运筹学与控制论

关于 Lipschitz 严格伪压缩映象的带误差的 Ishikawa 型迭代程序*

龙宪军[1], 彭再云[2], 敖　军[3]

(1. 重庆工商大学 数学与统计学院, 重庆 400067;2. 重庆交通大学 理学院, 重庆 400074;
3. 重庆师范大学 数学与计算机科学学院, 重庆 400047)

摘要：设 K 是任意实 Banach 空间 X 中的闭凸子集, $T:K\to K$ 是 Lipschitz 严格伪压缩映象,在没有假设 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n<\infty$ 之下,本文证明了由 $x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nTy_n+u_n$ 与 $y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_nTx_n+v_n$, $\forall n\in\mathbf{N}$,生成的带误差的 Ishikawa 迭代序列强收敛到 T 的唯一不动点,并给出了更为一般的收敛率估计:若 $u_n=v_n=0$, $\forall n\in\mathbf{N}$,则有 $\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant(1-\gamma_n)\|x_n-x^*\|\leqslant\cdots\leqslant\prod_{j=0}^{n}(1-\gamma_j)\|x_0-x^*\|$,其中 $\{\gamma_n\}$ 是 $(0,1)$ 中的序列,满足 $\gamma_n\geqslant\frac{1}{1+k}\min(\varepsilon,\eta-\varepsilon)\alpha_n$。所得结果改进和推广了最新的一些结果。

关键词:任意实 *Banach* 空间;*Lipschitz* 严格伪压缩映象;带误差的 *Ishikawa* 迭代序列;收敛率估计;不动点
中图分类号:O177.91　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2009)02-0007-05

1 预备知识

本文假设 X 是一实 Banach 空间,其范数和对偶空间分别记成 $\|\cdot\|$ 和 X^*,记 X 与 X^* 之间的对偶对为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$,且记 X 的正规对偶映象为 $J(\cdot)$,即

$$J(x)=\{x^*\in X^*:\langle x,x^*\rangle=\|x\|^2=\|x^*\|^2\},\forall x\in X$$

X 中具有定义域 $D(T)$ 与值域 $R(T)$ 的算子 T 称为增生的,若对任意 $x,y\in D(T)$,存在 $j(x-y)\in J(x-y)$,使得 $\langle Tx-Ty,j(x-y)\rangle\geqslant0$。$T$ 称为强增生的,若对任意 $x,y\in D(T)$,存在 $j(x-y)\in J(x-y)$,使得 $\langle Tx-Ty,j(x-y)\rangle\geqslant k\|x-y\|^2$,对某个 $k>0$,其中,k 称为 T 的强增生常数。不失一般性,假设 $k\in(0,1)$。显然,如果 T 是强增生的,则 T 是增生的。增生算子是由 Browder[1] 和 Kato[2] 各自独立引入的。在增生算子理论中,一个归功于 Browder 的早期的基本结果是,若 T 是 X 上的局部 Lipschitz 增生算子,则初值问题 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Tu=0$, $u(0)=u_0$ 有解。

X 中具有定义域 $D(T)$ 与值域 $R(T)$ 的映象 T 称为严格伪压缩的,若存在 $t\in(1,\infty)$, $\forall x,y\in D(T)$ 及 $r>0$,使得
$$\|x-y\|\leqslant\|(1+r)(x-y)-rt(Tx-Ty)\|$$

在上述定义中,若 $t=1$,则 T 称为伪压缩的。有时严格伪压缩映象也称为强伪压缩映象。对严格伪压缩映象类,许多学者做了大量深入的研究工作[3-11]。熟知,T 是(严格)伪压缩映象当且仅当,$(I-T)$ 是(强)增生算子[1,3]。

本文假设正整数集为 $\mathbf{N}$。1997 年,Liu[8] 把 Tan 和 Xu[4] 的结果从 p 一致光滑 Banach 空间推广到任意 Banach 空间。2000 年,Sastry 和 Babu[9] 去掉了 Liu[8] 的定理 1 与定理 2 中 K 的有界性假设,并提供了收敛率估计。曾[10] 又把文献[8,9] 中的迭代程序由 Mann 迭代程序推广到了 Ishikawa 迭代程序,并提供了比文献[9] 更好的收敛率估计,其主要结果如下。

---

* 收稿日期:2008-10-13
资助项目:国家自然科学基金(No. 10671135)
作者简介:龙宪军,男,博士研究生,研究方向为最优化理论及应用。

定理1[10] 设K是任意实Banach空间X中的闭凸子集,$T:K\to K$是Lipschitz严格伪压缩映象,使得$Tx^*=x^*$,对某个$x^*\in X$。又设$\{\alpha_n\}$与$\{\beta_n\}$是$[0,1]$中的实序列,满足下列条件

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$且$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n<\infty$;

2) $0<\alpha_n\leqslant\dfrac{k-\eta}{(L+1)(L+2-k)+(L-1)k}$,$\forall n\in\mathbf{N}$,对某个$\eta\in(0,k)$;

3) $0\leqslant\beta_n<\min\left(\dfrac{k}{L(L+2-k)},\dfrac{\eta}{L(L+1)}\right)$,$\forall n\in\mathbf{N}$。

其中,$k\in(0,1)$和$L(\geqslant 1)$分别是$I-T$的强增生常数与T的Lipschitz常数,则对任意$x_0\in X$,由下式生成的Ishikawa迭代序列$\{x_n\}$

$$x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nTy_n;\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_nTx_n,\ \forall n\in\mathbf{N}$$

强收敛到T的唯一不动点x^*,而且存在$(0,1)$中的序列$\{\gamma_n\}$满足$\gamma_n\geqslant\dfrac{\eta-L(L+1)\beta_n}{1+k}\alpha_n$,使得对一切$n\in\mathbf{N}$,有$\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant\prod_{j=0}^{n}(1-\gamma_j)\|x_0-x^*\|$。

就定理1中的Ishikawa迭代程序而言,并未考虑误差的影响,而在不动点逼近理论中,误差项是一个不容忽视的因素。本文受文献[11-12]的启发,对Banach空间中Lipschitz严格伪压缩映象引入具有误差Ishikawa迭代序列,然后,在对参数α_n,β_n更为宽松的限制条件下研究此迭代序列的收敛性。

如下引理在证明本文的主要结果中将发挥重要作用。

引理1[13] 设$\{\rho_n\}$,$\{\sigma_n\}$,$\{\theta_n\}$与$\{t_n\}$是非负实数列,满足下列条件1) $t_n\in[0,1]$,且$\sum_{n=0}^{\infty}t_n=\infty$;2) $\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n<\infty$,且$\sum_{n=0}^{\infty}\theta_n<\infty$。若$\rho_{n+1}\leqslant(1-t_n)\rho_n+\sigma_n\rho_n+\theta_n$,$\forall n\geqslant 0$,则$\lim_{n\to\infty}\rho_n=0$。

2 主要结果

定理2 设K是任意实Banach空间X中的闭凸子集,$T:K\to K$是Lipschitz严格伪压缩映象,使得$Tx^*=x^*$,对某个$x^*\in X$。又设$\{u_n\}$与$\{v_n\}$是X中的序列,$\{\alpha_n\}$与$\{\beta_n\}$是$[0,1]$中的实序列,且满足下列条件

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\|<\infty$,且$\|v_n\|\to 0(n\to\infty)$;

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$,且$0<\alpha_n\leqslant\dfrac{\max(\varepsilon,\eta-\varepsilon)}{(L+1)(L+2-k)}$,对某个$\eta\in(0,k)$,$\varepsilon\in(0,\eta)$;

3) $0\leqslant\beta_n\leqslant\dfrac{(L+1)(k-\eta)}{L(L+1)^2+L(L-1)\max(\varepsilon,\eta-\varepsilon)}$,$\forall n\in\mathbf{N}$。

其中,$k\in(0,1)$和$L(\geqslant 1)$分别是$I-T$的强增生常数与T的Lipschitz常数,则对任意$x_0\in X$,由下式生成的带误差的Ishikawa迭代序列$\{x_n\}$

$$x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nTy_n+u_n \tag{1}$$

$$y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_nTx_n+v_n,\ \forall n\in\mathbf{N} \tag{2}$$

强收敛到T的唯一不动点x^*。特别地,若取$u_n=v_n=0$,$\forall n\in\mathbf{N}$,则存在$(0,1)$中的序列$\{\gamma_n\}$满足$\gamma_n\geqslant\dfrac{1}{1+k}\min(\varepsilon,\eta-\varepsilon)\alpha_n$,使得对$\forall n\in\mathbf{N}$,有$\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant\prod_{j=0}^{n}(1-\gamma_j)\|x_0-x^*\|$。

证明 因$T:K\to K$是Lipschitz严格伪压缩映象,故$(I-T)$是强增生的,即对一切$x,y\in K$,有

$$\langle(I-T)x-(I-T)y,j(x-y)\rangle\geqslant k\|x-y\|^2$$

其中$k=\dfrac{t-1}{t}$,且$t\in(1,\infty)$是出现在定义中的常数。由Kato[2]引理1.1知对任意$x,y\in D(T)$及$r>0$有

$$\|x-y\|\leqslant\|x-y+r[(I-T-kI)x-(I-T-kI)y]\| \tag{3}$$

由(1)式推得

$$x_n=x_{n+1}+\alpha_nx_n-\alpha_nTy_n-u_n=(1+\alpha_n)x_{n+1}+\alpha_n(I-T-kI)x_{n+1}-(1-k)\alpha_nx_n+$$

$$(2-k)\alpha_n^2(x_n - Ty_n) + \alpha_n(Tx_{n+1} - Ty_n) - [(2-k)\alpha_n + 1]u_n$$

观察到,$x^* = (1+\alpha_n)x^* + \alpha_n(I - T - kI)x^* - (1-k)\alpha_n x^*$,故可见

$$x_n - x^* = (1+\alpha_n)(x_{n+1} - x^*) + \alpha_n[(I-T-kI)x_{n+1} - (I-T-kI)x^*] - (1-k)\alpha_n(x_n - x^*) + (2-k)\alpha_n^2(x_n - Ty_n) + \alpha_n(Tx_{n+1} - Ty_n) - [(2-k)\alpha_n + 1]u_n$$

又由(2)式可得如下估计

$$\|y_n - x^*\| = \|(1-\beta_n)(x_n - x^*) + \beta_n(Tx_n - x^*) + v_n\| \leqslant (1 - \beta_n + L\beta_n)\|x_n - x^*\| + \|v_n\|$$

$$\|x_n - Ty_n\| \leqslant \|x_n - x^*\| + L\|y_n - x^*\| \leqslant [1 + L + (L^2 - L)\beta_n]\|x_n - x^*\| + L\|v_n\| \tag{4}$$

$$\|Tx_{n+1} - Ty_n\| \leqslant L\|x_{n+1} - y_n\| = L\|(1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Ty_n + u_n - y_n\| = L\|x_n - y_n + \alpha_n(Ty_n - x_n) + u_n\| \leqslant L\|\beta_n(Tx_n - x_n) + v_n\| + L\alpha_n\|Ty_n - x_n\| + L\|u_n\| \leqslant L(L+1)\beta_n\|x_n - x^*\| + L\|v_n\| + L\|u_n\| + L\alpha_n[(1 + L + (L^2 - L)\beta_n)\|x_n - x^*\| + L\|v_n\|] \leqslant [L(L+1)\beta_n + L\alpha_n(1 + L + (L^2 - L)\beta_n)]\|x_n - x^*\| + L\|v_n\| + L^2\alpha_n\|v_n\| + L\|u_n\| \tag{5}$$

因此由(3)、(4)、(5)式可得

$$\|x_n - x^*\| \geqslant (1+\alpha_n)\left\|(x_{n+1} - x^*) + \frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}[(I-T-kI)x_{n+1} - (I-T-kI)x^*]\right\| - (1-k)\alpha_n\|x_n - x^*\| - (2-k)\alpha_n^2\|x_n - Ty_n\| - \alpha_n\|Tx_{n+1} - Ty_n\| - [(2-k)\alpha_n + 1]\|u_n\| \geqslant (1+\alpha_n)\|x_{n+1} - x^*\| - (1-k)\alpha_n\|x_n - x^*\| - (2-k)\alpha_n^2\|x_n - Ty_n\| - \alpha_n\|Tx_{n+1} - Ty_n\| - [(2-k)\alpha_n + 1]\|u_n\| \geqslant (1+\alpha_n)\|x_{n+1} - x^*\| - (1-k)\alpha_n\|x_n - x^*\| - (2-k)\alpha_n^2[1 + L + (L^2 - L)\beta_n]\|x_n - x^*\| - (2-k)\alpha_n^2 L\|v_n\| - \alpha_n[L(L+1)\beta_n + L\alpha_n(1 + L + (L^2 - L)\beta_n)]\|x_n - x^*\| - \alpha_n L\|v_n\| - L^2\alpha_n^2\|v_n\| - \alpha_n L\|u_n\| - [(2-k)\alpha_n + 1]\|u_n\|$$

从而有

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leqslant \frac{1 + (1-k)\alpha_n}{1+\alpha_n}\|x_n - x^*\| + \frac{(2-k)\alpha_n^2}{1+\alpha_n}[1 + L + (L^2 - L)\beta_n]\|x_n - x^*\| + (2-k)\alpha_n^2 L\|v_n\| + \frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}[L(L+1)\beta_n + L\alpha_n(1 + L + (L^2 - L)\beta_n)]\|x_n - x^*\| + \alpha_n L\|v_n\| + L^2\alpha_n^2\|v_n\| + \alpha_n L\|u_n\| + [(2-k)\alpha_n + 1]\|u_n\| \leqslant (1-\gamma_n)\|x_n - x^*\| + (2-k)\alpha_n^2 L\|v_n\| + \alpha_n L\|v_n\| + L^2\alpha_n^2\|v_n\| + \alpha_n L\|u_n\| + [(2-k)\alpha_n + 1]\|u_n\| \tag{6}$$

其中

$$\gamma_n = \frac{1}{1+\alpha_n}[k\alpha_n - L(L+1)\alpha_n\beta_n - (1+L)(2+L-k)\alpha_n^2 - L(L-1)(2+L-k)\alpha_n^2\beta_n]$$

于是,由条件 2)和 3),对一切 $n \in \mathbf{N}$,有

$$\gamma_n = \frac{1}{1+\alpha_n}[k\alpha_n - L(L+1)\alpha_n\beta_n - (1+L)(2+L-k)\alpha_n^2 - L(L-1)(2+L-k)\alpha_n^2\beta_n] \geqslant \frac{1}{1+\alpha_n}[k\alpha_n - L(L+1)\alpha_n\beta_n - (1+L)(2+L-k)\frac{\max(\varepsilon, \eta - \varepsilon)}{(L+1)(L+2-k)}\alpha_n] - L(L-1)(2+L-k)\frac{\max(\varepsilon, \eta - \varepsilon)}{(L+1)(L+2-k)}\alpha_n\beta_n = \frac{1}{1+\alpha_n}[k\alpha_n - L(L+1)\alpha_n\beta_n - \max(\varepsilon, \eta - \varepsilon)\alpha_n - \frac{L(L-1)\max(\varepsilon, \eta - \varepsilon)}{(L+1)}\alpha_n\beta_n] = \frac{1}{1+\alpha_n}[k\alpha_n - \max(\varepsilon, \eta - \varepsilon)\alpha_n - \frac{L(L+1)^2 + L(L-1)\max(\varepsilon, \eta - \varepsilon)}{(L+1)}\alpha_n\beta_n] \geqslant \frac{1}{1+\alpha_n}[k\alpha_n - \max(\varepsilon, \eta - \varepsilon)\alpha_n - \frac{L(L+1)^2 + L(L-1)\max(\varepsilon, \eta - \varepsilon)}{(L+1)}\frac{(L+1)(k-\eta)}{L(L+1)^2 + L(L-1)\max(\varepsilon, \eta - \varepsilon)}\alpha_n] \geqslant \frac{1}{1+\alpha_n}[\eta\alpha_n - \max(\varepsilon, \eta - \varepsilon)\alpha_n] \geqslant \frac{1}{1+k}[\min(\varepsilon, \eta - \varepsilon)\alpha_n] \tag{7}$$

进一步,由(6)、(7)式可得

$$\|x_{n+1}-x^*\| \leqslant (1-\gamma_n)\|x_n-x^*\| + (2-k)\alpha_n^2L\|v_n\| + \alpha_nL\|v_n\| + L^2\alpha_n^2\|v_n\| + \alpha_nL\|u_n\| + [(2-k)\alpha_n+1]\|u_n\| \leqslant [1-\frac{1}{1+k}\min(\varepsilon,\eta-\varepsilon)\alpha_n]\|x_n-x^*\| + (2-k)\alpha_n^2L\|v_n\| + \alpha_nL\|v_n\| + L^2\alpha_n^2\|v_n\| + \alpha_nL\|u_n\| + [(2-k)\alpha_n+1]\|u_n\| \quad (8)$$

令 $\rho_n = \|x_n-x^*\|$,$t_n = \frac{1}{1+k}\min(\varepsilon,\eta-\varepsilon)\alpha_n$,$\sigma_n = 0$,且

$$\theta_n = (2-k)\alpha_n^2L\|v_n\| + \alpha_nL\|v_n\| + L^2\alpha_n^2\|v_n\| + \alpha_nL\|u_n\| + [(2-k)\alpha_n+1]\|u_n\|$$

则(8)式可化为

$$\rho_{n+1} \leqslant (1-t_n)\rho_n + \sigma_n\rho_n + \theta_n, \forall n \geqslant 0$$

由条件1)、2)知 $t_n \in (0,1)$,$\sum_{n=0}^{\infty} t_n = \infty$,且 $\sum_{n=0}^{\infty}\theta_n < \infty$,故由引理1可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$,即序列 $\{x_n\}$ 强收敛到 x^*。另外,x^* 的唯一性可由文献[3]得到。

收敛率估计 取 $u_n = v_n = 0, \forall n \in \mathbf{N}$,则由(8)式可得

$$\|x_{n+1}-x^*\| \leqslant (1-\gamma_n)\|x_n-x^*\| \leqslant \cdots \leqslant \prod_{j=0}^{n}(1-\gamma_j)\|x_0-x^*\|$$

其中,$\{\gamma_n\}$ 是(0,1)中的序列,满足 $\gamma_n \geqslant \frac{1}{1+k}\min(\varepsilon,\eta-\varepsilon)\alpha_n, \forall n \in \mathbf{N}$。 证毕

注1 定理2在以下两个方面对文献[10]中的结果进行了改进和推广

1)去掉了限制条件 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n < \infty$;

2)将Ishikawa迭代序列推广到带误差的Ishikawa迭代序列。

注2 定理2是文献[4-9]中相应结果的改进和推广。另外,定理2中对参数 α_n,β_n 的要求也与文献[11,12]中的不同。

定理3 设 K 是任意实Banach空间 X 中的闭凸子集,$T:K\to K$ 是Lipschitz严格伪压缩映象,使得 $Tx^* = x^*$,对某个 $x^* \in X$。又设 $\{u_n\}$ 是 X 中的序列,$\{\alpha_n\}$ 是[0,1]中的实序列,且满足下列条件

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\| < \infty$;

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = \infty$,且 $0 < \alpha_n \leqslant \frac{\max(\varepsilon,\eta-\varepsilon)}{(L+1)(L+2-k)}, \forall n \in \mathbf{N}$,对某个 $\eta \in (0,k)$,$\varepsilon \in (0,\eta)$。

其中,$k \in (0,1)$ 和 $L(\geqslant 1)$ 分别是 $I-T$ 的强增生常数与 T 的Lipschitz常数,则对任意 $x_0 \in X$,由下式生成的带误差的Mann迭代序列 $\{x_n\}$

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_nTx_n + u_n$$

强收敛到 T 的唯一不动点 x^*。特别地,若取 $u_n = 0, \forall n \in \mathbf{N}$,则存在(0,1)中的序列 $\{\gamma_n\}$ 满足 $\gamma_n \geqslant \frac{1}{1+k}\min(\varepsilon,\eta-\varepsilon)\alpha_n$,使得对 $\forall n \in \mathbf{N}$,有 $\|x_{n+1}-x^*\| \leqslant \prod_{j=0}^{n}(1-\gamma_j)\|x_0-x^*\|$。

3 结论

本文在较弱的限制条件下讨论了Banach空间中的Lipschitz严格伪压缩映象的带误差Ishikawa迭代序列的收敛性。所得结果改进和推广了文献[4-10]中相应的结果。

参考文献:

[1] Browder F E. Nonlinear mapping of nonexpansive and accretive type in Banach spaces[J]. Bull Amer Math Soc,1967,73:875-882.

[2] Kato T. Nonlinear semigroups and evolution equations[J]. J Math Soc Japan,1967,18/19:212-225.

[3] Chidume C E. Ierative approximation of fixed points of Lipschitz strictly pseudocontractive mappings[J]. Proc Amer Math Soc,1987,99(2):283-288.

[4] Tan K K,Xu H K. Iterative solutions to nonlinear equations of strongly accretive operators in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl,1993,178:9-21.

[5] Deng L, Ding X P. Iterative approximation of Lipschitz strictly pseudocontractive mapping in uniformly smooth Banach spaces[J]. Nonlinear Anal, 1995, 24: 981-987.

[6] Ding X P. Iterative process with errors to locally strictly pseudocontractive maps in Banach spaces [J]. Computer Math Appl, 1996, 32: 91-97.

[7] Chang S S. Iterative approximations of fixed points and solutions for strongly accretive and strongly pseudo-contractive mappings in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1998, 224: 149-165.

[8] Liu L W. Approximation of fixed points of a strictly pseudocontractive mappings[J]. Proc Amer Math Soc, 1997, 125: 1363-1366.

[9] Sastry K P R, Babu G V R. Approximation of fixed points of a strictly pseudocontractive mappings on arbitrary closed, convex sets in a Banach spaces[J]. Proc Amer Math Soc, 2000, 128: 2907-2907.

[10] Zeng L C. Iterative procedure for approximating fixed points of strictly pseudocontractive mappings[J]. Appl Math J Chinese Univ Ser B, 2003, 18(3): 283-286.

[11] 曾六川. 关于 Banach 空间中 Lipschitz 严格伪压缩映象的带误差 Ishikawa 型迭代序列[J]. 数学年刊, 2001, 22A(5): 639-644.

[12] 龙宪军, 彭建文. Banach 空间中 Lipschitz 严格伪压缩映象的带误差的 Ishikawa 迭代序列的收敛性[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2006, 23(3): 16-19.

[13] 李育强, 刘理蔚. 关于 Lipschitz 强增生算子的迭代程序[J]. 数学学报, 1998, 41: 845-850.

On the Ishikawa Iteration Process with Errors for Lipschitz Strictly Pseudocontractive Mappings

LONG Xian-jun[1], *PENG Zai-yun*[2], *AO Jun*[3]

(1. College of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067;

2. College of Science, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074;

3. College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: Let K be a closed convex subset of an arbitrary real Banach space X, and $T: K \to K$ be a Lipschitz strictly pseudocontractive mapping such that $Tx^* = x^*$ for some $x^* \in X$. Under the lack of the assumption that $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n < \infty$, it is shown that the Ishikawa iterative sequence with errors engendered by $x_{n+1} = (1-\alpha_n) x_n + \alpha_n T y_n + u_n$ and $y_n = (1-\beta_n) x_n + \beta_n T x_n + v_n$, for all $n \in \mathbf{N}$, converges strongly to the unique fixed point of T. Moreover, this result provides a general converges rate estimate for such a sequence: if $u_n = v_n = 0$, for all $n \in \mathbf{N}$, then we have $\| x_{n+1} - x^* \| \leqslant (1-\gamma_n) \| x_n - x^* \| \leqslant \cdots \leqslant \prod_{j=0}^{n} (1-\gamma_j) \| x_0 - x^* \|$, where $\{\gamma_n\}$ is a sequence in $(0,1)$ such that for all $n \in \mathbf{N}$, $\gamma_n \geqslant \frac{1}{1+k} \min(\varepsilon, \eta - \varepsilon) \alpha_n$. These results improve and generalize the recent corresponding results.

Key words: arbitrary real Banach space; Lipschitz strictly pseudocontractive mapping; Ishikawa iterative process with error; convergence rate estimate; fixed point

(责任编辑 黄 颖)