与分担值相关的亚纯函数的正规性*

阮杰昌[1,2]，邵文凯[2]，顾永兴[1]
(1. 重庆大学 数理学院，重庆 400030；2. 宜宾职业技术学院 基础部，四川 宜宾 644004)

摘要：正规性是单复变函数中的一个重要研究课题,本文主要研究亚纯函数的正规性问题。运用了 Zalcman 引理和正规族的相关理论,研究了与分担值相关的亚纯函数的正规性问题,得到了与分担值相关的结论：设 F 是区域 D 内的亚纯函数族,$a(\neq 0)$ 与 $b(\neq 0)$ 是两个有穷复数,若对 F 中的任意函数 f,有 $f'f=a\Rightarrow f=b$,则 F 在 D 内正规；设 F 是区域 D 内的亚纯函数族,k 是一正整数,$a(\neq 0)$ 与 $b(\neq 0)$ 是两个有穷复数,若对 F 中的任意函数 f,有 $f^{(k)}f=a\Rightarrow f=b$ 和 $f\neq 0$,则 F 在 D 内正规。

关键词：亚纯函数；正规定则；分担值
中图分类号：O174.52　　文献标识码：A　　文章编号：1672-6693(2009)02-0061-02

1 预备知识

正规性是单复变函数中的一个重要研究课题。近年来,把正规族与分担值联系起来成为颇为活跃的研究课题,国内外许多学者对此做出了大量卓有成效的研究工作[1-10]。

设 f 和 g 是区域 D 内的两个亚纯函数,a 是一个复数,若 $f(z)-a$ 与 $g(z)-a$ 在 D 内有相同的零点,则称 f 和 g 在区域 D 内分担 a,或者 IM 分担 a,记为 $f(z)=a\Leftrightarrow g(z)=a$。

定理 1[1]　设 F 是区域 D 内的亚纯函数族,a_1,a_2,a_3 是 3 个相互判别的有穷复数,若对 F 中的任意函数 f,f' 和 f 在 D 内分担 a_1,a_2,a_3,则 F 在 D 内正规。

定理 2[2]　设 F 是区域 D 内的亚纯函数族,k 是一正整数,$a(\neq 0)$ 与 b 是两个有穷复数,若对任意函数 $f(\in F)$,f 的零点重数至少是 k 且 $f(z)f^{(k)}(z)=a\Leftrightarrow f^{(k)}(z)=b$,则 F 在 D 内正规。

定理 3[3]　设 $\{f(z)\}$ 为区域 D 内一全纯函数族,若族中每个函数 $f(z)$ 在 D 内满足 $f(z)\neq 0$ 及 $f^{(k)}(z)-1$ 的零点之级均大于 1,则族 $\{f(z)\}$ 在 D 内正规。

2 主要的引理

引理 1[4]　设 $D=\{z:|Z|<1\}\subset C$ 为一个区域,F 是区域 D 内的亚纯函数族,对 $\alpha(-1<\alpha<1)$,若 F 在 D 内不正规,则存在 1) 点列 $z_n\in D$,$|z_n|<r<1$；2) 函数列 $f_n\in F$；3) 正数列 $\rho_n\to 0^+$。使得函数列 $g_n(\xi)=\rho_n^{-\alpha}f_n(z_n+\rho_n\xi)$ 在 C 上按球距内闭一致收敛于非常数的亚纯函数 $g(\xi)$。

引理 2[4]　设 $D=\{z:|z|<1\}\subset C$ 为一个区域,F 是区域 D 内的亚纯函数,F 中每个函数的零点的重级至少是 k,对每一个 $\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant k)$,若 F 在 D 内不正规,则存在 1) 实数 r,$0<r<1$；2) 点列 $z_n\in D$,$|z_n|<r<1$；3) 函数列 $f_n\in F$；4) 正数列 $\rho_n\to 0^+$。使得函数列 $g_n(\xi)=\rho_n^{-\alpha}f_n(z_n+\rho_n\xi)$ 在 C 上按球距内闭一致收敛于非常数的亚纯函数 $g(\xi)$。

引理 3[5]　设 $g(z)$ 是一亚纯函数,$k(\geqslant 1)$ 是一正整数,a 是一非零复数,若 $g^k(z)g'(z)\neq a$,则 $g(z)\equiv$ 常数。

引理 4[6]　设 $f(z)$ 为复平面 C 上的一个亚纯函数,a 为非零复数,k 为一正整数,若 $f(z)\neq 0$,$f^{(k)}(z)\neq a$,则 $f(z)$ 为一常数。

---

* 收稿日期：2008-10-31　　修回日期：2008-11-14
资助项目：宜宾职业技术学院科研项目(No. 200701)
作者简介：阮杰昌,男,硕士研究生,研究方向为单复变函数；通讯作者：顾永兴,E-mail：yxgu@cqu.edu.cn。

3 主要结论及证明

本文中,笔者得到并证明了如下定理。

定理 1 设 F 是区域 D 内的亚纯函数族,$a\neq 0$ 与 $b\neq 0$ 是两个有穷复数,若对 F 中的任意函数 f,有 $f'f=a\Rightarrow f=b$,则 F 在 D 内正规。

证明 不妨设 $D=\{z:|z|<1\}$。假设 F 在 D 内不正规,由引理 1 知,存在 $f_n\in F$,$z_n\in D$ 和 $\rho_n\to 0^+$,使得 $g_n(\xi)=\rho_n^{-\frac{1}{2}}f_n(z_n+\rho_n\xi)$ 在复平面上按球距内闭一致收敛于非常数的亚纯函数 $g(\xi)$。

可以得到 $g'(\xi)g(\xi)\neq a$。若不然,假设 $g'(\xi_0)g(\xi_0)=a$,则 $g(\xi_0)\neq\infty$。若 $g'(\xi)g(\xi)\equiv a$,则可得到 $\frac{g^2(\xi)}{2}=a\xi+c$($c$ 为一常数),这与 $g(\xi)$ 是亚纯函数矛盾,所以 $g'(\xi)g(\xi)\not\equiv a$。由 Hurwitz 定理得,存在 $\xi_n(\xi_n\to\xi_0)$,使得当 n 充分大时有

$$a=g'_n(\xi_n)g(\xi_n)=f'_n(z_n+\rho_n\xi_n)f_n(z_n+\rho_n\xi_n)$$

由条件得
$$f_n(z_n+\rho_n\xi_n)=b,\ g_n(\xi)=\rho_n^{-\frac{1}{2}}f_n(z_n+\rho_n\xi_n)=\rho_n^{-\frac{1}{2}}b$$

两边取极限得
$$g(\xi_0)=\lim_{n\to\infty}g_n(\xi_n)=\lim_{n\to\infty}\rho_n^{-\frac{1}{2}}b=\infty$$

这与 $g(\xi_0)\neq\infty$ 矛盾。所以 $g'(\xi)g(\xi)\neq a$,由引理 3 可知 $g(\xi)$ 必为常数,这与前面的假设 $g(\xi)$ 非常数相矛盾,所以 F 在 D 内正规。 证毕

定理 2 设 F 是区域 D 内的亚纯函数族,k 是一正整数,$a(\neq 0)$ 与 $b(\neq 0)$ 是两个有穷复数,若对 F 中的任意函数 f,有 $f^{(k)}=a\Rightarrow f=b$ 和 $f\neq 0$,则 F 在 D 内正规。

证明 不妨设 $D=\{z:|z|<1\}$。因为 F 中的函数均不取零点,所以他们的零点的级为无穷大。假设 F 在 D 内不正规,则由引理 2 知,存在 $f_n\in F$,$z_n\in D$ 和 $\rho_n\to 0^+$,使得 $g_n(\xi)=\rho_n^{-k}f_n(z_n+\rho_n\xi)$ 在复平面上按球距内闭一致收敛于非常数的亚纯函数 $g(\xi)$,显然 $g(\xi)\neq 0$。

可以得到 $g^{(k)}(\xi)\neq a$。否则,假设 $g^{(k)}(\xi)\equiv a(a\neq 0)$,则 $g(\xi)=\frac{a(\xi-\xi_0)^k}{k!}$,这与 $g(\xi)\neq 0$ 矛盾,所以 $g^{(k)}(\xi)\not\equiv a$。

假设 $\exists\xi_0$,使得 $g^{(k)}(\xi_0)=a$,即可得 $g(\xi_0)\neq\infty$。则由 Hurwitz 定理得,存在 $\xi_n(\xi_n\to\xi_0)$,使得当 n 充分大时,有 $g_n^{(k)}(\xi_n)=f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\xi_n)=a$,再由条件 $f^{(k)}=a\Rightarrow f=b$,可得 $g_n(\xi_n)=\frac{f_n(z_n+\rho_n\xi_n)}{\rho_n^k}$,故 $g(\xi_0)=\lim_{n\to\infty}g_n(\xi_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{\rho_n^k}=\infty$,这与前面的假设 $g(\xi_0)\neq\infty$ 矛盾,即 $g^{(k)}(\xi)\neq a$。由引理 4 得 $g(\xi)$ 为一常数,矛盾。所以 F 在 D 内正规。 证毕

参考文献:

[1] Schwick W. Sharig values and normality[J]. Arch Math,1992,59:50-54.
[2] Fang M L,Zalcman L. Normal families and shared values of meromorphic functions Ⅱ[J]. Comput Methods Funct Theory,2001,1(1):289-299.
[3] 熊庆来,何育赞. Sur les valeurs multiples des functions meromorphes et de leurs derivees[J]. Sci Sicica,1961,10:267-285.
[4] 顾永兴. 正规族理论及其应用[M]. 北京:科学出版社,2007.
[5] Bergweiler W,Eremenko A. On the singularities of the inverse to a meromorphic function of finite order[J]. Rev Mat Iberoamericana,1995,11:355-373.
[6] Hayman W K. Meromorphic function[M]. Oxford:Clarendon Press,1964.
[7] 夏玉玲. 涉及微分多项式的纯函数的正规族[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2007,23(2):29-31.
[8] 黄玉才. 分担值和正规族[J]. 西南大学学报(自然科学版),2008,30(2):39-42.
[9] 谢莉,张征,黄穗. 关于亚纯函数的正规定则[J]. 西华师范大学学报(自然科学版),2006,27(1):71-73.

Normal Families and Shared Values of Meromorphic Functions

RUAN Jie-chang[1,2], *SHAO Wen-kai*[2], *GU Yong-Xing*[1]

(1. College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400030;

2. Basic Education Department, Yibin Vocational & Technical College, Yibin Sichuan 644003, China)

Abstract: In recent years, normal families with sharing values has been becoming an activated subject. Much work was made on this respect by using mainly the Navelinna 's value distribution theory and the theory of normal families of mermorphic functions. A series of normality criteria are attained, such as the normality criterion concerning sharing sets, sharing a value and sharing functions. In this paper, we do a further study in normal families of mermorphic functions on sharing values, which is an important subject in complex analysis. We have got the two following theorems. Let F be a family of meromorphic functions in a area D, a $(\neq 0)$ and $b(\neq 0)$ are two limited complex numbers, if $\forall f \in F, f'f = a \Rightarrow f = b$, then F is normal. Let F be a family of meromorphic functions in a area D, $a(\neq 0)$ and $b(\neq 0)$ are two limited complex numbers, if $\forall f \in F, f^{(k)}f = a \Rightarrow f = b$ and $f \neq 0$, then F is normal.

Key words: meromorphic function; normal criteria; shared values

(责任编辑 黄 颖)