2016 年 7 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Jul. 2016
第 33 卷 第 4 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 33 No. 4

DOI:10.11721/cqnuj20160438

改进后的复合 Poisson-Geometric 风险模型的生存概率*

乔克林，韩建勤

(延安大学 数学与计算机科学学院，陕西 延安 716000)

摘要:考虑到因保费收入和通货膨胀等随机干扰的影响，以及将多余资本用于投资来提高赔付能力，对经典的风险模型进行推广，建立以保费收入服从复合 Poisson 过程，理赔量服从复合 Poisson-Geometric 过程的带投资的干扰风险模型。针对该风险模型，应用全期望公式，推导了生存概率的积分微分方程，及在保费额和理赔量都服从指数分布下的微分方程。为监管部门衡量金融风险提供指导。

关键词:Poisson 过程；Poisson-Geometric 过程；生存概率；积分微分方程

中图分类号:O211.5 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2016)04-0069-05

1 模型简介

近年来，大量文献讨论了风险模型破产概率或生存概率满足的积分微分方程[1-11]，这已是风险理论研究的热点问题。随着保险业的发展，保险公司需处理的业务也越来越繁重。继续对经典风险模型进行研究已远远不能满足现实的需要，因此许多学者根据保险公司的实际业务对经典模型进行推广，在文献[8]中魏广华等人研究了在常利力下带干扰的双复合 Poisson 风险过程，得到了无限时和有限时生存概率的积分微分方程；文献[9]中赵金娥等人对保费收入为 Poisson 过程，理赔量服从 Poisson-Geometric 过程的风险模型进行研究，得到所给模型下生存概率的积分微分方程等结论；文献[10]中乔克林等人提出了保费为一复合随机过程且含利率因素的特殊双险种风险模型，并给出了生存概率的积分微分方程；文献[11]中廖基定等人对保费收入为 Poisson 过程，理赔量服从 Poisson-Geometric 过程的带干扰风险模型进行研究，推导了该模型下生存概率的积分微分方程。本文在前人研究成果的基础上，结合保险公司的实际业务特征，对经典模型进行了适当的改进，并研究了改进模型的生存概率，为保险公司的稳定经营或监管部门设定监管指标提供理论指导。

定义 1 在一个完备概率空间(Ω,F,P)上，设保险公司的盈余过程为

$$U(t)=(u-F)+(1+tj)F+Z(t)-S(t)+\sigma W(t), \tag{1}$$

其中 $Z(t)=\sum_{i=1}^{N_1(t)}X_i$，$S(t)=\sum_{i=1}^{N_2(t)}Y_i$。

假设:1) 设 u 为初始资本，F 表示根据初始资本及在单位时间内预测赔付额的大小而设定用于投资的资金，j 表示单位时间的投资收益。

2) 令 $Z(t)=\sum_{i=1}^{N_1(t)}X_i$ 表示在时间段$(0,t]$内的总保费收入，其中 $N_1(t)$表示签订的保单数且服从参数为 λ_1 的 Poisson 过程；X_i 表示第 i 次保费额，其共同的分布函数为 $G(x)$，密度函数为 $g(x)$。

3) 令 $S(t)=\sum_{i=1}^{N_2(t)}Y_i$ 表示在时间段$(0,t]$内的总理赔量，其中 $N_2(t)$表示理赔总次数且服从参数为$(\lambda_2 t,\rho)$，$(0\leqslant\rho<1)$的 Poisson-Geometric 过程；Y_i 表示第 i 次赔付额，其共同的分布函数为 $F(y)$，密度函数为 $f(y)$。干扰项$\{W(t),t\geqslant 0\}$是标准布朗运动，其中$\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$，$\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$，$\{N_1(t),t\geqslant 0\}$，$\{N_2(t),t\geqslant 0\}$，$\{W(t),t\geqslant 0\}$相互独立。

* **收稿日期**:2015-11-10 **修回日期**:2016-05-16 **网络出版时间**:2016-07-07 16:31

资助项目:陕西省教育厅专项科研计划(No.2013JK0576)；延安市科学技术研究发展计划(No.2014ZC-6)；延安大学研究生教育创新计划(No.YCX201610)

作者简介:乔克林，男，副教授，研究方向为概率统计应用及金融数学，E-mail:yadxqklin@163.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20160707.1631.004.html

为了保证保险公司的稳定经营,假设单位时间内平均投资收益和保费收入大于平均理赔,即 $jF+\lambda_1 E[X]>\frac{\lambda_2}{1-\rho}E[Y]$。

定义 2 破产时刻 $T=\inf\{t|U(t)<0\}$,最终破产概率 $\psi(u)=P\{T<\infty|U(0)=u\}$,则生存概率 $\varphi(u)=1-\psi(u)$。

2 预备引理

引理 1[12] 设 $\{N_2(t),t\geqslant 0\}$ 是满足定义 1 下的复合 Poisson-Geometric 过程,记 $\alpha=\frac{\lambda_2(1-\rho)}{\rho}$(若 $\rho=0$,则取 $\pi=\lambda$),则当 t 足够小时,有

$$\Pr(N_2(t)=0)=\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}=1-\lambda_2 t+o(t),\Pr(N_2(t)=k)=\alpha\rho^k t+A_k(t)o(t),k=1,2,\cdots$$

其中 $A_k(t)=\rho^k+(k-1)[\rho(1+\alpha t)]^{k-2}$,$o(t)$ 与 k 无关,且 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k(t)$ 一致收敛。

引理 2[13] $\lim\varphi(u)=1$,a. s. 。

3 主要结论及证明

记 $F^{*k}(y)$ 为 $F(y)$ 的 k 重卷积,$f^{*k}(y)$ 为 $f(y)$ 的 k 重卷积。并记:

$$F_\rho(y)=\sum_{k=1}^{\infty}(1-\rho)\rho^{k-1}F^{*k}(y),f_\rho(y)=\sum_{k=1}^{\infty}(1-\rho)\rho^{k-1}f^{*k}(y)。$$

定理 1 假设 $\varphi(u)$ 可微,则在模型(1)下的生存概率的积分-微分方程为

$$Fj-Fj\varphi(u)-\frac{\sigma^2}{2}\varphi'(u)=\lambda_1\int_u^{\infty}\varphi(v)[1-G(v-u)]\mathrm{d}v+\lambda_2\int_u^{\infty}\varphi(v)[1-F_\rho(u-v)]\mathrm{d}v。$$

证明 对足够小的时间 t,结合引理 1,在时间段 $(0,t]$ 内有下面 4 种情况:

1) 当保费收取和索赔发生次数都为 0 时,事件发生的概率为

$$\Pr[N_1(t)=0,N_2(t)=0]=[1-\lambda_1 t+o(t)][1-\lambda_2 t+o(t)]=1-(\lambda_1+\lambda_2)t+o(t)。$$

2) 当保费收取 0 次,索赔发生 k 次时,事件发生的概率为

$$\Pr[N_1(t)=0,N_2(t)=k]=[1-\lambda_1 t+o(t)][\alpha\rho^k t+A_k(t)o(t)]=\alpha\rho^k t+A_k(t)o(t)。$$

3) 当保费收取 1 次,索赔发生 0 次时,事件发生的概率为

$$\Pr[N_1(t)=1,N_2(t)=0]=\lambda_1 t[1-\lambda_2 t+o(t)]=\lambda_1 t+o(t)。$$

4) 其它情况发生的概率为 $o(t)$。

对上述情况 2),当 $y>u+Fjt+\sigma W(t)$ 时,破产必然发生,即 $\varphi(u+Fjt+\sigma W(t)-y)=0$。则由全期望公式得

$$\begin{gathered}\varphi(u)=[1-(\lambda_1+\lambda_2)t+o(t)]E\varphi(u+Fjt+\sigma W(t))+\\ \sum_{k=1}^{\infty}E\int_0^{u+Fjt+\sigma W(t)}\varphi(u+Fjt+\sigma W(t)-y)(\alpha\rho^k t+A_k(t)o(t))\mathrm{d}F^{*k}(y)+\\ [\lambda_1 t+o(t)]E\int_0^{\infty}\varphi(u+Fjt+\sigma W(t)+x)\mathrm{d}G(x)+o(t)。\end{gathered}\tag{2}$$

对于 $E\varphi(u+Fjt+\sigma W(t))$,利用泰勒展开式及 $\varphi(u)$ 的可微性有

$$E\varphi(u+Fjt+\sigma W(t))=\varphi(u)+Fjt\varphi'(u)+\frac{\varphi''(u)}{2}\sigma^2 t+o(t)。$$

故有

$$\begin{gathered}[1-(\lambda_1+\lambda_2)t+o(t)]E\varphi(u+Fjt+\sigma W(t))=\\ [1-(\lambda_1+\lambda_2)t+o(t)]\left[\varphi(u)+Fjt\varphi'(u)+\frac{\varphi''(u)}{2}\sigma^2 t+o(t)\right]=\\ \varphi(u)-(\lambda_1+\lambda_2)t\varphi(u)+Fjt\varphi'(u)+\frac{\varphi''(u)}{2}\sigma^2 t+o(t)。\end{gathered}\tag{3}$$

由引理 1 得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\rho^k f^{*k}(y)$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k(t)f^{*k}(y)$ 均一致收敛,由单调收敛定理得积分号与求和号可以交换次序,故

$$\sum_{k=1}^{\infty}E\int_0^{u+Fjt+\sigma W(t)}\varphi(u+Fjt+\sigma W(t)-y)(\alpha\rho^k t+A_k(t)o(t))\mathrm{d}F^{*k}(y)=$$

$$E\int_0^{u+Fjt+\sigma W(t)}\varphi(u+Fjt+\sigma W(t)-y)\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha\rho^k t+A_k(t)o(t))f^{*k}(y)\mathrm{d}y=$$

$$E\int_0^{u+Fjt+\sigma W(t)}\varphi(u+Fjt+\sigma W(t)-y)\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_2 t(1-\rho)\rho^{k-1}f^{*k}(y)\mathrm{d}y+o(t)=$$

$$\lambda_2 tE\int_0^{u+Fjt+\sigma W(t)}\varphi(u+Fjt+\sigma W(t)-y)f_\rho(y)\mathrm{d}y+o(t)。\tag{4}$$

把(3)式和(4)式代入(2)式，化简得

$$(\lambda_1+\lambda_2)t\varphi(u)-Fjt\varphi'(u)-\frac{\sigma^2 t}{2}\varphi''(u)=$$

$$\lambda_2 tE\int_0^{u+Fjt+\sigma W(t)}\varphi(u+Fjt+\sigma W(t)-y)f_\rho(y)\mathrm{d}y+\lambda_1 tE\int_0^{\infty}\varphi(u+Fjt+\sigma W(t)+x)\mathrm{d}G(x)+o(t)。$$

方程两边同时除以 t，且令 $t\to 0$ 时有

$$(\lambda_1+\lambda_2)\varphi(u)-Fj\varphi'(u)-\frac{\sigma^2}{2}\varphi''(u)=\lambda_2\int_0^u\varphi(u-y)f_\rho(y)\mathrm{d}y+\lambda_1\int_0^{\infty}\varphi(u+x)\mathrm{d}G(x)。\tag{5}$$

对(5)式两端对 u 从 0 到 z 积分，得

$$(\lambda_1+\lambda_2)\int_0^z\varphi(u)\mathrm{d}u-Fj\int_0^z\varphi'(u)\mathrm{d}u-\frac{\sigma^2}{2}\int_0^z\varphi''(u)\mathrm{d}u=$$

$$\lambda_2\int_0^z\int_0^u\varphi(u-y)f_\rho(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}u+\lambda_1\int_0^z\int_0^{\infty}\varphi(u+x)\mathrm{d}G(x)\mathrm{d}u。\tag{6}$$

首先令 $u-y=v$，则有

$$\lambda_2\int_0^z\int_0^u\varphi(u-y)f_\rho(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}u=\lambda_2\int_0^z\int_0^u\varphi(v)f_\rho(u-v)\mathrm{d}v\mathrm{d}u=$$

$$\lambda_2\int_0^z\int_v^z\varphi(v)f_\rho(u-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\lambda_2\int_0^z\varphi(v)F_\rho(u-v)\mathrm{d}v。\tag{7}$$

然后令 $u+x=v$，则有

$$\lambda_1\int_0^z\int_0^{\infty}\varphi(u+x)\mathrm{d}G(x)\mathrm{d}u=\lambda_1\int_0^z\int_u^{\infty}\varphi(v)g(v-u)\mathrm{d}v\mathrm{d}u=\lambda_1\int_0^z\int_0^v\varphi(v)g(v-u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+$$

$$\lambda_1\int_z^{\infty}\int_0^z\varphi(v)g(v-u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\lambda_1\int_0^z\varphi(v)G(v)\mathrm{d}v+\lambda_1\int_z^{\infty}\varphi(v)[G(v)-G(v-z)]\mathrm{d}v。\tag{8}$$

把(7)式和(8)式代入(6)式，化简得

$$(\lambda_1+\lambda_2)\int_0^z\varphi(u)\mathrm{d}u-Fj[\varphi(z)-\varphi(0)]-\frac{\sigma^2}{2}[\varphi'(z)-\varphi'(0)]=$$

$$\lambda_2\int_0^z\varphi(v)F_\rho(u-v)\mathrm{d}v+\lambda_1\int_0^z\varphi(v)G(v)\mathrm{d}v+\lambda_1\int_z^{\infty}\varphi(v)[G(v)-G(v-z)]\mathrm{d}v。\tag{9}$$

上式中令 $z\to\infty$，由引理 2 知 $\varphi(\infty)=1$，即 $\varphi'(\infty)=0$。故上式可化简为

$$Fj\varphi(0)+\frac{\sigma^2}{2}\varphi'(0)=\lambda_1\int_0^{\infty}\varphi(v)[G(v)-1]\mathrm{d}v+\lambda_2\int_0^{\infty}\varphi(v)[F_\rho(u-v)-1]\mathrm{d}v+Fj。\tag{10}$$

把(10)式代入(9)式，化简得

$$Fj-Fj\varphi(z)-\frac{\sigma^2}{2}\varphi'(z)=\lambda_1\int_z^{\infty}\varphi(v)[1-G(v-z)]\mathrm{d}v+\lambda_2\int_z^{\infty}\varphi(v)[1-F_\rho(u-v)]\mathrm{d}v,$$

用 u 替换 z，即证。　　证毕

定理 2　若$\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$服从参数为 α 的指数分布，$\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$服从参数为 β 的指数分布，则在定理 1 的条件下，生存概率 $\varphi(u)$满足的微分方程为

$$[\alpha\lambda_2-Fj(1-\rho)\alpha\beta-(1-\rho)\beta\lambda_1]\varphi'(u)-\left[Fj\alpha+\frac{\sigma^2}{2}(1-\rho)\alpha\beta+\lambda_1+\lambda_2-Fj(1-\rho)\beta\right]\varphi''(u)+$$

$$\left\{Fj+\frac{\sigma^2}{2}[(1-\rho)\beta-\alpha]\right\}\varphi'''(u)+\frac{\sigma^2}{2}\varphi''''(u)=0。$$

证明 因为$\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$服从参数为β的指数分布,则$f^{*k}(y)$是服从参数为(k,β)的Gamma分布,即$f^{*k}(y)=\frac{\beta^k y^{k-1}}{\Gamma(k)}\mathrm{e}^{-\beta y}$。又$\Gamma(k)=(k-1)!$,故$f_\rho(y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1-\rho)\rho^{k-1}f^{*k}(y)=(1-\rho)\beta\mathrm{e}^{-(1-\rho)\beta y}$。

又因为$\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$服从参数为α的指数分布,即$g(x)=\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}$。故(5)式可化简为

$$(\lambda_1+\lambda_2)\varphi(u)-Fj\varphi'(u)-\frac{\sigma^2}{2}\varphi''(u)=\lambda_1\int_0^{\infty}\varphi(u+x)\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x+\lambda_2\int_0^u\varphi(u-y)(1-\rho)\beta\mathrm{e}^{-(1-\rho)\beta y}\mathrm{d}y。\tag{11}$$

若令$x_1=u+x$,$y_1=u-y$,则上式变为

$$(\lambda_1+\lambda_2)\varphi(u)-Fj\varphi'(u)-\frac{\sigma^2}{2}\varphi''(u)=\lambda_1\int_u^{\infty}\varphi(x_1)\alpha\mathrm{e}^{-\alpha(x_1-u)}\mathrm{d}x_1-\lambda_2\int_u^0\varphi(y_1)(1-\rho)\beta\mathrm{e}^{-(1-\rho)\beta(u-y_1)}\mathrm{d}y_1。\tag{12}$$

对(12)式两边同时对u求导数得

$$\begin{aligned}&(\lambda_1+\lambda_2)\varphi'(u)-Fj\varphi''(u)-\frac{\sigma^2}{2}\varphi'''(u)+[\alpha\lambda_1-(1-\rho)\beta\lambda_2]\varphi(u)=\\&\alpha\lambda_1\int_0^{\infty}\varphi(u+x)\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x-(1-\rho)\beta\lambda_2\int_0^u\varphi(u-y)(1-\rho)\beta\mathrm{e}^{-(1-\rho)\beta y}\mathrm{d}y。\end{aligned}\tag{13}$$

同理对(13)式两边继续同时对u求导数得

$$\begin{aligned}&(\lambda_1+\lambda_2)\varphi''(u)-Fj\varphi'''(u)-\frac{\sigma^2}{2}\varphi''''(u)+[\alpha\lambda_1-(1-\rho)\beta\lambda_2]\varphi'(u)+[\alpha^2\lambda_1+(1-\rho)^2\beta^2\lambda_2]\varphi(u)=\\&\alpha^2\lambda_1\int_0^{\infty}\varphi(u+x)\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x+(1-\rho)^2\beta^2\lambda_2\int_0^u\varphi(u-y)(1-\rho)\beta\mathrm{e}^{-(1-\rho)\beta y}\mathrm{d}y。\end{aligned}\tag{14}$$

由(11),(13)式及(14)式联解,得

$$\begin{aligned}&[\alpha\lambda_2-Fj(1-\rho)\alpha\beta-(1-\rho)\beta\lambda_1]\varphi'(u)-\left[Fj\alpha+\frac{\sigma^2}{2}(1-\rho)\alpha\beta+\lambda_1+\lambda_2-Fj(1-\rho)\beta\right]\varphi''(u)+\\&\left\{Fj+\frac{\sigma^2}{2}[(1-\rho)\beta-\alpha]\right\}\varphi'''(u)+\frac{\sigma^2}{2}\varphi''''(u)=0。\end{aligned}$$

即证定理2成立。 证毕

参考文献:

[1] 张淑娜,陈红燕,胡亦钧.一类推广的复合Poisson-Geometric风险模型破产概率[J].数学杂志,2009,29(4):567-572.

Zhang S N,Chen H Y,Hu Y J. The ruin probability for a generaliized compound Poisson-Geometric risk model[J]. J of Math(PRC),2009,29(4):567-572.

[2] 熊莹盈,高莘莘.关于复合Poisson-Geometric风险模型破产概率的研究[J].湖北大学学报:自然科学版,2011,33(1):31-35.

Xiong Y Y,Gao S S. The researcher on the ruin probability of Poisson-Geometric risk model[J]. Journal of Huber University:Natural Science,2011,33(1):31-35.

[3] 谢杰华,邹娓.一类具有时间相依索赔风险模型的破产概率[J].中国科学院研究生院学报,2008,25(3):313-319.

Xie J H,Zou W. Ruin probabilities of a risk model with time-correlated claims[J]. Journal of the Graduate School of the Chinese Academy of Sciences,2008,25(3):313-319.

[4] Zhang Y Y,Wang W S. The perturbed compound Poisson risk model with constant interest[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics,2015,31(4):375-383.

[5] 贠小青.Poisson-Geometric风险模型调节系数不存在的破产概率[J].数学的实践与认识,2015,45(15):189-195.

Yun X Q. The ruin probability of Poisson-Geometric risk model with adjustment coefficient does not exist[J]. Mathematics in Practice and Theory,2015,45(15):189-195.

[6] Hao Y Y,Yang H. A ruin model with compound Poisson income and dependence between claim sizes and claim intervals[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica,English Series,2015,31(2):445-452.

[7] 黎锁平,白志文,马成业,等.保费率交替变化的马氏调制风险模型[J].系统工程学报,2011,26(6):752-759.

Li S P,Bai Z W,Ma C Y,et al. Markov modulated risk model with alternative premium rate[J]. Journal of Systems Engineering,2011,26(6):752-759.

[8] 魏广华,高启兵,王晓谦.常利力下带干扰的双复合Poisson风险过程的生存概率[J].应用概率统计,2012,28(2):31-42.

Wei G H,Gao Q B,Wang X Q. The survival probability for the perturbed double compound Poisson risk process under constant interest force[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics,2012,28(2):31-42.

[9] 赵金娥,王贵红,龙瑶.理赔次数为复合Poisson-Geometric过程的风险模型[J].西南大学学报:自然科学版,2013,35(3):78-83.

Zhao J E, Wang G H, Long Y. A risk model with claim numbers following the compound Poisson-Geometric process[J]. Journal of Southwest University: Natural Science Edition, 2013, 35(3): 78-83.

[10] 乔克林,李粉香,任芳玲.常利率下的特殊双险种风险模型的生存概率[J].江西科学,2009,27(6):823-854.
Qiao K L, Li F X, Ren F L. The live probabilities of a special double type insurance risk model with interest[J]. Jiangxi Science, 2009, 27(6): 823-854.

[11] 廖基定,邹静妮.一类风险模型的破产概率及生存概率的积分—微分方程研究[J].南华大学学报:自然科学版,2015,29(1):84-87.
Liao J D, Zou J N. Study on the ruin probability and integral differential equations of the survival probability for a risk model[J]. Journal of University of South China: Science and Technology, 2015, 29(1): 84-87.

[12] 毛泽春,刘锦萼.索赔次数为复合 Poisson-Geometric 过程的风险模型及破产概率[J].应用数学学报,2005,28(3):419-428.
Mao Z C, Liu J N. A risk model and ruin probability with compound Poisson-Geometric process[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2005, 28(3): 419-428.

[13] Asmussen S, Albrecher H. Ruin probabilities[M]. 2nd Edition. Beijing: World Scientific, 2014.

The Survival Probability of an Improved Poisson-Geometric Risk Model

QIAO Kelin, HAN Jianqin

(School of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an Shanxi 716000, China)

Abstract: By taking into account the premiums' randomicity and inflation in insurance business, with the surplus capital being invested to enhance the insurance payment level, in this article, a investment risk model with interference is proposed to extend the classical one, for which the premium income follows the compound Poisson process and the claim numbers is a compound Poisson-Geometric process. Integral-differential equations with survival probability are given by the method of total expectation formula. When premium income and claim sizes follow exponential distribution, the survival probability formula is obtained.

Key words: Poisson process; Poisson-Geometric process; survival probability; integral-differential equations

(责任编辑　黄　颖)