运筹学与控制论

DOI:10.3969/J. ISSN. 1672-6693. 2010. 01. 002

一类非光滑规划问题的 Mond Weir 和 Wolf 对偶*

赵克全, 罗 杰, 唐莉萍
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院, 重庆 400047)

摘要:本文考虑带等式和不等式约束的非光滑 B-(p,r) 单目标规划的对偶问题,研究了函数 $\lambda f+\sum_{i=1}^{m}\mu_i g_i+\sum_{j=1}^{p}v_j h_j$ 为严格 B-(p,r) 不变凸性条件下 Mond Weri 对偶模型的弱对偶、强对偶、逆对偶和严格逆对偶,函数 $f+\sum_{i=1}^{m}\mu_i g_i+\sum_{j=1}^{p}v_j h_j$ 为 B-(p,r) 不变凸性条件下 Wolf 对偶模型的弱对偶和强对偶以及严格 B-(p,r) 不变凸性条件下限制逆对偶和严格逆对偶。在无约束规格的条件下证明了该类非光滑规划问题的 Mond Weir 和 Wolf 对偶模型相应的对偶性结果。本文的结果是对最近一些文献中相应结果的改进与完善。

关键词:B-(p,r) 不变凸性;Mond Weir 对偶;Wolf 对偶;非光滑规划
中图分类号:O221.2;O172.2 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2010)01-0007-04

凸性的推广及其应用是数学规划与最优化理论中十分重要的研究内容,近年来,许多作者研究了凸性概念的多种推广形式[1-8]。特别地,非光滑情形的广义凸性已成为数学规划与最优化研究的热点之一。文献[1]中,张莹等人给出了非光滑 B-(p,r) 不变凸函数—Lipschitz B-(p,r) 不变凸函数的定义,并在 Lipschitz B-(p,r) 不变凸性及一些约束规格条件下,建立了一类非光滑规划问题的最优性条件和对偶结果。

本文在文献[1]的基础上进一步研究带等式和不等式约束的非光滑 B-(p,r) 规划问题的对偶性结果。在无约束规格的条件下研究了该类非光滑规划问题的 Mond Weir 和 Wolf 对偶模型的弱对偶、强对偶和逆对偶等对偶性结果。

1 预备知识

定义 1[5] 设 X 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开子集,称函数 $f:X\to\mathbf{R}^n$ 在 X 上是 Lipschitz 的。若存在常数 $K>0$, $\forall y, z\in X$, $|f(y)-f(z)|\leqslant K\|y-z\|$。

定义 2[5] 设 $f:X\to\mathbf{R}$ 是 Lipschitz 的, $v\in\mathbf{R}^n$, 定义 $f^0(x,v)$ 为 f 在 x 处沿方向 v 的广义 Clarke 导数 $f^0(x,v)=\lim\limits_{y\to x}\sup\limits_{\lambda\downarrow 0}\dfrac{f(y+\lambda v)-f(y)}{\lambda}$。

定义 3[5] 设 $f:X\to\mathbf{R}$ 是 Lipschitz 的, f 在 $x\in X$ 处的广义 Clarke 梯度定义为 $\partial f(x)$, 并记为 $\partial f(x)=\{\xi\in\mathbf{R}^n: f^0(x,v)\geqslant\xi^{\mathrm{T}}v,\forall v\in\mathbf{R}^n\}$。

定义 4[1] 设 p 和 r 是给定的实数, $f:X\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是 Lipschitz 函数, 称 f 在 $u\in X$ 处关于 η 和 b (严格) Lipschitz B-(p,r)-不变凸, 如果存在 $\eta: X\times X\to\mathbf{R}^n$ 和 $b: X\times X\to\mathbf{R}_+$, $\forall x\in X$, $\xi\in\partial^0 f(u)$, 有

$$\frac{1}{r}b(x,u)\left(\mathrm{e}^{r(f(x)-f(u))}-1\right)\geqslant\frac{1}{p}\xi\left(\mathrm{e}^{p\cdot\eta(x,u)}-1\right),(>,x\neq u),(p\neq 0,r\neq 0)$$

$$\frac{1}{r}b(x,u)\left(\mathrm{e}^{r(f(x)-f(u))}-1\right)\geqslant\xi\cdot\eta(x,u),(>,x\neq u),(p=0,r\neq 0)$$

$$b(x,u)(f(x)-f(u))\geqslant\frac{1}{p}\xi\left(\mathrm{e}^{p\cdot\eta(x,u)}-1\right),(>,x\neq u),(p\neq 0,r=0)$$

$$b(x,u)(f(x)-f(u))\geqslant\xi\cdot\eta(x,u),(>,x\neq u),(p=0,r=0)$$

* 收稿日期:2009-06-01 修回日期:2009-09-29
资助项目:重庆师范大学青年基金(No. 08XLQ01)
作者简介:赵克全,男,讲师,硕士,研究方向为非光滑规划理论。

称 f 在 X 上关于 η 和 b (严格) Lipschitz B -(p,r)- 不变凸,如果 $\forall u \in X$, f 是关于 η 和 b (严格) Lipschitz B -(p,r)- 不变凸的。

本文考虑如下非光滑规划问题 (P) $\min f(x)$

$$\text{s.t. } g_i(x) \leqslant 0, i \in I = \{1,\cdots,m\}, h_j(x) = 0, j \in J = \{1,\cdots,p\}$$

其中 $X \subset \mathbf{R}^n$, $f: X \to \mathbf{R}$, $g_i: X \to \mathbf{R}, i \in I$, $h_j: X \to \mathbf{R}, j \in J$ 是 Lipschitz 函数。

记 $D = \{x \in X, g_i(x) \leqslant 0, h_j(x) = 0, i \in I, j \in J\}$,显然 D 是该规划问题的可行域。

2 相关对偶结果

首先考虑问题(P)的 Mond-Weir 型对偶问题

(MWD) $\max f(y)$

$$\text{s.t. } 0 \in \partial\left(\lambda f + \sum_{i=1}^m \mu_i g_i + \sum_{j=1}^p v_j h_j\right)(y), \sum_{i=1}^m \mu_i g_i(y) \geqslant 0$$

$$\lambda \in \mathbf{R}_+, \mu_i \in \mathbf{R}_+, i = 1,\cdots,m, v_j \in \mathbf{R}, j = 1,\cdots,p, (\lambda,\mu,v) \neq 0$$

定理 1 (弱对偶定理) 设 x 和 (y,λ,μ,v) 分别是问题(P),(MWD) 的可行解。如果 $\lambda f + \sum_{i=1}^m \mu_i g_i + \sum_{j=1}^p v_j h_j$ 在 $y \in D$ 处是关于 η 和 b 的严格 B-(p,r)- 不变凸函数,那么 $f(x) \geqslant f(y)$。

证明 如果 $x = y$,定理显然成立。下面考虑 $x \neq y$ 的情况。反设 $f(x) < f(y)$,则

$$\lambda(f(x) - f(y)) \leqslant 0 \tag{1}$$

因为 $\lambda f + \sum_{i=1}^m \mu_i g_i + \sum_{j=1}^p v_j h_j$ 在 $y \in D$ 处是关于 η 和 b 的严格 B-(p,r)- 不变凸函数,所以对

$$\forall \xi \in \partial\left(\lambda f + \sum_{i=1}^m \mu_i g_i + \sum_{j=1}^p v_j h_j\right)(y)$$

有

$$\frac{1}{r} b(x,y)\left(\mathrm{e}^{r\left[\left(\lambda f + \sum_{i=1}^m \mu_i g_i + \sum_{j=1}^p v_j h_j\right)(x) - \left(\lambda f + \sum_{i=1}^m \mu_i g_i + \sum_{j=1}^p v_j h_j\right)(y)\right]} - 1\right) > \frac{1}{p}\xi\left(\mathrm{e}^{p \cdot \eta(x,y)} - 1\right)$$

由于 (y,λ,μ,v) 是问题(MWD) 的可行解,则 $0 \in \partial\left(\lambda f + \sum_{i=1}^m \mu_i g_i + \sum_{j=1}^p v_j h_j\right)(y)$。

因此

$$\left(\lambda f + \sum_{i=1}^m \mu_i g_i + \sum_{j=1}^p v_j h_j\right)(x) > \left(\lambda f + \sum_{i=1}^m \mu_i g_i + \sum_{j=1}^p v_j h_j\right)(y)$$

$$\lambda(f(x) - f(y)) > \sum_{i=1}^m \mu_i g_i(y) + \sum_{j=1}^p v_j h_j(y) - \left(\sum_{i=1}^m \mu_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p v_j h_j(x)\right) \geqslant 0$$

这与(1)式矛盾。 证毕

定理 2 (强对偶定理) 设 $\bar{x} \in D$ 是(P) 的最优解。若 $\lambda f + \sum_{i=1}^m \mu_i g_i + \sum_{j=1}^p v_j h_j$ 在 D 上是关于 η 和 b 的严格 B-(p,r)- 不变凸函数,存在 $\bar{\lambda} \geqslant 0$, $\bar{\mu} \in \mathbf{R}_+^m$, $\bar{v} \in \mathbf{R}^p$,使得 $(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{v})$ 是问题(MWD) 的最优解,且问题与(MWD)的最优值相等。

证明 设 x 和 (y,λ,μ,v) 分别是问题(P),(MWD)的可行解。如果 $x = y$,定理显然成立。所以只需考虑 $x \neq y$ 的情况。

由定理 1 知 $f(\bar{x}) = \min f(x) \geqslant \max f(y) \geqslant f(\bar{x})$,结论得证。 证毕

定理 3 (逆对偶定理) 设 $(\bar{y},\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{v})$ 是问题(MWD) 的最优解且 $\bar{y} \in D$。如果 $\lambda f + \sum_{i=1}^m \mu_i g_i + \sum_{j=1}^p v_j h_j$ 在 $\bar{y} \in D$ 上是关于 η 和 b 的严格 B-(p,r)- 不变凸函数,那么 $\bar{y}$ 是问题(P) 的最优解。

证明 反设 $\bar{y}$ 不是问题(P)的最优解。则存在 $\tilde{x} \in D$ 使得 $f(\tilde{x}) < f(\bar{y})$。则

$$\bar{\lambda}(f(\tilde{x}) - f(\bar{y})) \leqslant 0 \tag{2}$$

由于 $\bar\lambda f+\sum_{i=1}^{m}\bar\mu_i g_i+\sum_{j=1}^{p}\bar v_j h_j$ 在 $\bar y\in D$ 上是关于 η 和 b 的严格 B-(p,r)-不变凸函数，所以对

$$\forall\xi\in\partial\Big(\bar\lambda f+\sum_{i=1}^{m}\bar\mu_i g_i+\sum_{j=1}^{p}\bar v_j h_j\Big)(\bar y)$$

有
$$\frac{1}{r}b(\tilde x,\bar y)\left(e^{r\left[\left(\bar\lambda f+\sum_{i=1}^{m}\bar\mu_i g_i+\sum_{j=1}^{p}\bar v_j h_j\right)(\tilde x)-\left(\bar\lambda f+\sum_{i=1}^{m}\bar\mu_i g_i+\sum_{j=1}^{p}\bar v_j h_j\right)(\bar y)\right]}-1\right)>\frac{1}{p}\xi\left(e^{p\cdot\eta(\tilde x,\bar y)}-1\right)$$

由于$(\bar y,\bar\lambda,\bar\mu,\bar v)$是问题(MWD)的最优解，则 $0\in\partial\Big(\bar\lambda f+\sum_{i=1}^{m}\bar\mu_i g_i+\sum_{j=1}^{p}\bar v_j h_j\Big)(\bar y)$。

因此
$$\Big(\bar\lambda f+\sum_{i=1}^{m}\bar\mu_i g_i+\sum_{j=1}^{p}\bar v_j h_j\Big)(\tilde x)>\Big(\bar\lambda f+\sum_{i=1}^{m}\bar\mu_i g_i+\sum_{j=1}^{p}\bar v_j h_j\Big)(\bar y)$$

$$\bar\lambda\big(f(\tilde x)-f(\bar y)\big)>\sum_{i=1}^{m}\bar\mu_i g_i(\bar y)+\sum_{j=1}^{p}\bar v_j h_j(\bar y)-\Big(\sum_{i=1}^{m}\bar\mu_i g_i(\tilde x)+\sum_{j=1}^{p}\bar v_j h_j(\tilde x)\Big)\geqslant 0$$

这与(2)式矛盾。　　证毕

定理 4　(严格逆对偶定理) 设 $\bar x$ 和$(\bar y,\bar\lambda,\bar\mu,\bar v)$分别是(P)，(MWD)的最优解，使得

$$\bar\lambda f(\bar x)\leqslant\bar\lambda f(\bar y)+\sum_{i=1}^{m}\mu_i g_i(\bar y)+\sum_{j=1}^{p}v_j h_j(\bar y)\tag{3}$$

如果 $\lambda f+\sum_{i=1}^{m}\mu_i g_i+\sum_{j=1}^{p}v_j h_j$ 在 $\bar y\in D$ 处是关于 η 和 b 的严格 B-(p,r)-不变凸函数，那么 $\bar x=(\bar y)$，且$(\bar y)$是(P)的最优解。

证明　利用反证法证明。反设 $\bar x\neq\bar y$，由假设 $\bar\lambda f+\sum_{i=1}^{m}\bar\mu_i g_i+\sum_{i=1}^{p}\bar v_j h_j$ 在 $\bar y\in D$ 处是关于 η 和 b 的严格 B-(p,r)-不变凸函数，则对
$$\forall\xi\in\partial\Big(\bar\lambda f+\sum_{i=1}^{m}\bar\mu_i g_i+\sum_{j=1}^{p}\bar v_j h_j\Big)(\bar y)$$

有
$$\frac{1}{r}b(\bar x,\bar y)\left(e^{r\left[\left(\bar\lambda f+\sum_{i=1}^{m}\bar\mu_i g_i+\sum_{j=1}^{p}\bar v_j h_j\right)(\bar x)-\left(\bar\lambda f+\sum_{i=1}^{m}\bar\mu_i g_i+\sum_{j=1}^{p}\bar v_j h_j\right)(\bar y)\right]}-1\right)>\frac{1}{p}\xi\left(e^{p\cdot\eta(\bar x,\bar y)}-1\right)$$

因为$(\bar y,\bar\lambda,\bar\mu,\bar v)$分别是问题(P)，(MWD)的最优解，所以 $0\in\partial\Big(\bar\lambda f+\sum_{i=1}^{m}\bar\mu_i g_i+\sum_{j=1}^{p}\bar v_j h_j\Big)(\bar y)$，故

$$\Big(\bar\lambda f+\sum_{i=1}^{m}\bar\mu_i g_i+\sum_{j=1}^{p}\bar v_j h_j\Big)(\bar x)>\Big(\bar\lambda f+\sum_{i=1}^{m}\bar\mu_i g_i+\sum_{j=1}^{p}\bar v_j h_j\Big)(\bar y)$$

因此 $\bar\lambda f(\bar x)>\bar\lambda f(\bar y)+\sum_{i=1}^{m}\bar\mu_i g_i(\bar y)+\sum_{j=1}^{p}v_j h_j(\bar y)$，这与(3)式矛盾。　　证毕

下面讨论 Wolf 对偶模型

$$\begin{aligned}&(\mathrm{D})\max\varphi(y,\mu,v)=f(y)+\sum_{i=1}^{m}\mu_i g_i(y)+\sum_{j=1}^{p}v_j h_j(y)\\&\text{s. t. }0\in\partial\Big(f+\sum_{i=1}^{m}\mu_i g_i+\sum_{j=1}^{p}v_j h_j\Big)(y)\\&\mu_i\in\mathbf{R}_+,i=1,\cdots,m,v_j\in\mathbf{R},j=1,\cdots,p\end{aligned}$$

定理 5　(弱对偶定理) 设 x 和(y,μ,v)分别是问题(P)，(D)的可行解。如果 $f+\sum_{i=1}^{m}\mu_i g_i+\sum_{j=1}^{p}v_j h_j$ 在 $y\in D$ 处是关于 η 和 b 的 B-(p,r)-不变凸函数，那么 $f(x)\geqslant\varphi(y,\mu,v)$。

证明　因 $f+\sum_{i=1}^{m}\mu_i g_i+\sum_{j=1}^{p}v_j h_j$ 在 $y\in D$ 处关于 η 和 b 为严格 B-(p,r)-不变凸函数，则 $\forall\xi\in\partial\Big(\lambda f+\sum_{i=1}^{m}\mu_i g_i+\sum_{j=1}^{p}v_j h_j\Big)(\bar y)$，有

$$\frac{1}{r}b(x,y)\left(e^{r\left[\left(f+\sum_{i=1}^{m}\mu_i g_i+\sum_{j=1}^{p}v_j h_j\right)(x)-\left(f+\sum_{i=1}^{m}\mu_i g_i+\sum_{j=1}^{p}v_j h_j\right)(y)\right]}-1\right)\geqslant\frac{1}{p}\xi\left(e^{p\cdot\eta(x,y)}-1\right)$$

因为(y,μ,v)是问题(D)的可行解,所以$0\in\partial\left(f+\sum_{i=1}^{m}\mu_ig_i+\sum_{j=1}^{p}v_jh_j\right)(y)$。故

$$\left(f+\sum_{i=1}^{m}\mu_ig_i+\sum_{j=1}^{p}v_jh_j\right)(x)\geqslant\left(f+\sum_{i=1}^{m}\mu_ig_i+\sum_{j=1}^{p}v_jh_j\right)(y)$$

而x是问题(P)的可行解,则$f(x)\geqslant f(y)+\sum_{i=1}^{m}\mu_ig_i(y)+\sum_{j=1}^{p}v_jh_j(y)$,从而$f(x)\geqslant\varphi(y,\mu,v)$。　　证毕

定理6　(强对偶定理)设$\bar{x}\in D$是问题(P)的最优解,且$\sum_{i=1}^{m}\mu_ig_i+\sum_{j=1}^{p}v_jh_j$在$D$上是关于$\eta$和$b$的严格B-$(p,r)$-不变凸函数,则存在$\bar{\mu}\in\mathbf{R}_+^m$,$\bar{v}\in\mathbf{R}^p$,使得$(\bar{x},\bar{\mu},\bar{v})$是问题(MWD)的可行解且问题(P),(D)的最优值在这两点处相等。并且如果$\lambda f+\sum_{i=1}^{m}\mu_ig_i+\sum_{j=1}^{p}v_jh_j$在$D$上是关于$\eta$和$b$的B-$(p,r)$-不变凸函数,则$(\bar{x},\bar{\mu},\bar{v})$是问题(D)的最优解。

证明与定理2是类似的。

定理7　(限制逆对偶定理)设$\bar{x}$和$(\bar{y},\bar{\mu},\bar{v})$是分别问题(P),(D)的可行解,使得$f(\bar{x})=\varphi(\bar{y},\bar{\mu},\bar{v})$。如果$f+\sum_{i=1}^{m}\mu_ig_i+\sum_{j=1}^{p}v_jh_j$在$\bar{y}\in D$上是关于$\eta$和$b$的严格B-$(p,r)$-不变凸函数,那么$\bar{x}$和$(\bar{y},\bar{\mu},\bar{v})$分别是问题(P),(D)的最有解。

证明　反设$\bar{x}$不是问题(P)的最优解,则存在$\tilde{x}\in D$,使得$f(\tilde{x})<f(\bar{x})$。因为$(\bar{y},\bar{\mu},\bar{v})$是问题(D)的可行解且$f(\bar{x})=\varphi(\bar{y},\bar{\mu},\bar{v})$,则有$f(\tilde{x})<f(\bar{y})+\sum_{i=1}^{m}\mu_ig_i(\bar{y})+\sum_{j=1}^{p}v_jh_j(\bar{y})$,因此

$$f(\tilde{x})+\sum_{i=1}^{m}\mu_ig_i(\tilde{x})+\sum_{j=1}^{p}v_jh_j(\tilde{x})<f(\bar{y})+\sum_{i=1}^{m}\mu_ig_i(\bar{y})+\sum_{j=1}^{p}v_jh_j(\bar{y})$$

而$f+\sum_{i=1}^{m}\mu_ig_i+\sum_{j=1}^{p}v_jh_j$在$\bar{y}\in D$上是关于$\eta$和$b$的严格B-$(p,r)$-不变凸函数,则有$0\notin\partial\left(f+\sum_{i=1}^{m}\mu_ig_i+\sum_{j=1}^{p}v_jh_j\right)(\bar{y})$。这就与$(\bar{y},\bar{\mu},\bar{v})$是问题(D)的可行解矛盾。　　证毕

定理8　(严格逆对偶定理)设$\bar{x}$和$(\bar{y},\bar{\mu},\bar{v})$分别是问题(P),(D)的最优解,使得$f(\bar{x})\leqslant f(\bar{y})+\sum_{i=1}^{m}\bar{\mu}_ig_i(\bar{y})+\sum_{j=1}^{p}\bar{v}_jh_j(\bar{y})$。如果$f+\sum_{i=1}^{m}\mu_ig_i+\sum_{j=1}^{p}v_jh_j$在$\bar{y}\in D$处是关于$\eta$和$b$的严格B-$(p,r)$-不变凸函数,那么$\bar{x}=\bar{y}$,且$f(\bar{x})=\varphi(\bar{y},\bar{\mu},\bar{v})$。

证明　假设$\bar{x}\neq\bar{y}$。由假设$f+\sum_{i=1}^{m}\mu_ig_i+\sum_{j=1}^{p}v_jh_j$在$\bar{y}\in D$处是关于$\eta$和$b$的严格B-$(p,r)$-不变凸函数,$(\bar{y},\bar{\mu},\bar{v})$是问题(D)的最优解,则有

$$f(\bar{x})\geqslant\left(f+\sum_{i=1}^{m}\bar{\mu}_ig_i+\sum_{j=1}^{p}\bar{v}_jh_j\right)(\bar{x})>\left(f+\sum_{i=1}^{m}\bar{\mu}_ig_i+\sum_{j=1}^{p}\bar{v}_jh_j\right)(\bar{y})$$

与已知矛盾。　　证毕

3 结束语

本文在非可微B-(p,r)-预不变凸性条件下,建立了带等式和不等式约束的非光滑规划B-(p,r)不变凸规划问题的Mond-Weir型对偶模型和Wolf型对偶模型的弱对偶、强对偶和逆对偶等对偶性结果。本文的结果是对文献[1]中结果的丰富与完善。

参考文献:

[1] Zhang Y,Zhu B,Xu Y T. A class of Lipschitz B-(p,r)-invex functions and nonsmooth programming[J]. OR Transactions,2009,13:61-71.

[2] Jeyakumar V. Equivalence of a saddle-points and optima, and duality for a class of non-smooth nonconvex problems[J]. JMAA,1988,130:334-343.

[3] Kaul R N, Suneja S K, Lalitha C S. Generalized nonsmooth invexity[J]. J Inf Optim Sci, 1994, 15: 1-17.
[4] Antczak T. Multiobjective programming under d-invexity [J]. Eur J Oper Res, 2002, 137: 28-36.
[5] Clarke F H. Optimization nonsmooth analysis [M]. New York: John Wiely, 1983.
[6] Antczak T. A class of B-(p,r)-invex functions and mathematical programming[J]. JMAA, 2003, 286: 187-206.
[7] 杨新民. 关于非线性规划的逆对偶[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2003, 20(4): 1-4.
[8] 赵克全, 陈哲. B-预不变凸函数在多目标规划中的对偶问题[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2008, 25(2): 1-4.

Mond Weir Dual and Wolf Dual in a Class of Nonsmooth Programming Problems

ZHAO Ke-quan, LUO Jie, TANG Li-ping

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: In this paper duality in a class of nonsmooth B-(p,r) programming problem with equality and inequality constraints is considered. Weak duality, strong duality, converse duality and strict converse duality are researched in Mond Weir dual under strict B-(p,r) invexity of $\lambda f + \sum_{i=1}^{m}\mu_i g_i + \sum_{j=1}^{p} v_j h_j$. Weak duality and strong duality are researched in Wolf dual under B-(p,r) invexity of $f + \sum_{i=1}^{m}\mu_i g_i + \sum_{j=1}^{p} v_j h_j$ and restricted converse duality and strict converse duality are researched under strict B-(p,r) invexity. Some conrresponding duality theorems are proved without any constraints. Our results generalize and improve some known results.

Key words: B-(p,r)-invexity; Mond-Weir duality; Wolf duality; nonsmooth programming

（责任编辑　黄　颖）