运筹学与控制论

广义半无限极大极小规划的一个新的最优性条件*

刘 茜
(山东师范大学 数学科学学院, 济南 250014)

摘要:由于广义半无限极大极小问题的极大函数的约束集合随 x 的变化而变化,增加了对该问题的理论分析和求解难度。为了克服这种情况,许多研究者考虑通过转化消除约束集合中的约束 $f(x,y)\leqslant 0$。本文是通过一类由 1 范数定义的精确罚,将广义的半无限极大极小规划中的约束条件消除,使该问题转化为半无限极小极大极小规划。在不需要假设集合的条件下证明,当罚参数充分大时,半无限极小极大极小规划与广义半无限极大极小问题具有相同的最优值,相同的局部最优解以及相同的全局最优解。利用这种等价性,进一步给出了广义半无限极大极小问题的一个最优性条件。最后,对本文中建立的最优性条件与其它文献中的最优性条件之间的关系进行了讨论。

关键词:半无限优化;非光滑优化;精确罚
中图分类号:O224;O221.2 文献标识码:A 文章编号:1672-6693(2009)02-0012-06

1 预备知识

考虑广义半无限极大极小问题(P)

$$\min_{x\in\mathbf{R}^n}\Psi(x) \tag{1}$$

其中 $\Psi:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 定义为

$$\Psi(x)=\sup_{y\in Y}\{\phi(x,y)\mid f(x,y)\leqslant 0\} \tag{2}$$

其中 $\phi:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$,$f:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^{r_1}$,$Y=\{y\in\mathbf{R}^m\mid g(y)\leqslant 0\}$,$g:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^{r_2}$,对任意的 $v=(v^1,\cdots,v^q)$,$v\leqslant 0$ 表示 $v^1\leqslant 0,\cdots,v^q\leqslant 0$。$\hat{y}(x)=\arg\max\limits_{y\in Y}\{\phi(x,y)\mid f(x,y)\leqslant 0\}$。

广义半无限极大极小问题(P)不仅在理论上具有重要的研究价值,而且在现实生活中也有着重要的应用价值。特别地,广义半无限极大极小问题常常可以应用到各种工程领域。在理论方面,由于广义半无限极大极小问题的极大函数(2)式的约束集合随 x 的变化而变化,增加了对该问题的理论分析和求解的难度。为了克服这种情况,许多研究者考虑通过转化消除(2)式中约束 $f(x,y)\leqslant 0$[1-8]。

在文献[1]中,Levitin 通过一个可微的罚函数消除了约束 $f(x,y)\leqslant 0$,并且证明了当罚参数趋于无穷大时,罚问题的全局最优解序列收敛于问题(P)的全局最优解。文献[2]证明了在内部子问题(2)式线性独立的约束规范条件下,一类广义半无限最优化问题是等价于一般的半无限最优化问题的,即等价于如下问题:$\min\limits_{x\in\mathbf{R}^n}\{f^0(x)\mid\phi(x,\omega)\leqslant 0,\omega\in\Omega\}$,其中 $\phi(\cdot,\cdot)$ 是光滑的且 Ω 是包含无限个元素的集合。然而,这种等价关系究竟是如何建立起来的,该文献没有阐述清楚。最近,文献[3]利用 Rockafellar 增广拉格朗日函数[4]消除 $f(x,y)\leqslant 0$ 并建立了与通常半无限极大极小问题的等价关系,简化了半无限极大极小问题的求解。在比文献[3]弱的条件下,文献[5]通过一类精确罚函数同样消除了约束 $f(x,y)\leqslant 0$,建立与广义半无限极大极小问题等价的半无限极小极大极小问题。本文利用另一类由 1 范数定义的精确罚函数消除了广义半无限极大极小问题中的约束条件 $f(x,y)\leqslant 0$,在更弱的不需要假设集合 Y 紧致的条件下,将该问题转化为半无限极小极大极小问题。最后,给出了关于问题(P)的最优性条件,并在这个最优性条件与其他最优性条件之间建立了

* 收稿日期:2008-12-17 修回日期:2009-02-17
资助项目:国家自然科学基金(No. 10826031;No. 10571106;No. 10771228);运筹学与系统工程重庆市市级重点实验室开放课题(No. 2006001)
作者简介:刘茜,女,讲师,博士,研究方向为数学规划。

关系。

本文在第二部分,利用由1范数定义的精确罚函数建立了相应的半无限极小极大极小问题,证明了在适当的条件下,该问题与原问题(P)具有相同的最优值。在第三部分,证明了该问题与原问题之间具有相同的局部最优解和全局最优解,并给出了原问题的一个新的最优性条件。

2 精确罚

在这一部分,将把一类由1范数定义的精确罚函数应用到广义半无限极大极小问题中,将广义半无限极大极小问题转化为一类半无限极小极大极小问题。

下面给出1范数定义的精确罚函数,利用这个罚函数消去(2)式中的约束$f(x,y)\leqslant 0$,用r表示罚参数。对任意的$r\geqslant 0$定义如下问题(P_r)

$$\min_{(x,r)\in\mathbf{R}^{n+1}}\hat{\Psi}(x,r)\tag{3}$$

其中$\hat{\Psi}:\mathbf{R}^{n+1}\to\mathbf{R}$定义为

$$\hat{\Psi}(x,r)=\sup_{y\in Y}\{\phi(x,y)-r\|f(x,y)_+\|_1\}\tag{4}$$

其中对$v=(v^1,\cdots,v^q)\in\mathbf{R}^q$,$v_+=(\max\{v^1,0\},\cdots,\max\{v^q,0\})$,$\|v_+\|_1=\sum_{i=1}^{q}\max\{v^i,0\}$。注意到$\|u\|_1$是一个极大函数,因此,问题($\mathrm{P}_r$)是一个半无限极小极大极小问题。事实上,设$I$是包含所有由$\{1,\cdots,r_1\}$中元素组成的集合的集合,即$L=\{I\mid I\subseteq\{1,\cdots,r_1\}\}$,$\hat{L}=L\cup\{\varnothing\}$。

$$\hat{\Psi}(x,r)=\sup_{y\in Y}\{\phi(x,y)-r\|f(x,y)_+\|_1\}=\sup_{y\in Y}\min_{I\in\hat{\mathrm{I}}}\hat{\phi}^I(x,r,y)\tag{5}$$

$$\hat{\phi}^I(x,r,y)=\phi(x,y)-r\sum_{k\in I}f^k(x,y),I\in L$$

$$\hat{\phi}^{\varnothing}(x,r,y)=\phi(x,y),I=\varnothing$$

下面考虑$\Psi(x)$与$\hat{\Psi}(x,r)$之间的关系,假设

1) $\phi(\cdot,\cdot)$,$f^k(\cdot,\cdot)$,$k\in\{1,\cdots,r_1\}$且$g^k(\cdot)$,$k\in\{1,\cdots,r_2\}$是连续的;

2) 对所有的$x\in\mathbf{R}^n$集合$\{y\in Y\mid f(x,y)\leqslant 0\}\neq\varnothing$。

定理1 若假设1)、2)成立,则对所有的$x\in\mathbf{R}^n$和$r\in\mathbf{R}_+$,有

$$\hat{\Psi}(x,r)\geqslant\Psi(x)\tag{6}$$

证明 若$\hat{\Psi}(x,r)=+\infty$,则结论成立。设$\hat{\Psi}(x,r)<+\infty$,则

$$\hat{\Psi}(x,r)=\sup_{y\in Y}\{\phi(x,y)-r\|f(x,y)_+\|_1\}\geqslant\sup_{y\in Y}\{\phi(x,y)-r\|f(x,y)_+\|_1\mid f(x,y)\leqslant 0\}=$$
$$\sup_{y\in Y}\{\phi(x,y)\mid f(x,y)\leqslant 0\}=\Psi(x)$$

下面将给出保证(6)式等式成立的一个充分必要条件。首先,给出一些基本概念,考虑以下不等式约束问题$P(x,u)$

$$\sup_{y\in Y}\{\phi(x,y)\mid f(x,y)\leqslant u\}\tag{7}$$

设问题$P(x,u)$的价值函数$v:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^{r_1}\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$定义为

$$v(x,u)=\sup_{y\in Y}\{\phi(x,y)\mid f(x,y)\leqslant u\}\tag{8}$$

其中,若对所有的$y\in Y$,$f(x,y)>u$,则$v(x,u)=-\infty$。设

$$B(\hat{x},\rho)=\{x\in\mathbf{R}^n\mid\|x-\hat{x}\|<\rho\}$$

证毕

定理2 若假设1)、2)成立,则对于$\hat{x}\in\mathbf{R}^n$,存在$\hat{\rho}>0$,$\hat{r}\in\mathbf{R}_+$使得对任意$x\in B(\hat{x},\hat{\rho})$和$r\geqslant\hat{r}$满足

$$\Psi(x)=\hat{\Psi}(x,r)\tag{9}$$

的充要条件是对任意$x\in B(\hat{x},\hat{\rho})$和$u\in\mathbf{R}^{r_1}$,有

$$v(x,u)-v(x,0)\leqslant\hat{r}\|u\|_1\tag{10}$$

证明 必要性。假设存在$\hat{\rho}>0$,$\hat{r}\in\mathbf{R}_+$使得对任意$x\in B(\hat{x},\hat{\rho})$和$r\geqslant\hat{r}$(9)式成立。则有

$$v(x,0)=\Psi(x)=\hat{\Psi}(x,r)=\sup_{y\in Y}\{\phi(x,y)-\hat{r}\|f(x,y)_+\|_1\}\geqslant$$
$$\sup_{y\in Y}\{\phi(x,y)-\hat{r}\|f(x,y)_+\|_1\mid f(x,y)\leqslant u\}\geqslant\sup_{y\in Y}\{\phi(x,y)\mid f(x,y)\leqslant u\}-$$
$$\sup_{y\in Y}\{\hat{r}\|f(x,y)_+\|_1\mid f(x,y)\leqslant u\}\geqslant v(x,u)-\hat{r}\|u\|_1$$

从而(10)式是成立的。

充分性。假设存在 $x\in\mathbf{R}^n$，$\hat{\rho}>0$ 和 $\hat{r}<\infty$ 使得对任意 $x\in B(\hat{x},\hat{\rho})$ 和 $u\in\mathbf{R}^{r_1}$ 满足(10)式。对任意 $x\in B(\hat{x},\hat{\rho})$，令 $\delta_j\nearrow\hat{\Psi}(x,\hat{r})$，则存在 $y^j\in Y$，使得

$$\phi(x,y^j)-r\|f(x,y^j)_+\|_1\geqslant\delta_j$$

于是，由(10)式可知

$$\delta_j\leqslant\phi(x,y^j)-r\|f(x,y^j)_+\|_1\leqslant v(x,f(x,y^j)_+)-\hat{r}\|f(x,y^j)_+\|_1\leqslant v(x,0)=\Psi(x)$$

对上式两边取极限，得

$$\hat{\Psi}(x,r)\leqslant\hat{\Psi}(x,\hat{r})=\lim_{j\to+\infty}\delta_j\leqslant\Psi(x)$$

因此，对所有 $x\in B(\hat{x},\hat{\rho})$ 和 $r\geqslant\hat{r}$，$\Psi(x)=\hat{\Psi}(x,r)$。　　证毕

3 最优性条件

通过上面的定理 2，容易得到问题(P)和问题(P_r)的局部和全局最优解之间的关系。

定理 3　若假设 1)、2)成立且对任意 $x\in B(\hat{x},\rho)$ 和 $r\geqslant\hat{r}$，(10)式成立，则下面的结论成立

(a) 若 $x\in\mathbf{R}^n$ 是问题(P)在领域 $B(\hat{x},\rho)$ 上的一个局部最优解，则 $(\hat{x},r)$ 是问题(P_r)关于 $B(\hat{x},\rho)\times\mathbf{R}$ 的一个局部最优解；

(b) 若 $(\hat{x},r)$ 是问题(P_r)关于 $B(\hat{x},\rho)\times\mathbf{R}$ 的一个局部最优解，那么 $\hat{x}\in\mathbf{R}^n$ 是问题(P)在邻域 $B(\hat{x},\rho)$ 上的一个局部最优解。

定理 4　若假设 1)、2)成立且对任意 $x\in\mathbf{R}^n$ 和 $r\geqslant\hat{r}$，(10)式成立，则问题(P)和(P_r)的全局最优解在

$$\min_{x\in\mathbf{R}^n}\Psi(x)=\min_{(x,r)\in\mathbf{R}^{n+1}}\hat{\Psi}(x,r)\tag{11}$$

的意义下是等价的。

根据定理 3，容易得到下面关于问题(P)的最优性条件。

定理 5　若假设 1)、2)成立，$\hat{x}$ 是问题(P)的局部极小解，存在 $\hat{\rho}>0$，$\hat{r}$ 使得对任意 $x\in B(\hat{x},\hat{\rho})$ 和 $u\in\mathbf{R}^{r_1}$ 满足(10)式，则对任意 $r\geqslant\hat{r}$，有 $\Psi(\hat{x})=\hat{\Psi}(\hat{x},r)$。

下面假设

3) $\phi(\cdot,\cdot)$，$f^k(\cdot,\cdot)$，$k\in\{1,\cdots,r_1\}$ 且 $g^k(\cdot)$，$k\in\{1,\cdots,r_2\}$ 是连续可微的；

4) $Y\subset\mathbf{R}^m$ 是紧的，对所有 $x\subset\mathbf{R}^n$ 集合 $\{y\in Y\mid f(x,y)\leqslant 0\}\neq\varnothing$。

在文献[6]中，在假设 3)、4)下，对问题(P)给出了如下一阶最优性条件。

定理 6　若 $\hat{x}$ 是问题(P)的局部最优解，假设 3)、4)成立，对所有的 $y\in\hat{Y}(\hat{x})$，向量 $\nabla_y f^k(\hat{x},y)$，$k\in r_1^*(\hat{x},y)$ 和 $\nabla g^k(y)$，$k\in r_2^*(y)$ 是线性独立的，其中 $r_1^*(x,y)=\{k\in r_1\mid f^k(x,y)\geqslant 0\}$，$r_2^*(y)=\{k\in r_2\mid g^k(y)=0\}$，则

$$0\in conv_{y\in\hat{Y}(\hat{x})}\{\nabla_x\phi(\hat{x},y)-f_x(\hat{x},y)^{\mathrm{T}}\alpha(\hat{x},y)\}\tag{12}$$

其中 $\alpha(\hat{x},y)\in\mathbf{R}^{r_1}$，$\beta(\hat{x},y)\in\mathbf{R}^{r_2}$ 是在 $y\in\hat{Y}(\hat{x})$ 点关于问题 $\Psi(x)$ 的唯一的 KKT 乘子，即 $(\alpha(\hat{x},y),\beta(\hat{x},y))$ 满足

$$\nabla_x\phi(\hat{x},y)-\nabla_y f(\hat{x},y)^{\mathrm{T}}\alpha(\hat{x},y)-\nabla g(y)^{\mathrm{T}}\beta(\hat{x},y)=0$$
$$\alpha(\hat{x},y)f(\hat{x},y)+\beta(\hat{x},y)^{\mathrm{T}}g(y)=0$$
$$\alpha(\hat{x},y)\geqslant 0,\beta(\hat{x},y)\geqslant 0,f(\hat{x},y)\leqslant 0,g(y)\leqslant 0$$

下面将讨论定理 5、定理 6 中所给出的最优性条件之间的关系，定义函数 $\omega(x,r,y)$ 和集合 $\hat{G}\,\hat{\Psi}(x,r)$ 为

$$\omega(x,r,y) = \min_{I\in\hat{L}} \hat{\phi}^I(x,r,y)$$

$$\hat{G}\,\hat{\Psi}(x,r) = conv_{y\in Y} conv_{I\in\hat{L}}\left\{\begin{pmatrix} \hat{\phi}^I(x,r,y) - \omega(x,r,y) \\ \hat{\Psi}(x,r) - \omega(x,r,y) \\ \nabla_x\hat{\phi}^I(x,r,y) \end{pmatrix}\right\}$$

设矩阵 $B(x,y) = \begin{pmatrix} f_y(x,y) \\ g_y(y) \end{pmatrix}$ 是 $(r_1 + r_2) \times m$ 维的,其中

$$f_y(x,y) = (\nabla_y f^1(x,y),\cdots,\nabla_y f^{r_1}(x,y))^{\mathrm{T}},g_y(y) = (\nabla g^1(y),\cdots,\nabla g^{r_2}(y))^{\mathrm{T}}$$

设 $C(x,y) = diag(C_1(x,y),C_2(y))$ 是 $(r_1 + r_2) \times (r_1 + r_2)$ 维的对角矩阵,其中

$$C_1(x,y) = diag([f^1(x,y)_-]^2,\cdots,[f^{r_1}(x,y)_-]^2),C_2(x,y) = diag([g^1(y)]^2,\cdots,[g^{r_1}(y)]^2)$$

这里,$v = (v^1,\cdots,v^q) \in \mathbf{R}^q,v_-^i = \min\{v^i,0\},v_- = (\min\{v^1,0\},\cdots,\min(v^q,0))$。进一步,设 $z:\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^{r_1+r_2}$ 定义为

$$z(x,y) = (\eta(x,y),\xi(x,y))^{\mathrm{T}} = [B(x,y)B(x,y)^{\mathrm{T}} + C(x,y)]^+ B(x,y)\nabla_y\phi(x,y) \tag{13}$$

其中 $\eta(x,y) \in \mathbf{R}^{r_1},\xi(x,y) \in \mathbf{R}^{r_2}$ 和 M^+ 表示矩阵 M 的广义逆。

引理1 若假设3)、4)成立。对 $x \in \mathbf{R}^n$ 和 $y \in \mathbf{R}^m$ 满足 $\nabla_y f^k(x,y),k \in r_1^*(x,y)$ 和 $\nabla g^k(y),k \in r_2^*(y)$ 是线性独立的,那么 $B(x,y)B(x,y)^{\mathrm{T}} + C(x,y)$ 是正定的。

证明 设 $x \in \mathbf{R}^n$ 和 $y \in \mathbf{R}^m$ 满足 $\nabla_y f^k(x,y),k \in r_1^*(x,y)$ 与 $\nabla g^k(y),k \in r_2^*(y)$ 是线性独立的。根据(13)式中的定义 $z(x,y)$ 满足下面的等式

$$[B(x,y)B(x,y)^{\mathrm{T}} + C(x,y)]z(x,y) - B(x,y)\nabla_y\phi(x,y) = 0$$

即无约束凸二次优化问题

$$\min_{z\in\mathbf{R}^{r_1+r_2}}\{\| -\nabla_y\phi(x,y) + B(x,y)^{\mathrm{T}}z\|^2 + \langle z,C(x,y)z\rangle\} \tag{14}$$

的一阶最优性条件。下面将证明 $z(x,y)$ 是问题(14)式的唯一最优解。由于(14)式二次规划问题,只需要证明最小化的二次函数是正定的。显然,这个函数首先是半正定的。设 $z = (\eta,\xi)$,则价值函数(14)式中的二次部分可以写为

$$\langle z,[B(x,y)B(x,y)^{\mathrm{T}} + C(x,y)]z\rangle =$$
$$\|f_y(x,y)^{\mathrm{T}}\eta + g_y(y)^{\mathrm{T}}\xi\|^2 + \langle\eta,C_1(x,y)\eta\rangle + \langle\xi,C_2(x,y)\xi\rangle$$

因此,(14)式中的二次部分是正定的当且仅当

$$\|f_y(x,y)^{\mathrm{T}}\eta + g_y(y)^{\mathrm{T}}\xi\|^2 + \langle\eta,C_1(x,y)\eta\rangle + \langle\xi,C_2(x,y)\xi\rangle = 0 \tag{15}$$

蕴涵 $\eta = 0$ 和 $\xi = 0$。当(15)式成立时,一定有 $\eta^k = 0$,对所有 $k \notin r_1^*(x,y)$,且对所有 $k \notin r_2^*(x,y)$,$\xi^k = 0$。因此,根据(15)式可得

$$\sum_{k\in r_1^*(x,y)}\eta^k\nabla_y f^k(x,y) + \sum_{k\in r_2^*(x,y)}\xi^k\nabla g^k(y) = 0 \tag{16}$$

由线性独立假设可知,(16)、(15)式成立的重要条件是 $\eta = 0,\xi = 0$。因此,$A(x,y)A(x,y)^{\mathrm{T}} + B(x,y)$ 是正定的,则 $z(x,y)$ 是问题(14)式的唯一最优解。 证毕

定理7 若假设3)、4)成立,$\hat{x}$ 满足(12)式且对任意 $y \in \hat{Y}(\hat{x})$,向量 $\nabla_y f^k(\hat{x},y),k \in r_1^*(\hat{x},y)$ 与 $\nabla g^k(y)$,$k \in r_2^*(y)$ 是线性独立的。若对 $r > 0$,有 $\Psi(\hat{x}) = \hat{\Psi}(\hat{x},r)$,且对所有的 $y \in \hat{Y}(\hat{x})$,有

$$r \geqslant \sum_{k=1}^{r_1}|\eta^k(\hat{x},y)| \tag{17}$$

其中 $\eta^k(\cdot,\cdot)$ 是与(13)式中定义的相同,那么,$0 \in \hat{G}\,\hat{\Psi}(\hat{x},r)$。

证明 根据Caratheodory定理,(12)式成立当且仅当存在 $\hat{y}_i \in \hat{Y}(\hat{x}),i \in \{1,\cdots,n+1\}$ 和乘子向量 $\hat{\mu} \in \left\{\mu \in \mathbf{R}^{n+1}\,\middle|\,\mu^i \geqslant 0,\sum_{i=1}^{n+1}\mu^i\right\}$ 使得

$$0=\sum_{i=1}^{n+1}\hat{\mu}^i\nabla_x\phi(\hat{x},\hat{y}_i)-\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{r_1}\hat{\mu}^i\alpha^k(\hat{x},\hat{y}_i)\nabla_x f^k(\hat{x},\hat{y}_i)$$

下面,将构造乘子 $\zeta_i^I\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n+1,I\in\hat{L})$,$\mu^i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n+1)$ 及 $y_i\in Y$,使得

$$\sum_{i=1}^{n+1}\mu^i\sum_{I\in\hat{L}}\zeta_i^I\begin{pmatrix}\hat{\phi}^I(x,r,y_i)-\omega(x,r,y_i)\\ \hat{\Psi}(x,r)-\omega(x,r,y_i)\\ \nabla_x\hat{\phi}^I(x,r,y_i)\end{pmatrix}=0$$

且 $\sum_{i=1}^{n+1}\mu^i=1$,$\sum_{I\in\hat{L}}\zeta_i^I=1$,从而证明 $0\in\hat{G}\hat{\Psi}(\hat{x},r)$。设 $r>0$ 满足对所有的 $y\in\hat{Y}(\hat{x})$,(17) 式成立。令

$$\zeta_i^{I^k}=\frac{1}{r}\alpha^k(\hat{x},\hat{y}_i),I^k=\{k\},k=1,\cdots,r_1$$

$$\zeta_i^I=0,I\in\{I\in L\mid I\notin L^k,k=1,\cdots,r_1\},\zeta_i^{\varnothing}=1-\sum_{I\in L}\zeta_i^I$$

取 $\mu^i=\hat{\mu}^i$,且 $y^i=\hat{y}^i$,$i\in\{1,\cdots,n+1\}$。首先,有

$$\mu\in\left\{\mu\in\mathbf{R}^{n+1}\,\middle|\,\mu^i\geqslant 0,\sum_{i=1}^{n+1}\mu^i=1\right\},\sum_{I\in\hat{L}}\zeta_i^I=1,\zeta_i^I\geqslant 0,I\in L,i\in\{1,\cdots,n+1\}$$

且对所有的 $i\in\{1,\cdots,n+1\}$,$f(\hat{x},y_i)\leqslant 0$。进一步,对任意 $k\in\{1,\cdots,r_1\}$ 和 $i\in\{1,\cdots,n+1\}$,有

$$\mu^i\zeta_i^{I^k}[\phi^{I^k}(\hat{x},r,y_i)-\omega(\hat{x},r,y_i)]=-r\mu^i\zeta_i^{I^k}[\sum_{k\in I^k}f^k(\hat{x},y_i)]=-\mu^i\alpha^k(\hat{x},y_i)f^k(\hat{x},y_i)=0$$

且对任意 $i\in\{1,\cdots,n+1\}$,$\hat{\phi}^{\varnothing}(\hat{x},r,y_i)-\omega(\hat{x},r,y_i)=0$。接下来,根据(12) 式

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{I\in\hat{L}}\mu^i\zeta_i^I\nabla_x\hat{\phi}^I(\hat{x},r,y_i)=\sum_{i=1}^{n+1}\mu^i\nabla_x\phi(\hat{x},y_i)-\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{I\in\hat{L}}\mu^i\zeta_i^I r[\sum_{k\in I}\nabla_x f^k(\hat{x},y_i)]=$$

$$\sum_{i=1}^{n+1}\mu^i\nabla_x\phi(\hat{x},\hat{y}_i)-\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{r_1}\mu^i\alpha^k(\hat{x},\hat{y}_i)\nabla_x f^k(\hat{x},\hat{y}_i)=0$$

下面只需要证明对所有的 $i\in\{1,\cdots,n+1\}$,$\zeta_i^{\varnothing}\geqslant 0$ 即可。根据KKT乘子的定义,唯一的乘子 $\alpha(\hat{x},\hat{y}_i)$ 和 $\beta(\hat{x},\hat{y}_i)$ 构成最优化问题(14) 的一个解。又由引理1可知,$B(x,y)B(x,y)^{\mathrm{T}}+C(x,y)$ 正定且问题(14) 式的解的唯一。因此,对所有 $i\in\{1,\cdots,n+1\}$,$\eta(\hat{x},\hat{y}_i)=\alpha(\hat{x},\hat{y}_i)$。从而

$$\zeta_i^{\varnothing}=1-\sum_{I\in\hat{L}}\zeta_i^I=1-\sum_{k=1}^{r_1}\zeta_i^{I^k}=1-\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r_1}\alpha^k(\hat{x},\hat{y}_i)=1-\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r_1}\eta^k(\hat{x},\hat{y}_i)\geqslant 1-\frac{1}{r}r=0$$

故 $0\in\hat{G}\hat{\Psi}(\hat{x},r)$。　证毕

参考文献:

[1] Levitin E. Reduction of generalized semi-infinite programming problems to semi-infinite or piece-wise smooth programming problems[C]. Germany:University of Trier,2001.

[2] Weber G W. Generalized semi-infinite optimization:On some foundations[J]. Vychislitel'nye Tekhnologii,1999,4:41-61.

[3] Polak E,Royset J O. On the use of augmented Lagrangians in the solution of generalized semi-infinite min-max problems[J]. Computational Optimization and Applications,2005,31:173-192.

[4] Rockafellar R T. Augmented Lagrange multiplier functions and duality in nonconvex programming[J]. SIAM Journal on Control and Optimization,1974,12:268-285.

[5] Royset J O,Polak E,Kiureghian A D. Adaptive approximations and exact penalization for the solution of generalized semi-infinite min-max problems[J]. SIAM J Optim,2003,14:1-34.

[6] Stein O. First order optimality conditions for degenerate index sets in generalized semi-infinite programming[J]. Math Oper Res,2001,26:565-582.

[7] 刘芳,王长钰. 通过转化来解广义半无限极大极小规划问题[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2008,25(1):5-9.

[8] 吴至友,白富生. 一种新的求全局优化最优性条件的方法[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2006,23(1):1-5.

A New Optimality Condition on Generalized Semi-infinite Min-max Problems

LIU Qian

(College of Mathematics Science, Shandong Normal University, Jinan 250014, China)

Abstract: Generalized semi-infinite min-max problem has important relations with optimal control and information technology. It can be used in various engineering fields. So it is very interesting to study the generalized semi-infinite min-max problem. However, since the constraint set change as the variable x changes, the generalized semi-infinite min-max problem is difficult to be solved. To overcome these difficulties, investigators have developed many important progresses of generalized semi-infinite min-max programs. In this paper, we use l1 exact penalty function to remove the constraint conditions of a generalized semi-infinite min-max problem, and then convert this problem into a semi-infinite min-max-min problem. Without the compactness assumption, we prove that the generalized semi-infinite min-max problem has the same optimal value, the same set of local and global solutions as the corresponding semi-infinite min-max-min problem, when the penalty parameter is sufficiently large. Using these results, we give an optimality condition for the generalized semi-infinite min-max problem. Furthermore, we discuss the relations between the optimality condition given in this paper and other existing optimality conditions.

Key words: semi-infinite optimization; nonsmooth-optimization; exact penalty

(责任编辑 黄 颖)