DOI:10.3969/J.ISSN.1672-6693.2010.01.011

$4p^2$ 阶群的 g 函数值*

张 宁, 曹洪平
(西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715)

摘要 对任一有限群 G 和任一正整数 d,令 $G(d) = \{x \in G | x^d = 1\}$。若 G_1 与 G_2 为有限群,满足 $|G_1(d)| = |G_2(d)|$, $d = 1,2,\cdots$,则称 G_1 与 G_2 为同阶型群。文中讨论了与 Thompson 猜想相关的同阶型群的问题,两个有限群阶型相同是否同构的问题,并且对有限群 G,定义了 G 的 g 函数值 $g(G)$,表示与群 G 的阶型相同的有限群的同构类类数。本文利用 $4p^2$ 阶群的结构完全分类,通过计算得出所有 $4p^2$ 阶群的阶型,对任一 $4p^2$ 阶群 M,得出了 M 的 g 函数值。特别地,在 $4p^2$ 阶群中找到了一对群,它们的 g 函数值为 2,即阶为 $4p^2$ 的群中存在一对不同构的群,它们阶型相同. 这里 p 为奇素数。

关键词 有限群;阶型;g 函数值

中图分类号 O152.1 **文献标识码** A **文章编号** 1672-6693(2010)01-00053-04

对任一有限群 G 和任一正整数 d,令 $G(d) = \{x \in G | x^d = 1\}$。若 G_1 与 G_2 为有限群,满足 $|G_1(d)| = |G_2(d)|$,$d = 1,2,\cdots$,则称 G_1 与 G_2 为同阶型群。设 G 为有限群,用 $\alpha_k(G)$ 表 G 中 k 阶元的个数,简记为 α_k,其中 k 为正整数,且 $k \Big| |G|$ 称 $\rho(G) = (\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_s)$ 为 G 的阶型[1-5]。关于同阶型群,J. G. Thompson 提出了一个著名的猜想。

猜想 设 G_1 与 G_2 为同阶型的有限群,若 G_1 可解,则 G_2 一定可解。

研究中发现很多群可由其阶型唯一确定,给定有限群 M,用 $g(M)$ 表示满足 $\rho(G) = \rho(M)$ 的有限群 G 的同构类类数,称 $g(M)$ 为 M 的 g 函数值。对很多的有限群 M,有 $g(M) = 1$,如由文献[6]可知,当 M 为 2^3p 阶群时,$g(M) = 1$,也有 M 满足 $g(M) = 2$,如在 p^3 阶群中,当 M 为 p^3 阶初等交换群,p 为奇素数时,$g(M) = 2$。

本文利用 $4p^2$(p 为奇素数)阶群的分类,给出了所有 $4p^2$ 阶群的阶型,对任一 $4p^2$ 阶群 M,得出了 $g(M)$ 的值。特别地,在 $4p^2$ 阶群中找到了一对群,它们的 g 函数值为 2。

1 $4p^2(p>3)$ 阶群的 g 函数值

引理 1[7] 设素数($p > 3$),则 $4p^2$ 阶群 G,

1)在 $p \equiv 1 \pmod 4$ 时,有 16 个,其构造如下

① $G_1 = \langle a\rangle, a^{4p^2} = 1$(循环群);

② $G_2 = \langle a,b\rangle, a^{p^2} = 1 = b^4, b^{-1}ab = a^{-1}$;

③ $G_3 = \langle a,b\rangle, a^{p^2} = 1 = b^4, b^{-1}ab = a^r$,其中 $r^2 \equiv -1 \pmod{p^2}$;

④ $G_4 = \langle a\rangle \times \langle b\rangle \times \langle c\rangle, a^{p^2} = b^2 = c^2 = 1$(交换群);

⑤ $G_5 = \langle a,b,c\rangle, a^{p^2} = b^2 = c^2 = 1 = [a,b] = [b,c], c^{-1}ac = a^{-1}$;

⑥ $G_6 = \langle a\rangle \times \langle b\rangle \times \langle c\rangle \times \langle g\rangle, a^p = b^p = c^2 = g^2 = 1$(交换群);

⑦ $G_7 = \langle a,b,c,g\rangle, a^p = b^p = c^2 = g^2 = 1 = [a,b] = [c,g] = [a,c] = [b,c], g^{-1}ag = a^{-1}, g^{-1}bg = b^{-1}$;

⑧ $G_8 = \langle a,b,c,g\rangle, a^p = b^p = c^2 = g^2 = 1 = [a,b] = [c,g] = [a,c] = [b,c], g^{-1}ag = b, g^{-1}bg = a$;

⑨ $G_9 = \langle a,b,c,g\rangle, a^p = b^p = c^2 = g^2 = 1 = [a,b] = [c,g], c^{-1}ac = a^{-1}, c^{-1}bc = b^{-1}, g^{-1}ag = b, g^{-1}bg = a$;

* 收稿日期:2009-03-11 修改日期:2009-04-05
资助项目:国家自然科学基金(No. 10771172)
作者简介:张宁,女,硕士研究生,研究方向为有限群;通讯作者:曹洪平,E-mail:caohp@swu.edu.cn

⑩ $G_{10}=\langle a\rangle\times\langle b\rangle\times\langle c\rangle, a^p=b^p=c^4=1$(交换群);

⑪ $G_{11}=\langle a,b,c\rangle, a^p=b^p=c^4=1=[a,b], c^{-1}ac=a^{-1}, c^{-1}bc=b^{-1}$;

⑫ $G_{12}=\langle a,b,c\rangle, a^p=b^p=c^4=1=[a,b], c^{-1}ac=a^r, c^{-1}bc=b^r$,其中 $r^2\equiv-1(\mathrm{mod}\ p)$;

⑬ $G_{13}=\langle a,b,c\rangle, a^p=b^p=c^4=1=[a,b], c^{-1}ac=b, c^{-1}bc=a$;

⑭ $G_{14}=\langle a,b,c\rangle, a^p=b^p=c^4=1=[a,b], c^{-1}ac=b^{-1}, c^{-1}bc=a$;

⑮ $G_{15}=\langle a,b,c\rangle, a^p=b^p=c^4=1=[a,b], c^{-1}ac=(ab)^r, c^{-1}bc=(a^{-1}b)^r$,其中 $(2r+1)^2\equiv-1(\mathrm{mod}\ p)$;

⑯ $G_{16}=\langle a,b,c\rangle, a^p=b^p=c^4=1=[a,b], c^{-1}ac=(ab)^{-r}, c^{-1}bc=(ab^{-1})^r$,其中 $(2r+1)^2\equiv-1(\mathrm{mod}\ p)$。

2)在 $p\equiv-1(\mathrm{mod}\ 4)$ 时,有12个,其构造分别为1)中的 $G_1,G_2,G_4,G_5,G_6,G_7,G_8,G_9,G_{10},G_{11},G_{13},G_{14}$。

引理2 对引理1中的 $G_i, i=1,2,\cdots,16$,有下列结果

$\rho(G_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_p,\alpha_{2p},\alpha_{4p},\alpha_{p^2},\alpha_{2p^2},\alpha_{4p^2})=(1,1,2,p-1,2(p-1),p(p-1),p(p-1),2p(p-1))$

$\rho(G_2)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_p,\alpha_{2p},\alpha_{4p},\alpha_{p^2},\alpha_{2p^2},\alpha_{4p^2})=(1,1,2p^2,p-1,p-1,0,p(p-1),p(p-1),0)$

$\rho(G_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_p,\alpha_{2p},\alpha_{4p},\alpha_{p^2},\alpha_{2p^2},\alpha_{4p^2})=(1,p^2,2p^2,p-1,0,0,p(p-1),0,0)$

$\rho(G_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_p,\alpha_{2p},\alpha_{4p},\alpha_{p^2},\alpha_{2p^2},\alpha_{4p^2})=(1,3,0,p-1,3(p-1),0,p(p-1),3p(p-1),0)$

$\rho(G_5)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_p,\alpha_{2p},\alpha_{4p},\alpha_{p^2},\alpha_{2p^2},\alpha_{4p^2})=(1,2p^2+1,0,p-1,p-1,0,p(p-1),p(p-1),0)$

$\rho(G_6)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_p,\alpha_{2p},\alpha_{4p},\alpha_{p^2},\alpha_{2p^2},\alpha_{4p^2})=(1,3,0,p^2-1,3(p^2-1),0,0,0,0)$

$\rho(G_7)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_p,\alpha_{2p},\alpha_{4p},\alpha_{p^2},\alpha_{2p^2},\alpha_{4p^2})=(1,2p^2+1,0,p^2-1,p^2-1,0,0,0,0)$

$\rho(G_8)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_p,\alpha_{2p},\alpha_{4p},\alpha_{p^2},\alpha_{2p^2},\alpha_{4p^2})=(1,2p^2+1,0,p^2-1,(3p+1)(p-1),0,0,0,0)$

$\rho(G_9)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_p,\alpha_{2p},\alpha_{4p},\alpha_{p^2},\alpha_{2p^2},\alpha_{4p^2})=(1,p(p+2),0,p^2-1,2p(p-1),0,0,0,0)$

$\rho(G_{10})=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_p,\alpha_{2p},\alpha_{4p},\alpha_{p^2},\alpha_{2p^2},\alpha_{4p^2})=(1,1,2,p^2-1,p^2-1,2(p^2-1),0,0,0)$

$\rho(G_{11})=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_p,\alpha_{2p},\alpha_{4p},\alpha_{p^2},\alpha_{2p^2},\alpha_{4p^2})=(1,1,2p^2,p^2-1,p^2-1,0,0,0,0)$

$\rho(G_{12})=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_p,\alpha_{2p},\alpha_{4p},\alpha_{p^2},\alpha_{2p^2},\alpha_{4p^2})=(1,p^2,2p^2,p^2-1,0,0,0,0,0)$

$\rho(G_{13})=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_p,\alpha_{2p},\alpha_{4p},\alpha_{p^2},\alpha_{2p^2},\alpha_{4p^2})=(1,1,2p,p^2-1,p^2-1,2p(p-1),0,0,0)$

$\rho(G_{14})=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_p,\alpha_{2p},\alpha_{4p},\alpha_{p^2},\alpha_{2p^2},\alpha_{4p^2})=(1,p^2,2p^2,p^2-1,0,0,0,0,0)$

$\rho(G_{15})=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_p,\alpha_{2p},\alpha_{4p},\alpha_{p^2},\alpha_{2p^2},\alpha_{4p^2})=(1,p,2p^2,p^2-1,p(p-1),0,0,0,0)$

$\rho(G_{16})=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_p,\alpha_{2p},\alpha_{4p},\alpha_{p^2},\alpha_{2p^2},\alpha_{4p^2})=(1,p,2p,p^2-1,p(p-1),2p(p-1),0,0,0)$

证明 由Sylow定理,$4p^2(p>3)$ 阶群 G 的Sylow-p 子群 P 唯一。

1)因为 G_1 为循环群,G_4,G_6,G_{10} 为交换群,经简单计算可得 $\rho(G_1),\rho(G_4),\rho(G_6),\rho(G_{10})$。

2)$i=2,3$ 时,$G_i=P+Pb+Pb^2+Pb^3$。以 G_2 为例计算 G_i 的各阶元的个数。$P=\langle a\rangle$ 中有1个1阶元,$p-1$ 个 p 阶元,$p(p-1)$ 个 p^2 阶元。讨论形如 a^ib 的元,$a^ib=ba^{-i}$,$(a^ib)^2=(ba^{-i})(a^ib)=b^2$,故 $|a^ib|=4$,有 p^2 个4阶元,因为 P 为 G 的正规子群,$Pb^3=b^3P=b^{-1}P=(Pb)^{-1}$,于是 $|a^ib^3|=4$,有 p^2 个4阶元。讨论形如 a^ib^2 的元,$a^ib^2=b^2a^i$,$i=0$ 时,$|b^2|=2$,$i\neq0$ 时,当 $|a^i|=p$ 时,$|a^ib^2|=2p$,当 $|a^i|=p^2$ 时,$|a^ib^2|=2p^2$ 时,于是形如 a^ib^2 的元中有1个2阶元,有 $p-1$ 个 $2p$ 阶元,$p(p-1)$ 个 $2p^2$ 阶元。综上有 $\alpha_1=1,\alpha_2=1,\alpha_4=2p^2,\alpha_p=p-1,\alpha_{2p}=p-1,a_{p^2}=p(p-1),\alpha_{2p^2}=p(p-1)$。即得 $\rho(G_2)$。

同理可得 $\rho(G_3)$。

3)$G_5=P+Pb+Pc+Pbc$。$P=\langle a\rangle$ 中有1个1阶元,$p-1$ 个 p 阶元,$p(p-1)$ 个 p^2 阶元。讨论形如 a^ib 的元,$i=0$ 时,$|b|=2$,$i\neq0$ 时,因为 $[a,b]=1$,当 $|a^i|=p$ 时,$|a^ib|=2p$,当 $|a^i|=p^2$ 时,$|a^ib|=2p^2$,于是形如 a^ib 的元中有1个2阶元,有 $p-1$ 个 $2p$ 阶元,$p(p-1)$ 个 $2p^2$ 阶元。讨论形如 a^ic 的元,因 $a^ic=ca^{-i}$,故 $(a^ic)^2=c^2=1$,从而 $|a^ic|=2p$,有 p^2 个2阶元。最后讨论形状为 a^ibc 的元,由 $[b,a^ic]=1$ 可得 $|a^ibc|=2$,有 p^2 个2阶元。综上有 $\alpha_1=1,\alpha_2=2p^2+1,\alpha_p=p-1,\alpha_{2p}=p-1,a_{p^2}=p(p-1),\alpha_{2p^2}=p(p-1)$。即得 $\rho(G_5)$。

4)$i=7,8,9$ 时,$G_i=P+Pc+Pg+Pcg$。以 G_7 为例计算 G_i 的各阶元的个数。$P=\langle a,b\rangle$ 中有1个1阶

元,p^2-1 个 p 阶元。讨论形如 a^ib^jc 的元,$i=j=0$ 时,$|c|=2$,i,j 不同时为 0 时,因 $a^ib^jc=c(a^ib^j)$,从而 $|a^ib^jc|=2p$,于是形如 a^ib^jc 的元中有 1 个 2 阶元,p^2-1 个 $2p$ 阶元。讨论形如 a^ib^jg 的元,$a^ib^jg=ga^{-i}b^{-j}$,$(a^ib^jg)^2=g^2=1$,故 $|a^ib^jg|=2$,共有 p^2 个 2 阶元。最后讨论形如 a^ib^jcg 的元,由于 $[c,a^ib^jg]=1$,故 $|a^ib^jcg|=2$,共 p^2 个 2 阶元。综上有 $\alpha_1=1$,$\alpha_2=2p^2+1$,$\alpha_p=p^2-1$,$\alpha_{2p}=p^2-1$。即得 $\rho(G_7)$。

同理可得 $\rho(G_8)$,$\rho(G_9)$。

5) $i=11,12,13,14$ 时,$G_i=P+Pc+Pc^2+Pc^3$。以 G_{11} 为例计算 G_i 的各阶元的个数。$P=\langle a,b\rangle$ 中有 1 个 1 阶元,p^2-1 个 p 阶元。讨论形如 a^ib^jc 的元,$a^ib^jc=ca^{-i}b^{-j}$,$(a^ib^jc)^2=c^2$,所以 $|a^ib^jc|=4$,共有 p^2 个 4 阶元,由 P 的正规性可得 $|a^ib^jc^3|=4$,共 p^2 个 4 阶元。最后讨论形如 $a^ib^jc^2$ 的元,$i=j=0$ 时,$|c^2|=2$,i,j 不同时为 0 时,因 $a^ib^jc^2=c^2(a^ib^j)$,所以 $|a^ib^jc^2|=2p$,于是形如 $a^ib^jc^2$ 的元中有 1 个 2 阶元,p^2-1 个 $2p$ 阶元。综上有 $\alpha_1=1$,$\alpha_2=1$,$\alpha_4=2p^2$,$\alpha_p=p^2-1$,$\alpha_{2p}=p^2-1$。即得 $\rho(G_{11})$。

同理可得 $\rho(G_{12})$,$\rho(G_{13})$,$\rho(G_{14})$。

6) $i=15,16$ 时,$G_i=P+Pc+Pc^2+Pc^3$。

首先计算 G_{15} 的各阶元的个数。$P=\langle a,b\rangle$ 中有 1 个 1 阶元,p^2-1 个 p 阶元。由定义关系有

$$a^ic=ca^{ir}b^{ir},\ b^jc=ca^{-jr}b^{-jr},\ a^ic^2=c^2b^{2ir^2},\ b^jc^2=c^2a^{-2jr^2}$$

讨论形如 $a^ib^jc^2$ 的元。因 $a^ib^jc^2=c^2a^{-2jr^2}b^{2ir^2}$,$(a^ib^jc^2)^2=a^{i-2jr^2}b^{j+2ir^2}$,考虑同余方程组

$$\begin{cases}i-2jr^2\equiv 0(\bmod p)\\ j+2ir^2\equiv 0(\bmod p)\end{cases}\tag{1}$$

由 $(2r+1)^2\equiv -1(\bmod p)$ 得 $2r^2\equiv -1-2r(\bmod p)$,于是(1)式可转化为

$$\begin{cases}i+(1+2r)j\equiv 0(\bmod p)\quad (*)\\ j-(1+2r)i\equiv 0(\bmod p)\quad (**)\end{cases}\tag{2}$$

因 $i+(1+2r)j\equiv(1+2r)i+(1+2r)^2j\equiv -j+(1+2r)i\equiv 0(\bmod p)$,即($*$)式与($**$)式同解,故只考虑($**$)式,此同余式恰有 p 组解 (i,j)。所以形如 $a^ib^jc^2$ 的元中 p 有个 2 阶元,余下的为 p^2-p 个 $2p$ 阶元($|a^ib^jc^2|\neq p$,否则 $a^ib^jc^2\in P$,$c^2\in P$ 矛盾)。

讨论形如 a^ib^jc 的元。

$(a^ib^jc)^2=a^{i-2(i+j)r^3}b^{j+2(i-j)r^3}c^2=a^{-j-(i+j)r}b^{i+(i-j)r}c^2$,将 $(-j-(i+j)r,i+(i-j)r)$ 代入($*$)式成立,为(2)式的一组解,所以 $(a^ib^jc)^2=c^2$,$|a^ib^jc|=4$,有 p^2 个 4 阶元。又 $Pc^3=(Pc)^{-1}$,所以 $|a^ib^jc^3|=4$,有 p^2 个 4 阶元。

综上有 $\alpha_1=1$,$\alpha_2=p$,$\alpha_4=2p^2$,$\alpha_p=p^2-1$,$\alpha_{2p}=p(p-1)$,即得 $\rho(G_{15})$。

最后计算 G_{16} 的各阶元的个数。$P=\langle a,b\rangle$ 中有 1 个 1 阶元,p^2-1 个 p 阶元。

讨论形如 a^ib^jc 的元,$a^ib^jc=ca^{-ir+jr}b^{-ir-jr}$,$(a^ib^jc)^2=c^2a^{-2jr^2-ir+jr}b^{2ir^2-ir-jr}=a^{i+2ir^3+2jr^3}b^{j+2jr^3-2ir^3}c^2$,$(a^ib^jc)^4=a^{i+2ir^3+2jr^3-2jr^2-ir+jr}b^{j+2jr^3-2ir^3+2ir^2-ir-jr}=a^{i+(1+2r)j}b^{j-(1+2r)i}$,考虑同余方程组 $\begin{cases}i+(1+2r)j\equiv 0(\bmod p)\\ j-(1+2r)i\equiv 0(\bmod p)\end{cases}$,即同余方程组(2),有 p 组解 (i,j),此时 $(a^ib^ic)^4=1$,$|a^ib^jc|=4$,即形如 a^ib^jc 的 4 阶元有 p 个,而余下的 p^2-p 个元阶 $4p$ 为(因 $(a^ib^jc)^{2(2k+1)}=a^sb^tc^2\neq 1$,故 $|a^ib^jc|\neq 2p$,而且 $|a^ib^jc|\neq 2,4,p$,故此时 $|a^ib^jc|=4p$)。

讨论形如 $a^ib^jc^2$ 的元,$a^ib^jc^2=c^2a^{-2jr^2}b^{2ir^2}$,$(a^ib^jc^2)^2=a^{i-2jr^2}b^{j+2ir^2}$,考虑同余方程组 $\begin{cases}i-2jr^2\equiv 0(\bmod p)\\ j+2ir^2\equiv 0(\bmod p)\end{cases}$,同(1)式,也即(2)式,所以形如 $a^ib^jc^2$ 的元中有 p 个 2 阶元,p^2-p 个 $2p$ 阶元。

综上有 $\alpha_1=1$,$\alpha_2=p$,$\alpha_4=2p$,$\alpha_p=p^2-1$,$\alpha_{2p}=p(p-1)$,$\alpha_{4p}=2p(p-1)$,即得 $\rho(G_{16})$。　　证毕

定理 1　设 M 为 $4p^2$ 阶群(其中素数 $p>3$),则

1) $p\equiv -1(\bmod 4)$ 时,$g(M)=1$;

2) $p\equiv 1(\bmod 4)$ 时,若 $M=G_{12},G_{14}$ 则 $g(M)=2$ 若 $M\neq G_{12},G_{14}$,则 $g(M)=1$。

2 36 阶群的 g 函数值

引理 3[8]　36 阶群共有如下 14 个互不同构的类型

1) $G_1=\langle a\rangle, a^{36}=1$(循环群);

2) $G_2=\langle a,b\rangle, a^{18}=b^2=1=[a,b]$(交换群);

3) $G_3=\langle a,b\rangle, a^{18}=1=b^2, b^{-1}ab=a^{-1}$(二面体群);

4) $G_4=\langle a,b\rangle, a^{18}=1, b^2=a^9, b^{-1}ab=a^{-1}$(广义四元数群);

5) $G_5=\langle a,b,c,g\rangle, a^3=b^3=c^2=g^2=1$(交换群);

6) $G_6=\langle a,b,g\rangle, a^3=b^3=g^4=1=[a,b]=[a,g]=[b,g]$(交换群);

7) $G_7=\langle a,b,c,g\rangle, a^3=b^3=c^2=g^2=1=[a,b]=[c,g]=[a,c]=[b,c]$;

8) $G_8=\langle a,b,g\rangle, a^3=b^3=g^4=1=[a,b], g^{-1}ag=a^{-1}, g^{-1}bg=b^{-1}$;

9) $G_9=\langle a,b,c,g\rangle, a^3=b^3=c^2=g^2=1=[a,b]=[c,g]=[a,c]=[b,c], g^{-1}ag=b, g^{-1}bg=a$;

10) $G_{10}=\langle a,b,g\rangle, a^3=b^3=g^4=1=[a,b], g^{-1}ag=b, g^{-1}bg=a$;

11) $G_{11}=\langle a,b,c,g\rangle, a^3=b^3=c^2=g^2=1=[a,b]=[c,g], c^{-1}ac=a^{-1}, c^{-1}bc=b^{-1}, g^{-1}ag=b, g^{-1}bg=a$;

12) $G_{12}=\langle a,b,g\rangle, a^3=b^3=g^4=1=[a,b], g^{-1}ag=b^{-1}, g^{-1}bg=a$;

13) $G_{13}=\langle a,b,c,g\rangle, a^2=b^2=c^3=g^3=1=[a,b]=[c,g]=[a,c]=[b,c], g^{-1}ag=b, g^{-1}bg=ab$;

14) $G_{14}=\langle a,b,g\rangle, a^2=b^2=g^9=1=[a,b], g^{-1}ag=b, g^{-1}bg=ab$;

定理2 对引理3中的 $G_i, i=1,2,\cdots,14$,有下列结果

$\rho(G_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6,\alpha_9,\alpha_{12},\alpha_{18},\alpha_{36})=(1,1,2,2,2,6,4,6,12)$;

$\rho(G_2)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6,\alpha_9,\alpha_{12},\alpha_{18},\alpha_{36})=(1,3,2,0,6,6,0,18,0)$;

$\rho(G_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6,\alpha_9,\alpha_{12},\alpha_{18},\alpha_{36})=(1,19,2,0,2,6,0,6,0)$;

$\rho(G_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6,\alpha_9,\alpha_{12},\alpha_{18},\alpha_{36})=(1,1,2,18,2,6,0,6,0)$;

$\rho(G_5)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6,\alpha_9,\alpha_{12},\alpha_{18},\alpha_{36})=(1,3,8,0,24,0,0,0,0)$;

$\rho(G_6)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6,\alpha_9,\alpha_{12},\alpha_{18},\alpha_{36})=(1,1,8,2,8,0,16,0,0)$;

$\rho(G_7)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6,\alpha_9,\alpha_{12},\alpha_{18},\alpha_{36})=(1,19,8,0,8,0,0,0,0)$;

$\rho(G_8)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6,\alpha_9,\alpha_{12},\alpha_{18},\alpha_{36})=(1,1,8,18,8,0,0,0,0)$;

$\rho(G_9)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6,\alpha_9,\alpha_{12},\alpha_{18},\alpha_{36})=(1,7,8,0,20,0,0,0,0)$;

$\rho(G_{10})=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6,\alpha_9,\alpha_{12},\alpha_{18},\alpha_{36})=(1,1,8,6,8,0,12,0,0)$;

$\rho(G_{11})=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6,\alpha_9,\alpha_{12},\alpha_{18},\alpha_{36})=(1,15,8,0,12,0,0,0,0)$;

$\rho(G_{12})=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6,\alpha_9,\alpha_{12},\alpha_{18},\alpha_{36})=(1,9,8,18,0,0,0,0,0)$;

$\rho(G_{13})=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6,\alpha_9,\alpha_{12},\alpha_{18},\alpha_{36})=(1,3,26,0,6,0,0,0,0)$;

$\rho(G_{14})=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6,\alpha_9,\alpha_{12},\alpha_{18},\alpha_{36})=(1,3,2,0,6,24,0,0,0)$。

证明 由引理3直接计算可得。 证毕

定理3 设 M 为36阶群,则 $g(M)=1$。

最后,将定理1与定理3统一,得到定理4。

定理4 设 M 为 $4p^2$ 阶群(其中 p 为奇素数),则

1) $p\equiv -1 \pmod 4$ 时,$g(M)=1$;

2) $p\equiv 1 \pmod 4$ 时,若 $M=G_{12},G_{14}$ 则 $g(M)=2$ 若 $M\neq G_{12},G_{14}$,则 $g(M)=1$。

参考文献:

[1] 张远达. 有限群的构造(上册)[M]. 北京 科学出版社,1982.

[2] 施武杰. 关于有限群的"阶"[J]. 常熟理工学院学报,2005,19(4):1-5.

[3] National University of Singapore. Group Theory-Proceeding of the 1987 Singapore Group Theory Conference[C]//Shi W J. A new characterization of the sporadic simple groups. Berlin/NewYork :Walter de Gruyter,1989 :531-540.

[4] 徐明曜. 有限群导引(上册)[M]. 北京 科学出版社,1987.

[5] 张远达. 有限群的构造(下册)[M]. 北京 科学出版社,1982.

[6] 苑金枝. 2^3p 阶群的一个新刻画[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2008，30(4)：7-10.
[7] 陈松良. $4p^2$ 阶群的构造[J]. 汉中师范学院学报(自然科学版)，2001，19(1)：13-18.
[8] 陈松良. 36 阶群的完全分类[J]. 烟台师范学院学报(自然科学版)，2002，18(4)：249-253.

The g Function Values of Groups with Order $4p^2$

ZHANG Ning, *CAO Hong-ping*

(School of Mathematics and Statistics, Southuest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: Let G be a finite group and d be a positive integer, let $G(d) = \{x \in G \mid x^d = 1\}$. If G_1 and G_2 are two finite groups, $|G_1(d)| = |G_2(d)|$, $d = 1,2,\cdots$, then G_1 and G_2 are groups and their order types are same. In this article we discuss a problem in relation to Thompson supposition, it is that when two finite groups with same order type, they are isomorphic or not, and we define $g(G)$ as the g function value of finite group G, it represents the number of isomorphic classes that groups with the same order type to G. In this article we obtain the order type of groups with order $4p^2$ by computing their constructions, and obtain their g function values. Particularly, we get a pair of groups with order $4p^2$, whose order types are the same and g function values are two, that is, there are two unisomorphic groups with order $4p^2$ and their order types are the same. Here p is an odd prime number.

Key words: finite group; order type; g function value

（责任编辑　黄　颖）