关于不定方程 $x^3+1=2py^2$ *

冯 国 锋[1,2]

(1. 重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047;2. 重庆职业技术学院 基础教学部,重庆 400712)

摘　要:利用递归数列和同余式证明不定方程 $x^3+1=2py^2$ 在 $p\equiv 5(\mathrm{mod}8)$ 的条件下,仅有整数解 $(x,y)=(-1,0)$。

关键词:不定方程;整数解;同余式

中图分类号:O156　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2006)04-0028-02

On the Diophantine Equation $x^3+1=2py^2$

FENG Guo-feng[1,2]

(1. College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047;
2. Dept. of Basic Instruction, Chongqing Vocational & Technical College, Chongqing 400712, China)

Abstract: In this paper we have proved that the only solution in integers of the equation in the title is $(x,y)=(-1,0)$ if and only if $p=5(\mathrm{mod}8)$.

Key words: diophantine equations; integer solution; congruence

关于不定方程 $x^3\pm 1=Dy^2(D>0)$ 已有不少研究工作。当 D 无 $6k+1$ 的素因数时,其全部整数解已由柯召、孙琦、曹珍富等人得到。但当 D 有 $6k+1$ 的素因数时,方程的求解较为困难。1991 年,王镇江和佟瑞洲[1] 证明了 $x^3+1=13y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(-1,0)$;1995 年,罗明[2] 证明了 $x^3+8=7y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(-2,0),(-1,\pm 1),(10,\pm 12)$;2003 年,罗明[3] 证明了 $x^3+1=14y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(-1,0),(5,\pm 3)$,同时证明了 $x^3+1=7y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(-1,0),(3,\pm 2)$[4]。本文将利用递归数列和同余式证明不定方程 $x^3+1=2py^2$ 在 $p\equiv 5(\mathrm{mod}8)$ 的条件下,仅有整数解 $(x,y)=(-1,0)$。

引理 1[5]　$x^2-3y^4=1$ 有整数解 $(x,y)=(2,1),(7,2),(1,0),(-1,0)$。

引理 2[5]　$4x^4-3y^2=1$ 有整数解 $(x,y)=(1,1),(-1,-1),(1,-1),(-1,1)$。

定理　　$x^3+1=2py^2$　　(1)

在 $p\equiv 5(\mathrm{mod}8)$ 的条件下,仅有整数解 $(x,y)=(-1,0)$。

证明　因为 $(x+1,x^2-x+1)=1$ 或 3,方程(1)式给出下面 4 种可能的分解。

1) $x+1=2pz^2,x^2-x+1=w^2,y=zw$

由第二式解得 $x=0,1$,均不合第一式,故无解。

2) $x+1=2z^2,x^2-x+1=pw^2,y=zw$

因为 $p\equiv 5(\mathrm{mod}8)$,若 $2\mid z$,则 $x\equiv -1(\mathrm{mod}8)$,从而 $3\equiv 5w^2(\mathrm{mod}8)$,不可能。若 $2\nmid z$,则 $x\equiv 1(\mathrm{mod}8)$,从而 $1\equiv 5w^2(\mathrm{mod}8)$,也不可能,故无解。

3) $x+1=6pz^2,x^2-x+1=3w^2,y=3zw$

第二式化为 $(2w)^2-3\left(\frac{2x-1}{3}\right)^2=1$,再将第一式代入即得 $(2w)^2-3(4pz^2-1)^2=1$。因此

$$|2w|+(4pz^2-1)\sqrt{3}=r_n+s_n\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^n,n\in\mathbf{Z},$$

其中 $2+\sqrt{3}$ 是 Pell 方程 $x^2-3y^2=1$ 的基本解。所以 $4pz^2=s_n+1,n\in\mathbf{Z}$。因为 $2\mid n$ 时,$2\mid s_n$,$4pz^2=s_n+1$ 不可能成立。又当 $n\equiv 1(\mathrm{mod}4)$ 时,$s_n\equiv 1(\mathrm{mod}8)$,这导致 $4pz^2\equiv 2(\mathrm{mod}8)$,也不可能。因此仅考虑 $n\equiv -1(\mathrm{mod}4)$。令 $n=4m-1$,有

$$4pz^2=s_{4m-1}+1=-r_{4m}+2s_{4m}+1=$$

* 收稿日期:2006-03-29
作者简介:冯国锋(1971-),男,四川达州人,硕士,研究方向为应用数学。

$$-(1+6s_{2m}^2)+4r_{2m}s_{2m}+1=2(2r_{2m}-3s_{2m})s_{2m}$$

所以有 $2pz^2=r_{2m-1}s_{2m}$，又因为

$$(r_{2m-1},s_{2m})=(2r_{2m}-3s_{2m},s_{2m})=(2r_{2m},s_{2m})=(2,s_{2m})=2;$$

有 $$r_{2m-1}=a^2,s_{2m}=2pb^2 \quad (2)$$

或 $$r_{2m-1}=2pa^2,s_{2m}=b^2 \quad (3)$$

或 $$r_{2m-1}=2a^2,s_{2m}=pb^2 \quad (4)$$

或 $$r_{2m-1}=pa^2,s_{2m}=2b^2 \quad (5)$$

其中 $z=ab$。由于 $2\nmid z$ 时，$r_n\equiv 2(\mathrm{mod}4)$ 可知（2）式和（5）式的前式均不成立，故可以将（2）式和（5）式排除。

由（3）式的后式得

$$r_{2m}^2-3b^4=1 \quad (6)$$

根据引理1知（6）式有整数解 $(r_{2m},b)=(2,1)$ 或 $(7,2)$ 或 $(1,0)$ 或 $(-1,0)$，但 $2\mid s_{2m}$，由（3）式知 $2\mid b^2$，从而 $b=2$ 或 0，当 $b=0$ 时，即 $s_{2m}=0$，从而 $m=0$，但不适合（3）式的前式，故 $b\neq 0$，当 $b=2$ 时，$s_{2m}=4$，即 $m=1$，不满足（3）式的前式，故 $b\neq 2$，所以（3）式无解。

将（4）式的前式代入 $r_{2m-1}^2-3s_{2m-1}^2=1$，得

$$4a^4-3s_{2m-1}^2=1 \quad (7)$$

根据引理2知，（7）式有整数解 $(a,s_{2m-1})=(1,1)$ 或 $(1,-1)$ 或 $(-1,1)$ 或 $(-1,-1)$，从而有 $s_{2m-1}=\pm 1$，即 $m=0$ 或 1，当 $m=1$ 时不满足（4）式后式，故 $m\neq 1$，当 $m=0$ 时，（4）式后式中 $b=0$，从而 $z=0$，代入到情形3）中即得（1）式的平凡解 $(x,y)=(-1,0)$。

综上所述，情形3）给出（1）式的平凡解 $(x,y)=(-1,0)$。

4）$x+1=6z^2,x^2-x+1=3pw^2,y=3zw$

因为 $p\equiv 5(\mathrm{mod}8)$，若 $2\mid z$，则 $x\equiv -1(\mathrm{mod}8)$，从而 $3\equiv 7w^2(\mathrm{mod}8)$，不可能。若 $2\nmid z$，则 $x\equiv 1(\mathrm{mod}8)$，从而 $1\equiv 7w^2(\mathrm{mod}8)$，也不可能，故无解。

综上所述，则证明了定理。 证毕

致谢：本文得到罗明教授的悉心指导，特此感谢！

参考文献：

[1] 王镇江，佟瑞洲．关于丢番图方程 $X^3+1=13Y^2$，$XY\neq 0$［J］．黑龙江大学学报（自然科学版），1991（4）：48-50.

[2] 罗明．关于不定方程 $x^3+8=7y^2$［J］．重庆师范学院学报（自然科学版），1995，12（3）：29-31.

[3] 罗明．关于不定方程 $X^3+1=14Y^2$［J］．重庆交通学院学报，1995（3）：112-115.

[4] 罗明．关于不定方程 $x^3+1=7y^2$［J］．重庆师范学院学报（自然科学版），2003，20（1）：5-7.

[5] 曹珍富．丢番图方程引论［M］．哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，1989.

（责任编辑 黄 颖）