j C_j$，总延误 $\sum T_j$，带权总延误 $\sum w_j T_j$，误工工件数 $\sum U_j$，带权误工工件数 $\sum w_j U_j$ 等 7 个量，可以提出 $P_7^2 = 42$ 个不同的多重目标排序问题[1]。对于其中迄今为止计算复杂性还不清楚的多重目标的误工排序问题 $1 \parallel (T_{\max} / \sum U_j)$，1983 年 J. G. Shanthikumar 在引入工件的优势集（dominance set）的基础上，从排序的前面向后面进行迭代，提出分支定界算法[22]。董柳毅、陈小林、唐国春等[23] 分析该问题最优解的一些性质，得到最优值的上下界，以 Moore-Hodgson 算法为基础，从排序的后面向前面进行迭代，提出新的分支定界算法。对于 2007 年 Huo、Leung 和 Zhao 等证明是 NP 困难的多重目标排序问题 $1 \parallel (\sum C_j / \sum U_j)$，董柳毅在硕士学位论文中给出一个较好的近似算法，还对算法编程进行计算。

2.5 其他误工排序问题

孙叶平的硕士学位论文还研究工件有先后约束的带权误工排序问题 $1 \mid prec \mid \sum w_j U_j$。

多台平行机误工排序问题是 NP 困难的。孙叶平的硕士学位论文在有关两台平行机误工排序问题 $P2 \parallel \sum U_j$ 性质的基础上[24]，给出 3 台平行机误工排序问题 $P3 \parallel \sum U_j$ 最优解的一些性质。关于多台平行机（包括 identical、uniform 和 unrelated parallel machines）和串行机（包括 flow shop、job shop 和 open shop）误工排序问题的研究还很少，成果也不多，是一个可以继续研究的方向。

3 结束语

经典排序论中有 11 个基本的排序问题[1]。误工排序问题是这 11 个基本排序问题中最为重要的问题。这与误工排序问题的计算复杂性和实际背景有关。安排加工次序，使得工件加工后都不误工，都能够在交货期当天或者交货期之前完工是安排生产最起码的要求。在工件都不误工的前提下，就会提出使得工件（总）的加工时间为最短等的其他要求。这就是 11 个基本排序问题中的（总）完工时间排序问题等。SPT（Shortest processing time）序是（总）完工时间排序问题的最优解，在时间 $O(n \log n)$ 内就能够得到这个最优解。即使考虑带权的情况，那么带权的（总）完工时间排序问题也是多项式可解的。如果工件加工后不可能全部不误工，那么希望误工工件的个数为最少，这是非常合理的要求。这就是经典的误工排序问题的生产实际背景。

虽然误工问题是多项式可解的，但是带权的误工问题却是 NP 困难的。如果工件加工后不可能全部不误工，那么进一步则要求误工工件的（总）延误时间为最短，这就是 11 个基本排序问题中的（总）延误排序问题。因此，如果说误工问题是对工件误工“定性”（只判别工件是否误工）的描述，那么延误问题就是“定量”（计算延误的时间）的描述。从这个意义上来理解，延误问题比误工问题要“难”。事实上，也确实如此，误工问题是多项式可解的，而延误问题是 NP 难题。在普遍认为 $P \neq NP$ 的情况下，NP 难题是不存在多项式时间算法的。因此，从计算复杂性的角度来讲，误工排序问题是“处于”（总）完工时间排序问题与（总）延误排序问题“之间”的问题。正是由于误工问题处于这个特殊的“地位”，处于 P 问题与 NP 难题的“边界”上，对于误

工问题的研究就非常有意义。这也就是误工问题有如此众多的‘推广”的原因所在。

迄今为止,与误工问题有关的两个的多重目标排序问题 $1\parallel(T_{\max}/\sum U_j)$ 和 $1\parallel(\sum U_j/T_{\max})$ 的计算复杂性仍然 open,虽然 2007 年 Huo、Leung 和 Zhao 等证明另外两个的多重目标排序问题 $1\parallel(\sum C_j/\sum U_j)$ 或者 $1\parallel(\sum T_j/\sum U_j)$ 都是 NP 困难的。这也正是国内外 40 年来对于误工问题的研究兴趣有增无减的原因所在。

本文阐述 2006 年以来重庆师范大学运筹学与控制论专业的硕士研究生在研究误工排序问题上得到的成果,本质上就是在研究误工排序问题最优解的结构。彭洪洁、苏文玉、黄婉珍、唐国春等最近完成的论文“Optimal E-L Schedules for Single Machine Problems to Minimize the Number of Tardy Jobs”在研究误工问题最优解的结构方面又有新的进展。希望能够为解决 $1\parallel(T_{\max}/\sum U_j)$ 和 $1\parallel(\sum U_j/T_{\max})$ 的计算复杂性做出努力。

参考文献:

[1] 唐国春,张峰,罗守成,等. 现代排序论[M]. 上海:上海科学普及出版社,2003.

[2] Moore J M. An n-job, one machine sequencing algorithm for minimizing the number of late jobs[J]. Management Science, 1968. 15:102-109.

[3] Huo Y, Leung J Y-T, Zhao H. Complexity of two dual criteria scheduling problems[J]. Operations Research Letters, 2007. 35(2):211-220.

[4] 孙叶平,唐万梅,唐国春. Moore-Hodgson 算法最优性的新证明[J]. 重庆师范大学学报,2007,24(3):4-7.

[5] 黄婉珍,唐国春. 分支定界法求解最小带权误工工件数排序[J]. 应用数学学报,1992,15(2):194-199.

[6] Pinedo M. Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems[M]. 2nd edition. New Jersey: Prentice Hall, 2002.

[7] Brucker P. Scheduling Algorithms[M]. 4th edition. Heidelberg: Springer, 2004.

[8] 陈小林,苏文玉,唐国春. Moore-Hodgson 算法的最优性[J]. 上海第二工业大学学报,2008,25(1):25-28.

[9] Sidney J B. An extension of Moore's due date algorithm[A]. Elmaghraby S E. Symposium on the Theory of Scheduling and its Applications[C]. Berlin: Springer, 1973. 393-398.

[10] 彭洪洁,苏永英,唐国春. 部分工件必须不误工的误工排序问题[J]. 重庆师范大学学报,2009,26(2):18-21.

[11] Kise H, Ibaraki T, Mine H. A solvable case of the one-machine scheduling problem with ready and due times[J]. Operations Research, 1978, 26:121-126.

[12] 孙叶平,唐国春. KIM 算法的最优性[J]. 运筹学学报,2007,11(4):116-120.

[13] 苏永英,蒋宗彩,孙叶平. 推广的误工排序问题的最优算法[J]. 上海第二工业大学学报,2008,25(4):286-290.

[14] Lawler E L, Moore J M. A functional equation and its application to resource allocation and sequencing problems[J]. Management Science, 1969, 16:77-84.

[15] 唐国春. A new branch and bound algorithm for minimizing the weighted number of tardy jobs[J]. Annals of Operations Research, 1990, 24:225-232.

[16] 唐国春. 带权误工工件数排序问题[J]. 上海第二工业大学学报,1990,7(1):10-15.

[17] Lawler E L. Sequencing to minimize the weighted number of tardy jobs[J]. Revue d'Automatiqued'Informatique et de Recherche Operationnelle, 1976, 5(S10):27-33.

[18] 苏文玉,唐国春. 不误工工件加工时间之和最小的最优解[J]. 上海第二工业大学学报,2009,26(1):12-16.

[19] 陈小林. 带权的误工排序问题的最优算法[J]. 运筹与管理,2009(3)(待出版).

[20] 李忠义, Vairaktarakis G L. Complexity of single machine hierarchical scheduling: A survey[A]. Pardalos P M. Complexity in Numerical Optimization[C]. New Jersey: World Scientific Publishing Company, 1993. 269-298.

[21] Smith W E. Various optimizers for single-stage production[J]. Naval Research Logistics, 1956(3):59-66.

[22] Shanthikumar J G. Scheduling n jobs on one machine to minimize the maximum tardiness with minimum number tardy[J]. Computers and Operations Research, 1983, 10(3):255-266.

[23] 董柳毅,陈小林,唐国春. 在误工工件个数最少的条件下使最大延误为最小的分支定界算法[J]. 上海第二工业大学学报[J]. 2008,25(4):286-290.
[24] 罗守成,唐国春. 平行机误工工件数最少排序问题[A]. 运筹与决策(第二卷)[C]. 成都:成都科技大学出版社,1992.

A Study of Scheduling Problems to Minimize the Number of Tardy Jobs

TANG Guo-chun[1,2]

(1. Institute of Management Engineering, Shanghai Second Polytechnic University, Shanghai 200041;
2. College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: The single machine scheduling problem to minimize the number of tardy jobs is one of the most basic and important scheduling problems in classical scheduling theory. An algorithm of Moore, which is sometimes known as the Moore-Hodgson algorithm, solves the problem in $O(n \log n)$ time. This algorithm repeatedly adds jobs in EDD order to the end of a partial schedule of on-time jobs. If the addition of job j results in this job completed after time d_j, then a job in the partial schedule with the largest processing time is removed and declared late. Discarding a job with the largest processing time increases the opportunity for subsequent jobs to be completed by their due dates. In the past 40 years, lots of researchers studied it with ever-increasing interests and their profound results appeared continually. For example, Sidney generalizes this algorithm to handle the case that a specified subset of jobs must be on time. He observes that jobs of the specified subset are not considered when discarding jobs, and that it may be necessary to discard more than one job to ensure that the last job in the current partial schedule is on time. Adaptations of Moore-Hodgson's algorithm to both problem $1 \mid (r_i \leqslant r_j) \Rightarrow (d_i \leqslant d_j) \mid \sum U_j$ and problem $1 \mid (p_i \leqslant p_j) \Rightarrow (w_i \geqslant w_j) \mid \sum w_j U_j$ for the cases of both agreeability of release dates with due dates, and reverse agreeability of processing times with weights are proposed by both Kise, Ibaraki and Mine, and Lawler, respectively. In this paper we review results and their significances on the problems obtained by master students in Chongqing Normal University, including classical ones and their generalizations.

Key words: scheduling; tardy jobs; algorithm; optimality

(责任编辑 黄 颖)