运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20160423

一类半无限规划的鞍点条件*

李向有
(延安大学 数学与计算机学院,陕西 延安 716000)

摘要:半无限规划是指约束条件有无限多个的一类规划。利用一类 B-(p,r,a)不变凸函数,研究了非光滑半无限规划的鞍点问题,得到了当不完全 Lagrange 函数为非光滑 B-(p,r,a)伪不变凸函数、约束函数为 B-(p,r,a)拟不变凸函数时,鞍点充分性条件,把已有文献中可微、有限约束条件的鞍点结论推广到非光滑、无限约束条件的情形,在新的凸性下得到一些重要结果。

关键词:B-(p,r,a)不变凸函数;半无限;不完全 Lagrange 函数;鞍点
中图分类号:O221.2;O224　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2016)04-0010-05

近年来对 B-(p,r)凸函数的研究成为凸规划里的一个热点。2003 年 Antczak[1] 定义了可微 B-(p,r)凸函数,并用于研究单目标规划问题。许多学者在 B-(p,r)凸函数的基础上推广了大量不变凸函数,并用于研究不同的规划问题[2-9],得到了许多有益的结果。鞍点问题也是凸规划里面一个很重要的内容,Bector[10] 在一般鞍点问题的基础上,提出了不完全 Lagrange 函数的鞍点,并利用不变凸函数研究了单目标有限约束规划的鞍点条件。在此基础上,Chen[11] 利用 F 凸函数研究了单目标有限约束规划的不完全 Lagrange 函数的鞍点问题,李向有[12-13] 利用(h,φ)不变凸函数研究了单目标、多目标有限约束规划的不完全 Lagrange 函数的鞍点问题,得到了许多重要的结论。

半无限规划是指数学规划中约束条件有无限多个的一类规划问题。本文在上述文献的基础上,把相应规划中有限个约束条件推广到无限可列个约束条件,利用 B-(p,r,a)不变凸函数、B-(p,r,a)拟不变凸函数、B-(p,r,a)伪不变凸函数[14],研究一类非光滑单目标半无限规划的不完全 Lagrange 函数的鞍点问题。

1 基本定义

称实值函数 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是局部 Lipschitz 的,若对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$,存在一个正数 k 和 $\boldsymbol{x}$ 的邻域 $N(\boldsymbol{x})$,对任意 $\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in N(\boldsymbol{x})$,使得 $\|f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{z})\|\leqslant k\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\|$。

若函数 f 为局部 Lipschitz 的,那么函数 $f:X\to\mathbf{R}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 沿方向 $\boldsymbol{d}$ 的 Clarke 广义方向导数和 Clarke 广方义方向梯度分别定义为:

$$f^0(\boldsymbol{x};\boldsymbol{d})=\limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}}\frac{f(\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{d})-f(\boldsymbol{y})}{t},\partial f(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^n:f^0(\boldsymbol{x};\boldsymbol{d})\geqslant\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d},\forall\,\boldsymbol{d}\in\mathbf{R}^n\}。$$

已有的各种利用 B-(p,r)凸函数讨论规划问题的文献,都是取了 B-(p,r)凸函数 4 种形式中的一种讨论,其他情况类似可证。下面给出在 $p,r\neq 0$ 时 B-(p,r,a)不变凸函数的定义,此类函数的例子在文献[14]中已有说明。

定义 1[14]　设 $X\subset\mathbf{R}^n$ 是非空开集,$f:X\to\mathbf{R}$ 是 X 上的 Lipschitz 函数,p,r 是任意非零实数,$\boldsymbol{u}\in X$,若 $\forall\,\boldsymbol{x}\in X$,存在向量函数 $\boldsymbol{\eta}:X\times X\to\mathbf{R}^n$,函数 $b:X\times X\to\mathbf{R}_+$($\mathbf{R}_+$ 是非负实数),$a:X\times X\to\mathbf{R}$,使得对任意的 $\boldsymbol{\xi}\in\partial f(\boldsymbol{u})$有 $\frac{1}{r}b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})(\mathrm{e}^{r(f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{u}))}-1)\geqslant\frac{1}{p}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(\mathrm{e}^{p\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}-\boldsymbol{I})+a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$成立,则称 f 在 $\boldsymbol{u}$ 点为关于函数 $\boldsymbol{\eta},b$ 的 B-(p,r,a)不变凸

* 收稿日期:2015-04-13　修回日期:2016-05-21　网络出版时间:2016-07-07 16:33
资助项目:国家自然科学基金(No. 61379026);陕西省教育厅科研项目(No. 14JK1840)
作者简介:李向有,男,副教授,研究方向为最优化理论与应用,E-mail:yadxlxy@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20160707.1633.034.html

函数。

定义 2[14]　设 $X\subset\mathbf{R}^n$ 是非空开集，$f:X\to\mathbf{R}$ 是 X 上的 Lipschitz 函数，p,r 是任意非零实数，$\boldsymbol{u}\in X$，若 $\forall\boldsymbol{x}\in X$，存在向量函数 $\boldsymbol{\eta}:X\times X\to\mathbf{R}^n$，函数 $b:X\times X\to\mathbf{R}_+$（$\mathbf{R}_+$ 是非负实数），$a:X\times X\to\mathbf{R}$，使得对任意的 $\boldsymbol{\xi}\in\partial f(\boldsymbol{u})$ 有

$$\frac{1}{r}b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})(\mathrm{e}^{r(f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{u}))}-1)\leqslant 0\Rightarrow\frac{1}{p}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(\mathrm{e}^{p\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}-\boldsymbol{I})+a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\leqslant 0$$

成立，则称 f 在 $\boldsymbol{u}$ 点为关于函数 $\boldsymbol{\eta},b$ 的 B-(p,r,a)拟不变凸函数。

定义 3[14]　设 $X\subset\mathbf{R}^n$ 是非空开集，$f:X\to\mathbf{R}$ 是 X 上的 Lipschitz 函数，p,r 是任意非零实数，$\boldsymbol{u}\in X$，若 $\forall\boldsymbol{x}\in X$，存在向量函数 $\boldsymbol{\eta}:X\times X\to\mathbf{R}^n$，函数 $b:X\times X\to\mathbf{R}_+$（$\mathbf{R}_+$ 是非负实数），$a:X\times X\to\mathbf{R}$，使得对任意的 $\boldsymbol{\xi}\in\partial f(\boldsymbol{u})$ 有

$$\frac{1}{p}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(\mathrm{e}^{p\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}-\boldsymbol{I})+a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\geqslant 0\Rightarrow\frac{1}{r}b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})(\mathrm{e}^{r(f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{u}))}-1)\geqslant 0。$$

它的等价形式为

$$\frac{1}{r}b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})(\mathrm{e}^{r(f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{u}))}-1)<0\Rightarrow\frac{1}{p}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(\mathrm{e}^{p\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}-\boldsymbol{I})+a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})<0$$

成立，则称 f 在 $\boldsymbol{u}$ 点为关于函数 $\boldsymbol{\eta},b$ 的 B-(p,r,a)伪不变凸函数。

这里 $\boldsymbol{I}=(1,1,\cdots,1)\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{e}^{(a_1,a_2,\cdots,a_n)}=(\mathrm{e}^{a_1},\mathrm{e}^{a_2},\cdots,\mathrm{e}^{a_n})$。

2 鞍点条件

考虑下列半无限规划问题(P)

$$\begin{aligned}(\mathrm{P})\quad &\min f(\boldsymbol{x}),\\ &\mathrm{s.\,t.}\ \ g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\leqslant 0,\boldsymbol{x}\in X^0\subseteq\mathbf{R}^n,\boldsymbol{u}\in Y\subset\mathbf{R}^n。\end{aligned}$$

这里 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$，$g:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$ 为局部 Lipschitz 的实值函数，Y 为无限可数参数集。记问题(P)的可行集

$$X=\{\boldsymbol{x}\,|\,g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\leqslant 0,\boldsymbol{x}\in X^0\subseteq\mathbf{R}^n,\boldsymbol{u}\in Y\subset\mathbf{R}^n\},$$

$\Delta=\{j\,|\,g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^j)\leqslant 0,\boldsymbol{u}^j\in Y\subset\mathbf{R}^n\}$是可数指标集，$J_1\subseteq\Delta$，$J_2=\Delta\backslash J_1$，$\Lambda_1=\{v_j\,|\,v_j\geqslant 0,j\in J_1\}$，$\Lambda_2=\{v_j\,|\,v_j\geqslant 0,j\in J_2\}$。假定下面出现的关于 $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$的广义级数都有意义。

称 $L(\boldsymbol{x},v_j)=f(\boldsymbol{x})+\sum\limits_{j\in J_1}v_jg(\boldsymbol{x},u^j)$，$v_j\in\Lambda_1$ 为问题(P)的不完全 Lagrange 函数。

定义 4　若对所有的可行解 $\boldsymbol{x}\in X$ 和 $v_j\in\Lambda_1$，有 $L(\bar{\boldsymbol{x}},v_j)\leqslant L(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{v}_j)\leqslant L(\boldsymbol{x},\bar{v}_j)$，则称点$(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{v}_j)\in X\times\Lambda_1$ 为不完全 Lagrange 函数的鞍点。

定义 5　设$\bar{\boldsymbol{x}}$是问题(P)的可行解，若对 $\forall\boldsymbol{u}^j\in Y$，都有

$$0\in\partial f(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{j\in\Delta}\bar{v}_j\partial g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j),\bar{v}_jg(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j)=0,\bar{v}_j\geqslant 0,j\in\Delta,\tag{1}$$

则称$\bar{\boldsymbol{x}}$是问题(P)的 K-T 点。

引理 1[15]　对于任意实数 s_i 和实函数 f_i 总有 $\partial\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}s_if_i\Big)(\boldsymbol{x})\subset\sum\limits_{i=1}^{n}s_i\partial f_i(\boldsymbol{x})$ 成立，如果至少有一个 f_i 在 $\boldsymbol{x}$ 严格可微，则有 $\partial\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}s_if_i\Big)(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{i=1}^{n}s_i\partial f_i(\boldsymbol{x})$。

定理 1　对所有的 $v_j\in\Lambda_1$，$f(\boldsymbol{x})+\sum\limits_{j\in J_1}v_jg(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^j)$ 在$\bar{\boldsymbol{x}}$关于函数 $\boldsymbol{\eta},b_0$ 是 B-(p,r,a)伪不变凸函数，对于所有的 $v_j\in\Lambda_2$，$\sum\limits_{j\in J_2}v_jg(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^j)$ 在$\bar{\boldsymbol{x}}$关于函数 $\boldsymbol{\eta},b_1$ 是 B-(p,r,c)拟不变凸函数，并且至少存在一个 $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^j)$，$j\in J_1$ 和至少存在一个 $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^j)$，$j\in J_2$ 在$\bar{\boldsymbol{x}}$严格可微，$\bar{\boldsymbol{x}}$是问题(P)的 K-T 点，$a(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})+c(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\geqslant 0$，则存在$\bar{v}_j\in\Lambda_1$ 使得$(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{v}_j)$为不完全 Lagrange 函数的鞍点。即对所有可行解 $\boldsymbol{x}\in X$，$v_j\in\Lambda_1$，有 $L(\bar{\boldsymbol{x}},v_j)\leqslant L(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{v}_j)\leqslant L(\boldsymbol{x},\bar{v}_j)$。

证明　因为$\bar{\boldsymbol{x}}$是问题(P)的 K-T 点，由(1)式可得对任意$\bar{v}_j\geqslant 0(j\in\Delta)$，存在 $\boldsymbol{\xi}\in\partial f(\bar{\boldsymbol{x}})$和存在 $\tau_j\in\partial g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j)$，$j\in\Delta$ 有

$$\boldsymbol{\xi}+\sum_{j\in\Delta}\bar{v}_j\tau_j=0,\bar{v}_jg(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j)=0,\bar{v}_j\geqslant 0。\tag{2}$$

对问题(P)的可行解 $\boldsymbol{x}\in X$,有 $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^j)\leqslant 0,\bar{v}_j\geqslant 0,j\in J_2,\sum\limits_{j\in J_2}\bar{v}_j g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^j)\leqslant 0$,又因为$\bar{v}_j g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j)=0$,故有 $\sum\limits_{j\in J_2}\bar{v}_j g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^j)\leqslant\sum\limits_{j\in J_2}\bar{v}_j g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j)$,即有$\frac{1}{r}b_1(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})(\mathrm{e}^{r(\sum\limits_{j\in J_2}\bar{v}_j g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^j)-\sum\limits_{j\in J_2}\bar{v}_j g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j))}-1)\leqslant 0$。

又 $\sum\limits_{j\in J_2}v_j g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^j)$ 在$\bar{\boldsymbol{x}}$关于函数 $\boldsymbol{\eta},b_1$ 是 B-(p,r,c)拟不变凸函数,再结合引理 1,可得对任意 $\tau_j\in\partial g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j)$,$j\in J_2$ 有

$$\frac{1}{p}\Big(\sum_{j\in J_2}\bar{v}_j\tau_j\Big)^{\mathrm{T}}(\mathrm{e}^{p\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})}-\boldsymbol{I})+c(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\leqslant 0。\tag{3}$$

假设 $L(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{v}_j)\leqslant L(\boldsymbol{x},\bar{v}_j)$不成立,即有 $f(\boldsymbol{x})+\sum\limits_{j\in J_1}\bar{v}_j g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^j)<f(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum\limits_{j\in J_1}\bar{v}_j g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j)$,则有

$$\frac{1}{r}b_0(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})(\mathrm{e}^{r(f(\boldsymbol{x})+\sum\limits_{j\in J_1}\bar{v}_j g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^j)-(f(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum\limits_{j\in J_1}\bar{v}_j g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j)))}-1)<0。$$

又 $f(\boldsymbol{x})+\sum\limits_{j\in J_1}v_j g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^j)$ 在$\bar{\boldsymbol{x}}$关于函数 $\boldsymbol{\eta},b_0$ 是 B-(p,r,a)伪不变凸函数,由定义 3 中的等价定义和引理 1 可知,对任意的 $\boldsymbol{\xi}\in\partial f(\bar{\boldsymbol{x}})$和任意的 $\tau_j\in\partial g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j)$,$j\in J_1$ 有

$$\frac{1}{p}\Big(\boldsymbol{\xi}+\sum_{j\in J_1}\bar{v}_j\tau_j\Big)^{\mathrm{T}}(\mathrm{e}^{p\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})}-\boldsymbol{I})+a(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})<0。\tag{4}$$

(3)式和(4)式相加,再由(2)式可得,$a(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})+c(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})<0$,这与已知条件矛盾,所以 $L(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{v}_j)\leqslant L(\boldsymbol{x},\bar{v}_j)$。又

$$\sum_{j\in J_1}v_j g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j)\leqslant\sum_{j\in J_1}\bar{v}_j g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j)=0,v_j\in\Lambda_1,$$

所以

$$f(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{j\in J_1}v_j g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j)\leqslant f(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{j\in J_1}\bar{v}_j g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j)。$$

即 $L(\bar{\boldsymbol{x}},v_J)\leqslant L(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{v}_j)$,结合上面证明可知 $L(\bar{\boldsymbol{x}},v_J)\leqslant L(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{v}_j)\leqslant L(\boldsymbol{x},\bar{v}_j)$。

即$(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{v}_j)$是问题(P)的不完全 Lagrange 函数的鞍点。 证毕

定理 2 对所有的 $v_j\in\Lambda_1$,$f(\boldsymbol{x})+\sum\limits_{j\in J_1}v_j g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^j)$ 在$\bar{\boldsymbol{x}}$关于函数 $\boldsymbol{\eta},b_0$ 是 B-(p,r,a)不变凸函数,对于所有的 $v_j\in\Lambda_2$,$\sum\limits_{j\in J_2}v_j g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^j)$ 在$\bar{\boldsymbol{x}}$关于函数 $\boldsymbol{\eta},b_1$ 是 B-(p,r,c)不变凸函数,且至少存在一个 $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^j)$,$j\in J_1$ 和至少一个 $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^j)$,$j\in J_2$ 在$\bar{\boldsymbol{x}}$严格可微,$\bar{\boldsymbol{x}}\in X$ 是问题(P)的 K-T 点,$a(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})+c(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\geqslant 0$,则$(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{v}_j)$是问题(P)的不完全 Lagrange 函数的鞍点。即对所有的 $\boldsymbol{x}\in X$,$v_j\in\Lambda_1$,有 $L(\bar{\boldsymbol{x}},v_J)\leqslant L(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{v}_j)\leqslant L(\boldsymbol{x},\bar{v}_j)$。

证明 因为$\bar{\boldsymbol{x}}$是问题(P)的 K-T 点,由(1)式可得对任意$\bar{v}_j\geqslant 0(j\in\Delta)$,存在 $\boldsymbol{\xi}\in\partial f(\bar{\boldsymbol{x}})$和存在 $\tau_j\in\partial g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j)$,$j\in\Delta$ 有

$$\boldsymbol{\xi}+\sum_{j\in\Delta}\bar{v}_j\tau_j=0,\bar{v}_j g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j)=0,\bar{v}_j\geqslant 0。\tag{5}$$

对问题(P)的可行解

$$\boldsymbol{x}\in X,g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^j)\leqslant 0,\bar{v}_j\geqslant 0,j\in J_2,\sum_{j\in J_2}\bar{v}_j g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^j)\leqslant 0,$$

又$\bar{v}_j g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j)=0$,故有 $\sum\limits_{j\in J_2}\bar{v}_j g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^j)\leqslant\sum\limits_{j\in J_2}\bar{v}_j g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j)$,即有

$$\frac{1}{r}b_1(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})(\mathrm{e}^{r(\sum\limits_{j\in J_2}\bar{v}_j g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^j)-\sum\limits_{j\in J_2}\bar{v}_j g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j))}-1)\leqslant 0。$$

又因为对于所有的 $v_j\in\Lambda_2$,$\sum\limits_{j\in J_2}v_j g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^j)$ 在$\bar{\boldsymbol{x}}$关于函数 $\boldsymbol{\eta},b_1$ 是 B-(p,r,c)不变凸函数,再结合引理 1,可得对任意 $\tau_j\in\partial g(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}^j)$,$j\in J_2$,有 $\frac{1}{p}(\sum\limits_{j\in J_2}\bar{v}_j\tau_j)^{\mathrm{T}}(\mathrm{e}^{p\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})}-\boldsymbol{I})+c(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\leqslant 0$。

再由(5)式和 $a(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})+c(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\geqslant 0$,结合上式可得 $\frac{1}{p}\Big(\boldsymbol{\xi}+\sum\limits_{j\in J_1}\bar{v}_j\tau_j\Big)^{\mathrm{T}}(\mathrm{e}^{p\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})}-\boldsymbol{I})+a(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\geqslant 0$。对所有的

$v_j \in \Lambda_1, f(\boldsymbol{x}) + \sum_{j\in J_1} v_j g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^j)$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 关于函数 $\boldsymbol{\eta}, b_1$ 是 B-(p,r,a) 不变凸函数，结合引理 1 故有

$$\frac{1}{r} b_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^0)\left(e^{r\left(f(\boldsymbol{x}) + \sum_{j\in J_1} \bar{v}_j g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^j) - \left(f(\bar{\boldsymbol{x}}) + \sum_{j\in J_1} \bar{v}_j g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}^j)\right)\right)} - 1\right) \geqslant 0。$$

即有 $f(\boldsymbol{x}) + \sum_{j\in J_1} \bar{v}_j g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^j) \geqslant f(\bar{\boldsymbol{x}}) + \sum_{j\in J_1} \bar{v}_j g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}^j)$。即 $L(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{v}_J) \leqslant L(\boldsymbol{x}, \bar{v}_J)$，再由定理 1 证明可得 $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{v}_J)$ 是问题(P)的不完全 Lagrange 函数的鞍点。　　证毕

定理 3　若 $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{v}_J)$ 是问题(P)的不完全 Lagrange 函数的鞍点，则有 $\sum_{j\in J_1} \bar{v}_j g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}^j) = 0$，且 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(P)的最优解。

证明　因为 $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{v}_J)$ 是问题(P)的不完全 Lagrange 函数的鞍点，则由 $L(\bar{\boldsymbol{x}}, v_J) \leqslant L(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{v}_J)$ 可得 $\sum_{j\in J_1} v_j g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}^j) \leqslant \sum_{j\in J_1} \bar{v}_j g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}^j)$，又 $v_j \geqslant 0$，具有任意性，令 $v_j = 2\bar{v}_j$，则 $\sum_{j\in J_1} \bar{v}_j g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}^j) \leqslant 0$，令 $v_j = \frac{1}{2}\bar{v}_j$，则 $\sum_{j\in J_1} \bar{v}_j g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}^j) \geqslant 0$，故 $\sum_{j\in J_1} \bar{v}_j g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}^j) = 0$。由 $L(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{v}_J) \leqslant L(\boldsymbol{x}, \bar{v}_J)$ 可得

$$f(\boldsymbol{x}) + \sum_{j\in J_1} \bar{v}_j g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^j) \geqslant f(\bar{\boldsymbol{x}}) + \sum_{j\in J_1} \bar{v}_j g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}^j),$$

又 $\bar{v}_j g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^j) \leqslant 0, j \in \Delta$，$\sum_{j\in J_1} \bar{v}_j g(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}^j) = 0$。故可得 $f(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\bar{\boldsymbol{x}})$，即 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(P)的最优解。　　证毕

参考文献：

[1] Antczak T. A class of B-(p,r) invex functions and mathematical programming[J]. J Math Anal Appl, 2003, 286(3): 187-206.

[2] 孙玉华，张艳. B-(p,r)不变凸规划问题的最优性讨论[J]. 辽宁师范大学学报：自然科学版，2005，28(2)：139-142.
Sun Y H, Zhang Y. Optimality discussions for programming problems with B-(p,r)-invexity functions[J]. Journal of Liaoning Normal University: Natural Science Edition, 2005, 28(2): 139-142.

[3] Antczak T. Generalized fractional minimax programming with B-(p,r)-invexity[J]. Computer and Mathematics with Applications, 2008, 56(9): 1505-1525.

[4] Zhang Y, Zhu B, Xu Y T. A class of Lipschitz B-(p,r)-invex functions and nonsmooth programming[J]. OR Transactions, 2009, 13(1): 61-71.

[5] 彭再云，万轩. B-(p,r)-预不变凸规划的 Wolfe 对偶问题与极小化问题[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2010，27(6)：1-6.
Peng Z Y, Wan X. Wolfe duality and minimize problem with B-(p,r)-pre-invex programming[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2010, 27(6): 1-6.

[6] 万轩，彭再云. B-(p,r)-预不变凸规划的 Mond-Weil 对偶问题研究[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2011，28(1)：1-7.
Wan X, Peng Z Y. The research of Mond-Weir duality for programming with B-(p,r)-pre-invexity function[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2011, 28(1): 1-7.

[7] 李向有，王丹. B-(p,r,a)不变凸分式规划的对偶性条件[J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2012，37(11)：6-9.
Li X Y, Wang D. On conditions of duality in fractional programming with B-(p,r,a) invex function[J]. Journal of Southwest China Normal University: Natural Science, 2012, 37(11): 6-9.

[8] Antczak T, Singh V. Optimality and duality for minmax-fractional programming with support function under B-(p,r)-type I assumptions[J]. Mathematical and Computer Modeling, 2013, 57: 1083-1100.

[9] Jayswal A. Onnonsmoothmultiobjective fractional programming problems involving (p,r)-ρ-(η,θ) invex functions[J]. Yugoslav Journal of Operations Research, 2013, 23: 367-386.

[10] Bector C R, Chandra S, Abha. On incomplete Lagrange function and saddle point optimality criteria in mathematical programming[J]. Journal of Mathematic Analysis and Applications, 2000, 251(1): 2-12.

[11] Chen X H. Incomplete Lagrange fuction and optimalityin nonlinear programming[J]. Journal of Engineering mathematic, 2002, 19(3): 101-105.

[12] 李向有，张庆祥. (h,φ)不变凸半无限规划的鞍点条件[J]. 贵州大学学报：自然科学版，2010，27(6)：5-7.
Li X Y, Zhang Q X. Saddle of semi-infinite programming

with (h,φ) invex function[J]. Journal of Guizhou University: Natural Science, 2010, 27(6): 5-7.

[13] 李向有,张庆祥.广义不变凸多目标半无限规划问题的鞍点条件[J].应用数学与计算数学学报,2013,27(4):501-507.

Li X Y, Zhang Q X. Saddle point condition of multiple-objective semi-infinite programming with generalized invex function[J]. Communication on Applied Mathematics and Computation, 2013, 27(4): 501-507.

[14] Li X Y, Zhang Q X. Optimality conditions of fractional programmingwith B-(p, r, a) invex function[C]. Sanya: 7th international conference on computertional intelligence and security, 2011: 115-118.

[15] Clarke F H. Nonsmooth Optimization[M]. NewYork: Wiley-Interscience, 1983.

Operations Research and Cybernetics

Saddle-Point Condition of a Class of Semi-Infinite Programming

LI Xiangyou

(Institute of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an Shanxi 716000, China)

Abstract: Semi-infinite programming is a programming whose constraint functions are infinite, by a class of B-(p,r,a) invex functions, saddle-point problem of nonsmooth semi-infinite programming involving these functions were researched, saddle-point sufficient conditions were obtained when incomplete Lagrange function was B-(p,r,a) pseudo invex functions and the constraint functions were B-(p,r,a) quasi invex functions, saddle-point conlusions were extended from differentiable, finite constraint conditions in existed literature to nonsmooth, infinite constraint conditions, many important results were obtained under new convexity.

Key words: B-(p,r,a) invex functions; semi-infinite; incomplete-Lagrange function; saddle-point

(责任编辑　黄　颖)