2010 年 1 月　　重庆师范大学学报(自然科学版)　　Jan. 2010
第 27 卷 第 1 期　　Journal of Chongqing Normal University(Natural Science)　　Vol. 27 No. 1

DOI:10.3969/J.ISSN.1672-6693.2010.01.010

变系数 EV 模型系数参数核估计的改进估计*

李泽华[1]，**吴小腊**[2]，**刘万荣**[3]

(1. 华南农业大学 理学院，广州 510642；2. 华南农业大学 珠江学院，广州 510900；
3. 湖南师范大学 数学与计算机科学学院，长沙 410081)

摘要：对变系数 EV 模型的估计问题进行深入研究，利用核函数法和广义最小二乘法运用类似于迭代的方法改进了变系数 EV 模型系数参数的估计。首先，将一步核估计 $\hat{\beta}_0(t_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ 代入模型，用广义最小二乘法得到 β 的第二步估计 $\tilde{\beta}=S_n^{-1}X^{\mathrm{T}}(Y-\hat{g}_0(T))$。然后，再将 $\tilde{\beta}$ 的值代入模型中，将 $\hat{\beta}_0(t_i)$ 还原成 $\beta_0(t_i)$，定义 $\beta_0(t)$ 的最终估计为 $\tilde{\beta}_0(t)=\dfrac{1}{\mu_0}\sum\limits_{i=1}^{n}w_{ni}(t)(Y_i-X_i^{\mathrm{T}}\tilde{\beta})$ 在适当的正则条件下，证明了所给的估计具有相合性和一致相合性。最后借助 Matlab 对估计量进行了模拟研究，结果表明估计的效果较已有结果有所提高。

关键词：变系数 EV 模型；广义最小二乘法；核估计；相合性

中图分类号：O212.1　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2010)01-0047-06

考虑如下模型

$$\begin{cases}Y_i=x_i^{\mathrm{T}}\beta(t_i)+\varepsilon_i\\X_i=x_i+u_i\end{cases},i=1,\cdots,n \tag{1}$$

其中 X 和 x 都是 $\mathbf{R}^{p+1}$ 中的随机向量，x 不可直接观测，称为潜在变量[1]，X 为可观测变量，Y 是一维实值随机变量，t 是一实变量(可以是时间、温度等)。假定 t 在一个闭区间上变化，不失一般性，认为 $t\in[0,1]$。ε 是随机误差，u 是 $p+1$ 维测量误差向量。称上述模型为变系数 EV 模型。

关于该模型，国内外已有一些讨论[2-10]。在这些讨论中，文献[2]首先研究了该模型一维情形下系数函数的相合估计，文献[4]将它推广到一般的 p 维情形。文献[5]利用调整的加权最小二乘方法估计其中的系数函数，得到了估计的强相合性和渐近正态性。文献[6]利用核函数法和广义最小二乘法给出了其系数函数的一步核估计，得到了估计的强相合性及一致强相合性。文献[7]对该问题进行了比较详细的研究，利用修正的局部线性方法(Corrected local linear estimator)给出了函数系数的相合估计，证明了其渐近分布为正态分布，并给出了误差方差的相合估计，还利用广义似然方法(Generalized likelihood technique)讨论了该模型的最优拟合检验(Goodness-of-fit test)问题。文献[8]利用与文献[7]一样的方法也讨论了该模型的估计问题，并讨论了窗宽的选择。

本文在文献[6]基础上运用类似于迭代的方法改进了系数参数的估计，得到了估计的相合性和一致相合性，模拟结果表明估计效果确实有所提高。

1 系数参数 $\beta(t)$ 的改进估计及其性质

根据文献[6]的思路，在用核函数法求出了系数参数 $\hat{\beta}_j(t)$ $(j=0,1,\cdots,p)$ 的第一步核估计以后，还可以利用已求出的结果改进参数的估计。因为凭直觉，第一步核估计还显得有点粗糙。利用类似于迭代的方法，定义系数参数的改进估计如下。

为方便讨论，将模型(1)改写成

---

* 收稿日期：2009-03-18
资助项目：国家自然科学基金(No. 10871072)；华南农业大学校长科学基金(No. 2009K020)
作者简介：李泽华，男，讲师，硕士，研究方向为非参数和半参数统计推断。

$$\begin{cases} Y_i = x_{i0}\beta_0(t_i) + x_i^{\mathrm{T}}\beta(t_i)\varepsilon_i \\ X_i = x_i + u_i \\ X_{i0} = x_{i0} + u_{i0} \end{cases}, i = 1,\cdots,n \tag{2}$$

其中,$x_i = (x_{i1},\cdots,x_{ip})^{\mathrm{T}}$,$\beta(t_i) = (\beta_1(t_i),\cdots,\beta_p(t_i))^{\mathrm{T}}$,$u_i = (u_{i1},\cdots,u_{ip})^{\mathrm{T}}$,$X_i = (X_{i1},\cdots,X_{ip})^{\mathrm{T}}$。

将$\hat{\beta}_0(t_i)(i = 1,\cdots,n)$的值代入模型(2)中,同样取$\beta = E[\beta(t)]$,得到如下模型

$$\begin{cases} Y_i = x_{i0}\hat{\beta}_0(t_i) + x_i^{\mathrm{T}}\beta + \varepsilon_i, \\ X_i = x_i + u_i \\ X_{i0} = x_{i0} + u_{i0} \end{cases}, i = 1,\cdots,n \tag{3}$$

从而有

$$Y_i = X_{i0}\hat{\beta}_0(t_i) + X_i^{\mathrm{T}}\beta + (\varepsilon_i - x_{i0}\hat{\beta}_0(t_i) - u_i^{\mathrm{T}}\beta) \cong X_{i0}\hat{\beta}_0(t_i) + X_i^{\mathrm{T}}\beta + v_i, i = 1,\cdots,n \tag{4}$$

对模型(4)用广义最小二乘法,得到β的第二步估计为

$$\tilde{\beta} = S_n^{-1}X^{\mathrm{T}}(Y - \hat{g}_0(T)) \tag{5}$$

其中$\hat{g}_0(T) \cong (X_{10}\hat{\beta}_0(t_1),\cdots,X_{n0}\hat{\beta}_0(t_n))^{\mathrm{T}}$。

再将$\tilde{\beta}$的值代入模型(3)中,将$\hat{\beta}_0(t_i)$还原成$\beta_0(t_i)$,取$x_{i0} = E(x_{i0}) = \mu_0$,即有如下模型

$$\begin{cases} Y_i = \mu_0\beta_0(t_i) + x_i^{\mathrm{T}}\tilde{\beta} + \varepsilon_i \\ X_i = x_i + u_i \end{cases}, i = 1,\cdots,n \tag{6}$$

此时定义$\beta_0(t)$的非参数核估计为

$$\tilde{\beta}_0(t) = \frac{1}{\mu_0}\sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t)(Y_i - \sum_{j=1}^{p} X_{ij}\tilde{\beta}_j) = \frac{1}{\mu_0}\sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t)(Y_i - X_i^{\mathrm{T}}\tilde{\beta}) \tag{7}$$

在给出结论之前,先列出所需要的假设条件。

1) $(\varepsilon_i,u_{i0},u_i^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(1 \leqslant i \leqslant n)$为$p+2$维独立同分布的随机误差向量,且满足$E(\varepsilon_i,u_{i0},u_i^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = 0$,$\mathrm{Cov}(\varepsilon_i,u_{i0},u_i^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \sigma^2 I_{p+2}$,$\sigma^2 > 0$未知;

2) $t_1,\cdots,t_n$独立同分布,其密度函数f未知;

3) $\{(X_{i0},X_i^{\mathrm{T}},t_i)^{\mathrm{T}},1 \leqslant i \leqslant n\}$与$\{(\varepsilon_i,u_{i0},u_i^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}},1 \leqslant i \leqslant n\}$相互独立;

4) 秩$(X) = p$,$n > p$,即X是列满秩的;

5) $\sup\limits_{n>p}\dfrac{1_n^{\mathrm{T}}P1_n}{n} < 1$;

6) $0 < \mathrm{Var}(x_{ij}\beta_j(t_i)) < \infty(j = 0,1,\cdots,p)$,因而$0 < D(v_i) = E(v_i^2) < \infty$;

7) 假定$x_{ij}(0 \leqslant j \leqslant p)$的期望存在且不为0,令$\mu_0 = E(x_{i0}) = E(X_{i0})$;

8) 存在$0 < c_1 \leqslant c_2 < \infty$,使得$c_1 I_{(\|u\|<2)} \leqslant K(u) \leqslant c_2 I_{(\|u\|<2)}$,$u \in [0,1]$;

9) $0 < \inf f(t) \leqslant \sup f(t) < \infty$,其中$f$为$t$的密度函数;

10) $0 < \inf\limits_{\Delta} f(t) \leqslant \sup\limits_{\Delta} f(t) < \infty$,$\Delta$为$\mathbf{R}^1$的有界区间;

11) $f(\cdot)$,$\beta_j(\cdot)(j = 0,1,\cdots,p)$在$\mathbf{R}^1$上有界,且在含$\Delta$的一个开区间上连续。

定理1[6] 在上述条件1)~9)成立下,如果$h_n \to 0$,$\dfrac{n^{\frac{1}{2}}h_n}{\log n} \to \infty$,$\inf(n^{1-\alpha}h_n) > 0$,$\alpha \in (\frac{1}{2},1)$且$\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} X_k^{\mathrm{T}}S_n^{-1}X_k = 0$,则$\hat{\beta}_0(t) \xrightarrow{\text{a.s.}} \beta_0(t)$,对任意的$t \in C_f \wedge \{t,f(t) > 0\}$,其中$C_f$表示$f$的连续点集。

定理2 在上述条件1)~11)成立下,记$z_i = y_i - X_i^{\mathrm{T}}\beta(t_i)$,$i \geqslant 1$,$\{(z_i,t_i),i \geqslant 1\}$为i.i.d.样本数据。设$(z_1,t_1)$有未知密度函数$\phi(z,t)$,再记$h(t) = \int z\phi(z,t)\mathrm{d}z$,$t \in \mathbf{R}^1$,则有$\sup\limits_{\Delta}|\hat{\beta}_0(t) - \beta_0(t)| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$。

注1 由上述定理1、2及前面的估计方法不难得出:1) $\hat{\beta}_j(t) \xrightarrow{\text{a.s.}} \beta_j(t)$;2) $\sup\limits_{\Delta}|\hat{\beta}_j(t) - \beta_j(t)| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$。其中$j = 0,1,\cdots,p$;$t \in C_f \wedge \{t,f(t) > 0\}$。

定理3 假设定理1的条件成立,用条件$\sup\limits_{n>p} 1_n^{\mathrm{T}}P1_n = O(1)$代替条件5),且$\beta_0(\cdot)$在$\mathbf{R}^1$上有界,则当

$S_n^{-1} \to 0$ 时,有 $\tilde{\beta}_0(t) \xrightarrow{a.s.} \beta_0(t)$。

定理 4　假设定理 2 的条件成立,且 $\beta_0(\cdot)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上有界,则当 $S_n^{-1} \to 0$ 时,有 $\sup_{\Delta} |\tilde{\beta}_0(t) - \beta_0(t)| \xrightarrow{a.s.} 0$。

注 2　由估计的方法及上述定理 3、4 不难得出:1) $\tilde{\beta}_j(t) \xrightarrow{a.s.} \beta_j(t)$;2) $\sup_{\Delta} |\tilde{\beta}_j(t) - \beta_j(t)| \xrightarrow{a.s.} 0$。其中,$j = 0,1,\cdots,p$;$t \in C_f \wedge \{t, f(t) > 0\}$。

2 模拟研究

下面借助于 Matlab 对估计量进行了模拟研究。

例 1　$Y = \sin(32t)x_1 + t^3 x_2 + \varepsilon, X_1 = x_1 + u_1, X_2 = x_2 + u_2$。

在这个例子中,取 $t \sim U[0,1]$,$x_1 \sim N(5,1)$,$x_2 \sim N(1,1)$,ε, u_1, u_2 都是标准正态随机变量,取 panechnikov 核函数,窗宽取固定窗宽 $h_n = \frac{1}{50}$。样本数据由 Matlab 随机产生,样本容量 $n = 1\ 000$。

例 1 中对[0,1]上等距的 100 个时间点进行估计,得到的估计值用符号 * 表示,待估参数的实际值用连续的曲线表示。分别用文献[6]中的一步核估计和改进的核估计进行模拟,模拟结果表明改进的估计效果确实有所提高。这里给出 $\beta_0(t) = \sin(32t)$ 的估计效果,见图 1、图 2。其中横坐标表示时间,纵坐标表示相应时刻的函数值。

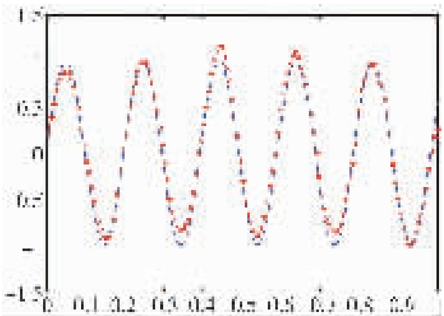

图 1　原方法的估计效果

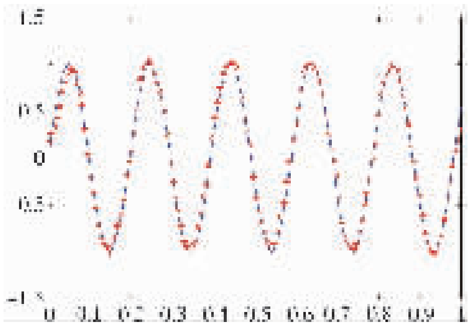

图 2　改进方法的估计效果

3 定理的证明

下面证明文中的两个定理。在证明之前,先给出一些引理。

引理 1[11]　对于非参数模型,(X,Y) 为 $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}$ 上随机变量,$E|Y| < \infty$。$(x_i, y_i)(i = 1,\cdots,n)$ 为来自总体 (X,Y) 的样本,存在某个未知的实值函数 $g(x)$ 使得 $E(y_i \mid x_i = x) = g(x), i = 1,\cdots,n, x \in \mathbf{R}^p$,设 $E|y_i|^r < \infty$ 对某个 $r > 0$ 成立,且存在 $c_2 \geqslant c_1 > 0, p > 0$ 使得 $c_1 I_{(\|u\|)<p} \leqslant K(u) \leqslant c_2 I_{(\|u\|<p)}$,$I(\cdot)$ 为示性函数,如 $h_n \to 0$,$\frac{nh_n}{n^{1-\frac{1}{r}} \log n} \to \infty$,则对非参数核估计 $\hat{g}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{K\left(\frac{x - x_i}{h_n}\right) y_i}{\sum_{r=1}^{n} K\left(\frac{x - x_r}{h_n}\right)}$ 有 $\hat{g}(x) \xrightarrow{a.s.} g(x)$。

引理 2[12]　设 $u_1,\cdots,u_n$ 是独立随机变量,且存在绝对常数 $m > 0$,使得 $|u_i| \leqslant m$,对 $1 \leqslant i \leqslant n$ 成立,若 $Eu_i = 0$,那么对任给的 $\varepsilon > 0$ 及 $n \geqslant 1$ 均有

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} u_i\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(u_i) + m\varepsilon\right)}\right)$$

定理 3 的证明

$$\tilde{\beta}_0(t) = \frac{1}{\mu_0} \sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t)\left(Y_i - \sum_{j=1}^{p} X_{ij}\tilde{\beta}_j\right) = \frac{1}{\mu_0} \sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t)(Y_i - X_i^{\mathrm{T}}\tilde{\beta}) =$$

$$\frac{1}{\mu_0} \times [W_n^{\mathrm{T}}(t)(Y - X\beta) - W_n^{\mathrm{T}}(t)X(\tilde{\beta} - \beta)]$$

$$\tilde{\beta}-\beta = S_n^{-1}X^{\mathrm{T}}(Y-\hat{g}_0(T))-\beta = S_n^{-1}X^{\mathrm{T}}(\mu_0\beta_0(t)+X\beta+\varepsilon_n-u^{\mathrm{T}}\beta-\hat{g}_0(T))-\beta =$$
$$S_n^{-1}X^{\mathrm{T}}X\beta+S_n^{-1}X^{\mathrm{T}}(\varepsilon_n-u^{\mathrm{T}}\beta)-S_n^{-1}X^{\mathrm{T}}(\hat{g}_0(T)-\mu_0\beta_0(t))-\beta =$$
$$S_n^{-1}X^{\mathrm{T}}(\varepsilon_n-u^{\mathrm{T}}\beta)-S_n^{-1}X^{\mathrm{T}}(\hat{g}_0(T)-\mu_0\beta_0(t))$$

$$\tilde{\beta}(t) = \frac{1}{\mu_0}\times\left[W_n^{\mathrm{T}}(t)(Y-X\beta)-W_n^{\mathrm{T}}(t)X(\varepsilon_n-u^{\mathrm{T}}\beta)\right]+W_n^{\mathrm{T}}(t)XS_n^{-1}X^{\mathrm{T}}(\hat{g}_0(T)-\mu_0\beta_0(t)) =$$
$$\frac{1}{\mu_0}\times\left[W_n^{\mathrm{T}}(t)(Y-X\beta)-W_n^{\mathrm{T}}(t)P(\varepsilon_n-u^{\mathrm{T}}\beta)+W_n^{T}(t)P(\hat{g}_0(T)-\mu_0\beta_0(t))\right]$$

类似于定理1的证明,由引理1有

$$W_n^{\mathrm{T}}(t)(Y-X\beta)\xrightarrow{\text{a.s.}}\beta_0(t) \tag{8}$$

令$e_n=\varepsilon_n-u^{\mathrm{T}}\beta$,由条件1)~3)可知$\{e_i\}$为i.i.d.,且$Ee_1=0$,$Ee_1^2<\infty$,于是$W_n^{\mathrm{T}}(t)P(\varepsilon_n-u^{\mathrm{T}}\beta)=W_n^{\mathrm{T}}(t)Pe_n$。

又记 $$b_{nk}=\sum_{i=1}^n w_{ni}(t)a_{ik}^{(n)}=\sum_{i=1}^n\frac{K\left(\frac{t-t_i}{h_n}\right)a_{ik}^{(n)}}{\sum_{r=1}^n K\left(\frac{t-t_r}{h_n}\right)},k=1,\cdots,n$$

于是 $$W_n^{\mathrm{T}}(t)Pe_n=\sum_{i=1}^n b_{ni}e_i=(f_n(t))^{-1}\left\{\sum_{k=1}^n\left[\frac{1}{nh_n}\sum_{j=1}^n k\left(\frac{t-t_j}{h_n}\right)a_{jk}^{(n)}\right]e_k\right\}\cong(f_n(t))^{-1}\times A$$

其中 $$A=\sum_{k=1}^n\left[\frac{1}{nh_n}\sum_{j=1}^n k\left(\frac{t-t_j}{h_n}\right)a_{jk}^{(n)}\right]e_k=\sum_{k=1}^n\left[\frac{1}{nh_n}\sum_{j=1}^n\left(k\left(\frac{t-t_j}{h_n}\right)-Ek\left(\frac{t-t_j}{h_n}\right)+Ek\left(\frac{t-t_j}{h_n}\right)\right)a_{jk}^{(n)}\right]e_k=$$
$$\sum_{k=1}^n\left[\frac{1}{nh_n}\sum_{j=1}^n\left(k\left(\frac{t-t_j}{h_n}\right)-Ek\left(\frac{t-t_j}{h_n}\right)\right)a_{jk}^{(n)}\right]e_k+\sum_{k=1}^n\left[\frac{1}{nh_n}\sum_{j=1}^n Ek\left(\frac{t-t_j}{h_n}\right)a_{jk}^{(n)}\right]e_k$$

令$\xi_{ni}(t)=K\left(\frac{t-t_i}{h_n}\right)-EK\left(\frac{t-t_i}{h_n}\right)$,$i=1,\cdots,n$,$\sigma_n^2(t)=E[\xi_{n1}(t)]^2$,$u_n(t)=E[\xi_{ni}(t)v_1]$,$E_n(t)=E[\xi_{n1}(t)v_1]^2$,$\alpha_n(t)=\frac{1}{h_n}EK\left(\frac{t-t_1}{h_n}\right)$,则

$$A=\sum_{k=1}^n\left[\frac{1}{nh_n}\sum_{j=1}^n\xi_{nj}(t)a_{jk}^{(n)}\right]e_k+\alpha_n(t)\sum_{k=1}^n\frac{A_{nk}}{n}e_k\cong B_1+B_2$$

其中$B_2=\alpha_n(t)\sum_{k=1}^n\frac{A_{nk}}{n}e_k$。

再令$e_k'=e_kI(|e_k|\leqslant\varepsilon^2 i^{\frac{1}{2}})$,$e_k''=e_k-e_k'$,再记$e_{nk}=\frac{A_{nk}}{n}(e_k'-Ee_k')$,$k=1,\cdots,n$,则可知$e_{nk}$相互独立,且$Ee_{nk}=0$,当$n$充分大时,$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|e_{nk}|\leqslant 2\varepsilon^2 n^{\frac{1}{2}}\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\frac{A_{nk}}{n}\right|\leqslant c\varepsilon^2 n^{\frac{1}{2}}$。故$\mathrm{Var}(e_{nk})=E(e_{nk})^2<\frac{A_{nk}^2}{n^2}Ee_k^2\leqslant cn^{-2}$,由上述引理2有

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^n e_{ni}\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^n\mathrm{Var}(e_{ni})+c\varepsilon^3 n^{-\frac{1}{2}}}\right)\leqslant 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^3 n^{-\frac{1}{2}}}\right)=2\exp\left(-c\varepsilon^{-1}n^{-\frac{1}{2}}\right)$$

再由Borel-Cantor引理知$\sum_{k=1}^n e_{nk}\xrightarrow{\text{a.s.}}0(n\to\infty)$。因为对任意$\varepsilon>0$,有$Ee_1^2<\infty$,由三级数定理可证$\sum_{k=1}^n|e_k''|<\infty$,a.s.,所以$\left|\sum_{k=1}^n\frac{A_{nk}}{n}e_k''\right|\leqslant\max\left|\frac{A_{nk}}{n}\right|\left(\sum_{k=1}^n|e_k''|\right)\leqslant O(n^{-1})$,a.s.。

又 $$\left|\sum_{k=1}^n\frac{A_{nk}}{n}Ee_k''\right|\leqslant\max\left|\frac{A_{nk}}{n}\right|\left(\sum_{k=1}^n E|e_k|I(|e_k|\geqslant\varepsilon^2 i^{\frac{1}{2}})\right)\leqslant cn^{-1}n^{\frac{1}{2}}=cn^{-\frac{1}{2}},\text{a.s.}$$

所以 $$|B_2|\leqslant\left|\alpha_n(t)\sum_{k=1}^n\frac{A_{nk}}{n}(e_k'+e_k'')\right|\leqslant c\left|\sum_{k=1}^n e_{nk}\right|+c\left|\sum_{k=1}^n\frac{A_{nk}}{n}e_k''\right|+c\left|\sum_{k=1}^n\frac{A_{nk}}{n}Ee_k''\right|\xrightarrow{\text{a.s.}}0 \tag{9}$$

另一方面,对 $B_1 = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{nh_n}\sum_{j=1}^{n}\xi_{nj}(t)a_{jk}^{(n)}\right]e_k$,有

$$E(B_1)^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n}E\{[\sum_{j=1}^{n}\xi_{nj}(t)a_{jk}^{(n)}]^2e_k^2\}+\sum_{k\neq r}E\{[\sum_{j=1}^{n}\xi_{nj}(t)a_{jk}^{(n)}][\sum_{j=1}^{n}\xi_{nj}(t)a_{jr}^{(n)}]e_ke_r\}}{(nh_n)^2} \cong D_1 + D_2$$

因为
$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[a_{rk}^{(n)}]^2 = \sum_{r=1}^{n}a_{rr}^{(n)} = \mathrm{tr}(P) = P$$

所以由题设有

$$D_2 = \frac{\sum_{k\neq r}E[\xi_{nk}(t)\xi_{nr}(t)(a_{kk}^{(n)}a_{rr}^{(n)} + a_{rk}^{2(n)})e_ke_r]}{(nh_n)^2} = \frac{\sum_{k\neq r}E[E(\xi_{nk}(t)e_k\xi_{nr}(t)e_r)(a_{kk}^{(n)}a_{rr}^{(n)} + a_{rk}^{2(n)})]}{(nh_n)^2}$$

因为 $\xi_{ni}(t)$ 为 i. i. d. 为随机变量,e_i 为 i. i. d. 随机误差变量,所以

$$D_2 = \frac{\sum_{k\neq r}E[\xi_{n1}(t)e_1]^2(a_{kk}^{(n)}a_{rr}^{(n)} + a_{rk}^{2(n)})}{(nh_n)^2} \leqslant \frac{(p+1)E[\xi_{n1}(t)e_1]^2}{(nh_n)^2}$$

由柯西-斯瓦兹不等式有 $E[\xi_{n1}(t)e_1]^2 \leqslant E[\xi_{n1}(t)]^2Ee_1^2 \leqslant c$,于是 $D_2 \leqslant cn^{-2\alpha}$。

$$D_1 = \frac{\sum_{k=1}^{n}E\{[\sum_{j=1}^{n}\xi_{nj}(t)a_{jk}^{(n)}]^2e_k^2\}}{(nh_n)^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{[(a_{nk}^{(n)})^2 + \sum_{i\neq k}(a_{ik}^{(n)})^2]\sigma_n^2(t)Ee_1^2}{(nh_n)^2} \leqslant cn^{-2\alpha}$$

所以当 $n \geqslant p$ 时,$E[B_1]^2 \leqslant cn^{-2\alpha}$,$\alpha > \frac{1}{2}$。由 Borel-Cantor 引理有
$$B_1 \xrightarrow{\text{a. s.}} 0 \tag{10}$$

由(9)、(10)式有
$$W_n^{\mathrm T}(t)Pe_n = W_n^{\mathrm T}(t)P(\varepsilon_n - u^{\mathrm T}\beta) \xrightarrow{\text{a. s.}} 0 \tag{11}$$

下证 $W_n^{\mathrm T}(t)P(\hat g_0(T) - \mu_0\beta_0(t)) \xrightarrow{\text{a. s.}} 0$ 。

因为 $|W_n^{\mathrm T}(t)P(\hat g_0(T) - \mu_0\beta_0(t))| = |W_n^{\mathrm T}(t)P||\hat g_0(T) - \mu_0\beta_0(t))|$,由条件 8)可知

$$|W_n^{\mathrm T}(t)P| \leqslant \sum_{j,k}|w_{nj}(t)a_{jk}^{(n)}| = \sum_{j,k}\left|\frac{K\left(\frac{t-t_j}{h_n}\right)a_{jk}^{(n)}}{\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{t-t_j}{h_n}\right)}\right| \leqslant c\sum_{j,k}\left|\frac{a_{jk}^{(n)}}{\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{t-t_j}{h_n}\right)}\right| \leqslant c\sum_{j,k}\frac{|a_{jk}^{(n)}|}{n} < c\sum_{i=1}^{n}\frac{A_{nk}}{n}$$

而
$$1_n^{\mathrm T}P1_n = \sum_{j,k}a_{jk}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n}A_{nk}^2 = \sum_{k=1}^{n}A_{nk}$$

由题中条件 $\sup_{n>p}1_n^{\mathrm T}P1_n = O(1)$,有 $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{A_{nk}}{n}\right)^2 \leqslant c$。当然,当 $n \geqslant p$ 时,有 $\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{A_{nk}}{n}\right| \leqslant c$。所以,当 $n \geqslant p$ 时 $|W_n^{\mathrm T}(t)P| \leqslant c\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{A_{nk}}{n}\right| \leqslant c$,而由定理 2 有 $\sup_{\Delta}|\hat\beta_0(t) - \beta_0(t)| \xrightarrow{\text{a. s.}} 0$,从而易知

$$W_n^{\mathrm T}(t)P(\hat g_0(T) - \mu_0\beta_0(t)) \xrightarrow{\text{a. s.}} 0 \tag{12}$$

由(8)、(11)与(12)式有 $\tilde\beta_0(t) \xrightarrow{\text{a. s.}} \beta_0(t)$ 。

定理 4 的证明　因为 $\sup_{\Delta}|\tilde\beta_0(t) - \beta_0(t)| = \sup_{\Delta}\left|\frac{1}{\mu_0}\sum_{i=1}^{n}w_{ni}(t)(Y_i - X_i^{\mathrm T}\tilde\beta) - \beta_0(t)\right| =$

$$\sup_{\Delta}\left|\frac{1}{\mu_0}\right| \times |W_n^{\mathrm T}(t)(Y - X\beta) - \mu_0\beta_0(t) - W_n^{\mathrm T}(t)P(\varepsilon_n - u^{\mathrm T}\beta) + W_n^{\mathrm T}(t)P(\hat g_0(T) - \mu_0\beta_0(t))| \leqslant$$

$$\left|\frac{1}{\mu_0}\right| \times \left[\sup_{\Delta}|W_n^{\mathrm T}(t)(Y - X\beta) - \mu_0\beta_0(t)| + \sup_{\Delta}|W_n^{\mathrm T}(t)Pe_n| + \sup_{\Delta}|W_n^{\mathrm T}(t)P(\hat g_0(T) - \mu_0\beta_0(t))|\right]$$

由线性模型的经典理论可知
$$\sup_{\Delta}|W_n^{\mathrm T}(t)(Y - X\beta) - \mu_0\beta_0(t)| \xrightarrow{\text{a. s.}} 0 \tag{13}$$

由定理 3 的证明有
$$\sup_{\Delta}|W_n^{\mathrm T}(t)P(\hat\beta_0(t) - \beta_0(t))| \xrightarrow{\text{a. s.}} 0 \tag{14}$$

因为$\sup_{\Delta}|W_n^{\mathrm{T}}(t)Pe_n| = \sup_{\Delta}|f_n(t)|^{-1}\cdot|A|$,由引理2有$\sup_{\Delta}|f_n(t)|^{-1}\leqslant c$,a. s.。由$Ee_k^2<\infty$,于是由三级数定理可证$\sum_{k=1}^{n}e_k''<\infty$,a. s. $\sup_{\Delta} = |A| = \sup_{\Delta}\left|\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{nh_n}\sum_{j=1}^{n}\xi_{nj}(t)a_{jk}^{(n)}\right]e_k\right|$,由条件8)有

$$\sup_{\Delta}|A|\leqslant c\frac{1}{nh_n}\sup_{\Delta}\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{jk}^{(n)}(e_k'+e_k'')\right|\leqslant c\frac{1}{nh_n}\sup_{\Delta}\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{jk}^{(n)}\right|$$

由定理2的证明有$\sup_{\Delta}|A|\xrightarrow{\text{a. s.}}0$,所以有

$$\sup_{\Delta}|W_n^{\mathrm{T}}(t)Pe_n|\xrightarrow{\text{a. s.}}0 \tag{15}$$

由(13)~(15)式有$\sup_{\Delta}|\tilde{\beta}_0(t)-\beta_0(t)|\xrightarrow{\text{a. s.}}0$。 证毕

参考文献:

[1] Full W A. Measurement Error Models[M]. New York:Wiley,1987.

[2] 欧阳光. 变系数结构关系 EV 模型的参数估计[J]. 应用数学学报,2005,28(1):73-85.

[3] 欧阳光. 有重复观测的变系数线性结构关系 EV 模型的参数估计[J]. 应用数学学报,2006,29(2):247-253.

[4] 崔恒建,王强. 变系数结构关系 EV 模型的参数估计[J]. 北京师范大学学报(自然科学版),2005,41(6):563-568.

[5] 崔恒建. 变系数线性 EV 模型的参数的调整加权最小二乘估计及其渐近性质[J]. 系统科学与数学,2007,17(1):82-92.

[6] 李泽华,刘万荣,肖正阳. 变系数 EV 模型系数参数的一步核估计[J]. 湖南师范大学学报(自然科学版),2006,29(1):14-17.

[7] Jinhon Y,Yong Z,Gemai C. Corrected local polynomial estimation in varying-coefficient models with measurement errors[J]. The Canadian Journal of Statistics,2006,34(3):391-410.

[8] Liang L and Tom G. Varying coefficients model with measurement error[J]. Biometrics,2008,64:519-526.

[9] 吴小腊,刘万荣,李泽华. 变系数模型变窗宽局部 M-估计的渐近正态[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2008,25(1):50-53.

[10] 龚艳红,刘万荣,约束条件下误差协方差阵的二次估计的可容评性[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2008,25(1),47-49.

[11] 李再兴. 结构型 EV 模型的参数估计[D]. 合肥:安徽大学,2004.

[12] Basu A,Sarkar S. Robust estimation in the errors variables model via weighted likelihood estimating equations[J]. Test,1997,6:187-203.

The Improvement Estimation of Kernel Smoothing Estimation in Varying-Coefficients EV Models

LI Ze-hua[1], *WU Xiao-la*[2], *LIU Wan-rong*[3]

(1. College of Science, South China Agricultural University, Guangzhou, 510642;

2. Zhujinag College, South China Agricultural University, Guangzhou 510900;

3. Mathematics and Computer department, Hunan Normal University, Changsha 410081, China)

Abstract: This article is a more in-depth study of estimation in varying-coefficient EV modes. In this paper the improvement estimation of coefficient functions in a varying-coefficients EV model are constructed by using kernel smoothing and generalized least square method. Firstly, we change the model by using one-step kernel estimation $\hat{\beta}_0(t_i)$ $(i=1,\cdots,n)$. In the use of generalized least squares method, we can get the second step estimation $\tilde{\beta}=S_n^{-1}X^{\mathrm{T}}(Y-\hat{g}_0(T))$. Then the value of $\tilde{\beta}$ will be substituted by the model, the $\hat{\beta}_0(t_i)$ will be reduced to $\beta_0(t_i)$. We define the last estimation $\tilde{\beta}_0(t_i)=\frac{1}{\mu_0}\sum_{i=1}^{n}w_{ni}(t)(Y_i-X_i^{\mathrm{T}}\tilde{\beta})$. Under appropriate regular conditions, the strong consistency and uniform strong consistency of the estimator are obtained. Also using Matlab we compare the two estimates. The imitation shows that the result has really improved.

Key words: varying-coefficient EV models; generalized least square method; kernel smoothing estimation; consistency

(责任编辑 黄 颖)