L-可约的 Finsler 空间向 C-可约的 Finsler 空间的转化*

童 殷
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047)

摘要:C-可约的 Finsler 空间一定是 L-可约的 Finsler 空间,反之则不然。本文研究反面情形的成立条件,实现了 L-可约的 Finsler 空间向 C-可约的 Finsler 空间的 3 种转化。L-可约的 Finsler 空间,若分别具有迷向 Landsberg 曲率、常曲率,则它能转化为 C-可约的 Finsler 空间;在上述两种情形下,通过对比 Landsberg 曲率和 Cartan 挠率的关系,得到推论:L-可约的 Finsler 空间,若满足 $L_{:0:0}+k(x,y)C=0$,其中 $k(x,\lambda y)=\lambda^3k(x,y)$,则它是 C-可约的。在第二种情形的启发下,考虑到常曲率和标量曲率的关系,最后得到具有标量曲率的 L-可约 Finsler 空间一定是 C-可约的,并得到平均 Cartan 挠率的表达式 $I_k=-\frac{1}{Kf^2}\left(J_{k:0}+\frac{f^2}{3}(n+1)K_{\cdot k}\right)$。

关键词:C-可约;L-可约;迷向 Landsberg 曲率;标量曲率
中图分类号:O186.14 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2009)02-0058-03

近年来,一些学者对 Finsler 空间进行了研究[1-8],对于 $n(\geqslant 3)$ 维的 Finsler 空间 (M,L),L 是 C-可约的当且仅当 L 是 Randers 度量或 Kropina 度量。当 L 是正定的 Finsler 度量,L 是 Randers 度量;当 L 是不定的 Finsler 度量,L 是 Kropina 度量。考虑到 Cartan 挠率和 Landsberg 曲率的密切联系,可以类似定义 L-可约的 Finsler 空间,研究它的性质。

定义 n 维 Finsler 空间 (M,F) 称为是 L-可约的,如果它满足下述条件

1)(M,F) 不是弱 Landsberg 空间;

2)(M,F) 的 Landsberg 曲率具有 $L_{ijk}=\frac{1}{n+1}(h_{ij}J_k+h_{jk}J_i+h_{ki}J_j)$ 形式。

根据定义容易推断,C-可约 Finsler 空间一定是 L-可约的,反过来不一定成立了。下面的定理给出了一些从 L-可约 Finsler 空间向 C-可约 Finsler 空间转化的条件。

定理 1 设 (M,F) 是具有迷向 Landsberg 曲率的 Finsler 空间。(M,F) 是 L-可约的当且仅当 (M,F) 是 C-可约的。在此情形下,F 是 Randers 度量,且其 Douglas 曲率 $D=0$。

证明 充分性显然。

必要性。假设 Finsler 空间 (M,F) 是 L-可约的,则有

$$L_{ijk}=\frac{1}{n+1}(h_{ij}J_k+h_{jk}J_i+h_{ki}J_j) \tag{1}$$

又 (M,F) 具有迷向 Landsberg 曲率,即存在函数 $c=c(x)$ 使得

$$L_{ijk}+cFC_{ijk}=0 \tag{2}$$

将(1)式代入(2)式有

$$cFC_{ijk}=-\frac{1}{n+1}(h_{ij}J_k+h_{jk}J_i+h_{ki}J_j) \tag{3}$$

对上式用 g^{ij} 缩并,得到

$$cFI_k=-J_k \tag{4}$$

将(4)式代入(3)式,化简得

$$C_{ijk}=\frac{1}{n+1}(h_{ij}I_k+h_{jk}I_i+h_{ki}I_j)$$

故 (M,F) 是 C-可约的。

* 收稿日期:2008-03-18 修回日期:2009-02-17
资助项目:重庆师范大学青年教师基金(No. 07XLQ05)
作者简介:童殷,女,讲师,研究方向为微分几何。

由 F 的正定性可得(M,F)是 Randers 空间,而任何具有迷向 Landsberg 曲率的 C-可约 Finsler 空间,其 Douglas 曲率$D=0$。 证毕

定理2 如果 L-可约 Finsler 空间(M,F)具有常曲率 K,则一定是 C-可约的。

证明 具有常曲率 K 的(M,F)一定满足方程

$$L_{ijk:0}+Kf^2C_{ijk}=0 \tag{5}$$

由假设(M,F)是 L-可约的,可得(1)式成立,对(1)式做水平协变微分并关于 y 缩并,注意到 $h_{ij:0}=0$, $h_k^iJ_{i:0}=J_{k:0}$,整理得到

$$L_{ijk:0}=\frac{1}{n+1}(h_{ij}J_{k:0}+h_{jk}J_{i:0}+h_{ki}J_{j:0}) \tag{6}$$

将(6)式带入(5)式得

$$Kf^2C_{ijk}=-\frac{1}{n+1}(h_{ij}J_{k:0}+h_{jk}J_{i:0}+h_{ki}J_{j:0}) \tag{7}$$

用 g^{ij} 作缩并得到

$$J_{k:0}=-Kf^2I_k \tag{8}$$

将(8)式代入(7)式化简,可知(M,F)是 C-可约的。 证毕

推论1 L-可约的 Finsler 空间(M,F),如果满足方程 $L_{000}+k(x,y)C=0$,其中 $k(x,\lambda y)=\lambda^3k(x,y)$,那么它一定是 C-可约的。

值得注意的是,在定理1和定理2中,在 Finsler 空间(M,F)是 L-可约的前提下,条件(M,F)具有迷向 Landsberg 曲率和具有常曲率可能同时成立,这样的空间是存在的,单位球 B_n 上的 Randers 度量 $F=\alpha+\beta$,其中 $\alpha=\frac{\sqrt{|y|^2-(|x|^2|y|^2-\langle x,y\rangle^2)}}{1-|x|^2}$,$\beta=\frac{\langle x,y\rangle}{1-|x|^2}$,就是满足定理1和定理2中条件的一个具体例子。

在定理2中,已经证明了 L-可约的常曲率 Finsler 空间是 C-可约的。在 Finsler 空间中,具有常曲率的空间,一定具有标量曲率。那么,L-可约的具有标量曲率的 Finsler 空间是否是 C-可约,下面这个定理给出了肯定的回答。

定理3 具有标量曲率的 L-可约 Finsler 空间(M,F)一定是 C-可约的,并且

$$I_k=-\frac{1}{Kf^2}\left(J_{k:0}+\frac{f^2}{3}(n+1)K_{\cdot k}\right)$$

证明 (M,F)具有标量曲率 $K=K(x,y)$,即

$$R_k^i=Kf^2h_k^i \tag{9}$$

作垂直协变微分得到

$$R^i_{k\cdot l}=f^2K_{\cdot l}(\delta^i_k-l^il_k)+K(2y_l\delta^i_k-g_{kl}y^i-y_k\delta^i_l)$$

$$R^i_{k\cdot j\cdot l}=K_{\cdot l}(2y_j\delta^i_k-g_{kj}y^i-y_k\delta^i_j)+K_{\cdot j}(2y_l\delta^i_k-g_{kl}y^i-y_k\delta^i_l)+ f^2K_{\cdot j\cdot l}(\delta^i_k-l^il_k)+K(2g_{il}\delta^i_k-2C_{jkl}y^i-g_{kl}\delta^i_j-g_{ik}\delta^i_l)$$

于是有

$$R^i_{jkl}=\frac{1}{3}(R^i_{k\cdot j\cdot l}-R^i_{l\cdot j\cdot k})=\frac{K_{\cdot l}}{3}(2y_j\delta^i_k-g_{kj}y^i-y_k\delta^i_j)-\frac{K_{\cdot k}}{3}(2y_j\delta^i_l-g_{jl}y^i-y_l\delta^i_j)+ \frac{K_{\cdot j\cdot l}}{3}f^2h^i_k-\frac{K_{\cdot j\cdot k}}{3}f^2h^i_l+K_{\cdot j}(y_l\delta^i_k-y_k\delta^i_l)+K(g_{jl}\delta^i_k-g_{jk}\delta^i_l)$$

用 y^l 进行缩并,得到

$$R^i_{jkl}y^l=\frac{2}{3}K_{\cdot j}(f^2\delta^i_k-y_ky^i)+\frac{1}{3}K_{\cdot k}(f^2\delta^i_j-y_jy^i)+K(y_j\delta^i_k-g_{jk}y^i) \tag{10}$$

考虑 Ricci 恒等式

$$L_{ijk:l}-L_{ijl:k}=-\frac{1}{2}g_{pj}R^p_{ikl}-\frac{1}{2}g_{pi}R^p_{jkl}-\frac{1}{2}C_{ijp}R^p_{kl}$$

用 y^l 进行缩并,得到

$$L_{ijk:l}y^l=-\frac{1}{2}g_{pj}R^p_{ikl}y^l-\frac{1}{2}g_{pi}R^p_{jkl}y^l-C_{ijp}R^p_k \tag{11}$$

将(9)、(10)式代入(11)式计算得到

$$L_{ijk:l}y^l=-\frac{1}{3}K_{\cdot k}f^2h_{ij}-\frac{1}{3}K_{\cdot i}f^2h_{kj}-\frac{1}{3}K_{\cdot j}f^2h_{ik}-Kf^2C_{izk} \tag{12}$$

从定理2的证明过程可以看到,若(M,F)是 L-可约的,则有(6)式成立,将(6)式代入(12)式整理得到

$$-Kf^2C_{ijk}=\frac{1}{n+1}\left(h_{ij}\left(J_{k:0}+\frac{n+1}{3}K_{\cdot k}f^2\right)+h_{ik}\left(J_{j:0}+\frac{n+1}{3}K_{\cdot j}f^2\right)+h_{jk}\left(J_{i:0}+\frac{n+1}{3}K_{\cdot i}f^2\right)\right) \tag{13}$$

用 g^{ij} 对(13)式作缩,并注意到 $K=K(x,y)$ 是0阶正齐次的,整理得到

$$J_{k:0}+\frac{n+1}{3}K_{\cdot k}f^2=-Kf^2I_k \tag{14}$$

将(14)式代入(13)式,得到(M,F)是 C-可约的,并且 $I_k=-\frac{1}{Kf^2}\left(J_{k:0}+\frac{f^2}{3}(n+1)K_{\cdot K}\right)$。

由于在Finsler空间中,具有常曲率的空间一定是具有标量曲率的空间,可见定理2可以作为定理3的一类特殊情况。　证毕

参考文献:

[1] Chen X, Mo X, Shen Z. On the flag curvature of Finsler metrics of scalar curvature[J]. J London Math Soc, 2003, 68(2):762-780.

[2] Chen X, Shen Z. Randers metrics with special curvature properties[J]. Osaka Journal of Mathematics, 2003, 40:87-101.

[3] Shen Z. Differential geometry of spray and Finsler spaces[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.

[4] Tong Y, Wang J. Two kinds of Finsler spaces with constant curvature[J]. Journal of Southwest China Normal University (Natual Science), 2005, 30(5):792-795.

[5] Bao D, Shen Z. Finsler metrics of constant curvature on the Lie group S^3[J]. J Lon Math S, 2002, 66:453-467.

[6] Shen Z. Two-dimensional Finsler metrics of constant curvature[J]. Manu Math, 2002, 109(3):349-366.

[7] 黎芳,程新跃. 关于沈度量的几个性质[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2005, 30(4):616-620.

[8] Matsumoto M. Projective changes of Finsler metrics and projectively flat Finsler spaces[J]. Tensor N S, 1980, 34:303-315.

Turn *L*-reducible Finsler Space to Be *C*-reducible Finsler Space

TONG Yin

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: It is well kown that C-reducible Finsler space must be L-reducible Finsler space, but the opposite is not true. This paper studies the conditions for the opposite turning to be true. It contains that under three different conditions the L-reducible Finsler space can turn to be C-reducible Finsler space. Firstly, considering that Finsler space with isotropic Landsberg curvature is related with Cartan torsion and Landsberg curvature, so it may turn to be related with mean Cartan torsion and mean Landsberg curvature, it gets Theorem 1. If the L-reducible Finsler space is with isotropic Landsberg curvature, it must turn to be C-reducible Finsler space. Then, the author studies L-reducible Finsler space with constant curvature, and proves that it can turn to be C-reducible Finsler space too. Under such two cases, through comparson of the relation between the Landsberg curvature and the Cartan torsion, this paper gets a sepecial corollary. If the L-reducible Finsler space satisefies $L_{:0:0}+k(x,y)C=0$, where $k(x,\lambda y)=\lambda^3k(x,y)$, it must be C-reducible Finsler space. At last, being inspired by Theorem 2, the author considers the relation between constant cuvature and scalar cuvature, and finds that L-reducible Finsler space with scalar cuvature is also C-reducible Finsler space, and gets the form of the mean Cartan torsion $I_k=-\frac{1}{Kf^2}\left(J_{k:0}+\frac{f^2}{3}(n+1)K_{\cdot k}\right)$.

Key words: C-reducible; L-reducible; isotropic Landsberg curvature; scalar curvature

(责任编辑　黄　颖)