DOI:10.11721/cqnuj20160427

$\widetilde{\rho}$混合随机变量序列的完全收敛性*

张水利，屈　聪，陈英霞
(平顶山学院 数学与统计学院，河南 平顶山 467000)

摘要:研究了非同分布$\widetilde{\rho}$混合随机变量序列的完全收敛性,在更一般的条件下,利用$\widetilde{\rho}$混合随机变量序列 Rosenthal 型不等式和截尾方法,得到了$\widetilde{\rho}$混合随机变量序列完全收敛的充分条件。作为推论,得到了$\widetilde{\rho}$混合随机变量序列的强大数定律,这些结果深化并推广了已有的相关结果。

关键词:$\widetilde{\rho}$混合随机变量;完全收敛性;弱随机控制

中图分类号:O211.62　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2016)04-0074-05

1 主要结果

设$\{X_n,n\geqslant1\}$是定义在概率空间(Ω,F,P)上的随机变量序列,记 $F_s=\sigma(X_i,i\in S\subset\mathbf{N})$,给定子 σ 代数 $F_1,F_2\subset F$。令

$$\rho(F_1,F_2)=\sup\{|\operatorname{corr}(X,Y)|,X\in L_2(F_1),Y\in L_2(F_2)\},$$

其中 $\operatorname{corr}(X,Y)=\dfrac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y)}}$。

定义$\widetilde{\rho}$混合系数为$\widetilde{\rho}(k)=\sup\{\rho(F_s,F_t)$:有限子集 $S,T\subset\mathbf{N}$,满足 $\operatorname{dist}(S,T)\geqslant k\},k\geqslant0$。显然

$$0\leqslant\widetilde{\rho}(k+1)\leqslant\widetilde{\rho}(k)\leqslant1,\widetilde{\rho}(0)=1。$$

定义 1[1]　对于随机变量序列$\{X_n,n\geqslant1\}$,如果存在 $n_0\geqslant1$,使得$\widetilde{\rho}(n_0)<1$,则称$\{X_n,n\geqslant1\}$是$\widetilde{\rho}$混合序列。

完全收敛性的概念是 Hsu 和 Robbins[2]引入的。

定义 2　设$\{X_n,n\geqslant1\}$是定义在概率空间(Ω,F,P)上的随机变量序列,如果对$\forall\varepsilon>0$,都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(|X_n-C|>\varepsilon)<\infty$,则称随机变量序列$\{X_n,n\geqslant1\}$完全收敛于常数 C。

Hsu 和 Robbins[2]证明了当方差有限时,独立同分布随机变量序列的样本均值完全收敛到总体均值,Eedö[3]证明了他们的逆定理。

定理 A　设$\{X_n,n\geqslant1\}$是独立同分布的随机变量序列,且 $E(X)=0$,令 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i,n\geqslant1$,则下列两个条件等价:1) $E(X^2)<\infty$;2) 对任意的 $\varepsilon>0$,有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(|S_n|>\varepsilon n)<\infty$ 。

很多学者对$\widetilde{\rho}$混合随机变量序列进行了研究,例如 Sung[4-5]研究了$\widetilde{\rho}$混合随机变量序列加权和的完全收敛性,Lan[6]研究了$\widetilde{\rho}$混合随机变量序列加权和完全收敛性的充分必要条件,邱德华[7-9]研究了$\widetilde{\rho}$混合随机变量序列加权和的强大数定律及完全收敛性,Guo[10]研究了$\widetilde{\rho}$混合随机变量序列加权和完全矩收敛性的等价条件。

Gut[11]给出了弱随机控制的概念。

定义 3　设$\{X_n,n\geqslant1\}$是定义在概率空间(Ω,F,P)上的随机变量序列,如果存在常数 $C>0$,对任意的 $x>0$,$n\geqslant1$,都有 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}P(|X_k|>x)\leqslant CP(|X|>x)$ 成立,则称随机变量序列$\{X_n,n\geqslant1\}$被随机变量 X 弱随机控制,

* 收稿日期:2015-10-07　修回日期:2016-05-21　网络出版时间:2016-07-07 16:33
资助项目:河南省教育厅科学技术研究重点项目(No. 14B110038);平顶山学院高层次人才科研启动项目(No. PXY-BSQD2016006)
作者简介:张水利,男,讲师,博士,研究方向为随机过程,E-mail:zhangshuilicong@126.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20160707.1633.026.html

记为 $X_n \prec X$。

本文主要对$\tilde{\rho}$混合随机变量序列进行研究，得到了完全收敛性的充分条件。

定理 1　设$\{X_n, n\geqslant 1\}$是$\tilde{\rho}$混合随机变量序列，且 $X_n \prec X$，$0<p\leqslant 2$，$\{a_n, n\geqslant 1\}$和$\{b_n, n\geqslant 1\}$是两个正的常数序列，$a_n \uparrow \infty$，且满足：

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{nb_n}{a_n^2}=O(a_k^{p-2}),\tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{k}nb_n=O(a_k^p),\tag{2}$$

$$\frac{n}{a_n}P(|X|>a_n)\to 0,\tag{3}$$

如果 $E|X|^p<\infty$，则对任意的 $\varepsilon>0$，有 $\sum_{n=1}^{\infty}b_nP\left(\left|\sum_{k=1}^{n}(X_k-EX_kI(|X_k|\leqslant a_n))\right|>a_n\varepsilon\right)<\infty$。

在 $E|X|^p<\infty$的条件下，取 $a_n=n^{\frac{1}{p}}$，$b_n=\frac{1}{n}$，则定理 1 中的(1)～(3)式均成立。

推论 1　设$\{X_n, n\geqslant 1\}$是$\tilde{\rho}$混合随机变量序列，且 $X_n \prec X$，$0<p\leqslant 2$，如果 $E|X|^p<\infty$，则对任意的 $\varepsilon>0$，有 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}(X_k-EX_kI(|X_k|\leqslant n^{\frac{1}{p}}))\right|>n^{\frac{1}{p}}\varepsilon\right)<\infty$。

定理 2　设$\{X_n, n\geqslant 1\}$是$\tilde{\rho}$混合随机变量序列，$1\leqslant p\leqslant 2$，$\{a_n, n\geqslant 1\}$是正的常数序列，$a_n \uparrow \infty$，且满足

$$\sum_{n=k}^{\infty}a_n^{-1-p}\log n=O(a_k^{-p}),\ \forall k\geqslant 1,\tag{4}$$

及 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-p}E|X_n|^p<\infty$，则对任意的 $\varepsilon>0$，有 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_k-EX_k)\right|>a_n\varepsilon\right)<\infty$。

在定理 2 中取 $a_n=n$，则(4)式成立。由定理 2 可以得到下面的推论。

推论 2　设$\{X_n, n\geqslant 1\}$是$\tilde{\rho}$混合随机变量序列，$1\leqslant p\leqslant 2$，如果 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-p}E|X_n|^p<\infty$，则对任意的 $\varepsilon>0$，有 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}P\left(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_k-EX_k)\right|>n\varepsilon\right)<\infty$。进一步有 $n^{-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-EX_k)\to 0$，a. s.。

2 引理

为了证明主要结果，给出一些引理。

引理 1[11]　设$\{X_n, n\geqslant 1\}$是随机变量序列，且 $X_n \prec X$，$p>0$，如果 $E|X|^p<\infty$，则对任意的 $t>0$，$n\geqslant 1$，有：

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E|X_k|^p\leqslant CE|X|^p,\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E|X_k|^pI(|X_k|\leqslant t)\leqslant C[E|X|^pI(|X|\leqslant t)+t^pP(|X|>t)],$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E|X_k|^pI(|X_k|>t)\leqslant CE|X|^pI(|X|>t)。$$

引理 2[9]　设$\{X_n, n\geqslant 1\}$是$\tilde{\rho}$混合随机变量序列，$E|X_n|=0$，$E|X_n|^p<\infty$，$0<p\leqslant 2$，则存在仅依赖于 p 和$\tilde{\rho}$的常数 c，使得对任意的 $n\geqslant 1$，有：

$$E\left|\sum_{k=1}^{n}X_k\right|^p\leqslant c\sum_{k=1}^{n}E|X_k|^p,\ E\left[\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}X_k\right|^p\right]\leqslant c(\log n)^p\sum_{k=1}^{n}E|X_k|^p。$$

引理 3　设 $1\leqslant p\leqslant 2$，$\{a_n, n\geqslant 1\}$是一个常数序列，$a_n \uparrow \infty$，且满足

$$\sum_{n=k}^{\infty}a_n^{-1-p}\log n=O(a_k^{-p}),\ \forall k\geqslant 1,\tag{5}$$

设$\{X_n, n\geqslant 1\}$是$\tilde{\rho}$混合随机变量序列，如果

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-p}E|X_n|^p<\infty,\tag{6}$$

则对任意的 $\varepsilon>0$，有 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}(X_k-EX_k)\right|>a_n\varepsilon\right)<\infty$。

证明 由 Kronecker 引理以及(6)式,可知 $a_n^{-p}\sum_{k=1}^{n}E|X_k|^p\to 0$,因此对任意的 $\varepsilon>0$,足够大的 n,有

$$a_n^{-1}\left|\sum_{k=1}^{n}EX_kI(|X_k|>a_n)\right|\leqslant a_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}E|X_k|I(|X_k|>a_n)\leqslant$$
$$a_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}a_n^{1-p}E|X_k|^pI(|X_k|>a_n)\leqslant a_n^{-p}\sum_{k=1}^{n}E|X_k|^p<\frac{\varepsilon}{2}。\tag{7}$$

记 $X_{in}=X_iI(|X_i|\leqslant a_n)-EX_iI(|X_i|\leqslant a_n)$, $n\geqslant 1$, $1\leqslant i\leqslant n$。由(5),(7)式,引理 2 以及 Markov 不等式有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}(X_k-EX_k)\right|>a_n\varepsilon\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}P(|X_k|>a_n)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}X_{kn}\right|>\frac{\varepsilon a_n}{2}\right)\leqslant$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}a_n^{-p}E|X_k|^p+C\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}a_n^{-2}\sum_{k=1}^{n}EX_{kn}^2\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}E|X_k|^p\sum_{n=k}^{\infty}a_n^{-1-p}+$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-3}\sum_{k=1}^{n}EX_k^2I(|X_k|\leqslant a_n)\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{-p}E|X_k|^p+C\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-3}\sum_{k=1}^{n}a_n^{2-p}EX_k^pI(|X_k|\leqslant a_n)\leqslant$$
$$C\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{-p}E|X_k|^p+C\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1-P}\sum_{k=1}^{n}EX_k^pI(|X_k|\leqslant a_n)\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{-p}E|X_k|^p<\infty。$$

3 主要结果的证明

证明(定理 1) 对任意的 $n\geqslant 1$, $1\leqslant i\leqslant n$,令

$$Y_{in}=-a_nI(X_i<-a_n)+X_iI(|X_i|\leqslant a_n)+a_nI(X_i>a_n),$$
$$Z_{in}=X_i-EX_iI(|X_i|\leqslant a_n),\ Z'_{in}=X_iI(|X_i|\leqslant a_n)-EX_iI(|X_i|\leqslant a_n),$$

由 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}P(|X_k|>x)\leqslant CP(|X|>x)$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_nP\left(\left|\sum_{k=1}^{n}(X_k-EX_kI(|X_k|\leqslant a_n))\right|>a_n\varepsilon\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}b_nP\left(\bigcup_{k=1}^{n}\{|X_k|>a_n\}\right)+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}b_nP\left(\left|\sum_{k=1}^{n}Z_{kn}\right|>a_n\varepsilon,\bigcap_{k=1}^{n}\{|X_k|\leqslant a_n\}\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sum_{k=1}^{n}P(|X_k|>a_n)+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}b_nP\left(\left|\sum_{k=1}^{n}Z_{kn}\right|>a_n\varepsilon,\bigcap_{k=1}^{n}\{|X_k|\leqslant a_n\}\right)\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}b_nnP(|X|>a_n)+$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}b_nP\left(\left|\sum_{k=1}^{n}[Y_{kn}-EX_kI(|X_k|\leqslant a_n)]\right|>a_n\varepsilon,\right)=:I_1+I_2。$$

为了证明定理 1,只需证明 $I_1<\infty$, $I_2<\infty$。由(2)式以及 $E|X|^p<\infty$,

$$I_1=\sum_{n=1}^{\infty}b_nnP(|X|>a_n)\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}nb_n\sum_{k=n}^{\infty}P(a_k<|X|\leqslant a_{k+1})\leqslant$$
$$C\sum_{k=1}^{\infty}a_k^pP(a_k<|X|\leqslant a_{k+1})\leqslant CE|X|^p<\infty。\tag{8}$$

注意到,当 $n\to\infty$ 时,有

$$a_n^{-1}\left|\sum_{k=1}^{n}(P(X_k>a_n)-P(X_k<-a_n))\right|\leqslant a_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}P(|X_k|>a_n)\leqslant C\frac{n}{a_n}P(|X|>a_n)\to 0。$$

因此对所有足够大的 n,有 $a_n^{-1}\left|\sum_{k=1}^{n}(P(X_k>a_n)-P(X_k<-a_n))\right|<\frac{\varepsilon}{2}$。

由引理 2 以及 Markov 不等式有

$$I_2\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}b_nP\left(\left|\sum_{k=1}^{n}[Y_{kn}-EY_{kn}]\right|>\frac{a_n\varepsilon}{2}\right)\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}b_na_n^{-2}E\left(\sum_{k=1}^{n}(Y_{kn}-EY_{kn})\right)^2\leqslant$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}b_na_n^{-2}\sum_{k=1}^{n}E(Y_{kn}-EY_{kn})^2\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}b_na_n^{-2}\sum_{k=1}^{n}EY_{kn}^2\leqslant$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}b_na_n^{-2}\sum_{k=1}^{n}[EX_k^2I(|X_k|\leqslant a_n)+a_n^2P(|X_k|>a_n)]\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}b_n a_n^{-2}\sum_{k=1}^{n}EX_k^2 I(|X_k|\leqslant a_n)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sum_{k=1}^{n}P(|X_k|>a_n)=:I_{21}+I_{22}。$$

类似于(8)式，可以证明 $I_{22}<\infty$。由(1)，(8)式以及引理 1 有

$$I_{21}=C\sum_{n=1}^{\infty}b_n a_n^{-2}\sum_{k=1}^{n}EX_k^2 I(|X_k|\leqslant a_n)\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}b_n a_n^{-2}(nEX^2 I(|X|\leqslant a_n)+na_n^2 P(|X|>a_n))=$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}nb_n a_n^{-2}EX^2 I(|X|\leqslant a_n)+C\sum_{n=1}^{\infty}nb_n P(|X|>a_n)\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}nb_n a_n^{-2}\sum_{k=1}^{n}EX^2 I(a_{k-1}<|X|\leqslant a_k)+C_1\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{2-p}EX^p I(a_{k-1}<|X|\leqslant a_k)\sum_{n=k}^{\infty}nb_n a_n^{-2}+C_1\leqslant$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}EX^p I(a_{k-1}<|X|\leqslant a_k)+C_1\leqslant CEX^p+C_1<\infty。$$

证毕

证明(定理 2)　由条件 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-p}E|X_n|^p<\infty$，类似于(7)式，有

$$a_n^{-1}\left|\sum_{k=1}^{n}EX_k I(|X_k|>a_n)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}。\tag{9}$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_k-EX_k)\right|>a_n\varepsilon\right)\leqslant$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_k I(|X_k|\leqslant a_n)-EX_k I(|X_k|\leqslant a_n))\right|>\frac{a_n\varepsilon}{4}\right)+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_k I(|X_k|>a_n)-EX_k I(|X_k|>a_n))\right|>\frac{3a_n\varepsilon}{4}\right)=:J_1+J_2。$$

为了证明定理 2 的结论，只需要证明 $J_1<\infty$，$J_2<\infty$。由 Markov 不等式以及引理 2 有

$$J_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_k I(|X_k|\leqslant a_n)-EX_k I(|X_k|\leqslant a_n))\right|>\frac{a_n\varepsilon}{4}\right)\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}a_n^{-2}E\left(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_k I(|X_k|\leqslant a_n)-EX_k I(|X_k|\leqslant a_n))\right|\right)^2\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-3}(\log n)^2\sum_{k=1}^{n}EX_k^2 I(|X_k|\leqslant a_n)\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-3}(\log n)^2\sum_{k=1}^{n}a_n^{2-p}E|X_k|^p I(|X_k|\leqslant a_n)=C\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1-p}(\log n)^2\sum_{k=1}^{n}E|X_k|^p I(|X_k|\leqslant a_n)\leqslant$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}E|X_k|^p\sum_{n=k}^{\infty}a_n^{-1-p}(\log n)^2\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{-p}E|X_k|^p<\infty。$$

由(9)式及引理 3 可知

$$J_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_k I(|X_k|>a_n)-EX_k I(|X_k|>a_n))\right|>\frac{3a_n\varepsilon}{4}\right)\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}X_k I(|X_k|>a_n)\right|>\frac{a_n\varepsilon}{2}\right)\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\sum_{k=1}^{n}|X_k|I(|X_k|>a_n)>\frac{a_n\varepsilon}{2}\right)\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}(|X_k|I(|X_k|>a_n)-E|X_k|I(|X_k|>a_n))\right|>\frac{a_n\varepsilon}{4}\right)<\infty。$$

证毕

参考文献：

[1] Bradley R C. On the spectral density and asymptotic-normality of weakly dependent random fields[J]. J Theor Probab，1992，5：355-373.

[2] Hsu P L，Robbins H. Complete convergence and the lawof large number[J]. Proc Natl AcadSci，1947，33：25-31.

[3] Eedös P. On a theorem of Hsu and Robbins[J]. Ann Math Statist，1949，20：286-291.

[4] Sung S H. Complete convergence for weighted sums of $\tilde{\rho}$-mixing random variables[J]. Discrete Dyn Nat Soc，2010(1)：1-13.

[5] Sung S H. On the strong convergence for weighted sums of $\tilde{\rho}$-mixing random variables[J]. Stat Paper，2013，54：773-781.

[6] Lan C F. Sufficient and necessary conditions of complete convergence for weighted sums of ρ^*-mixing random variables[J]. J Appl Math，2014(3)：203-222.

[7] 邱德华,陈平炎,段振华. $\tilde{\rho}$混合随机变量序列加权和的完全收敛性[J]. 应用数学学报,2015,38(1):150-165.
Qiu D H, Chen P Y, Duan Z H. Complete convergence for weighted sums of $\tilde{\rho}$-mixing random variables[J]. Acta Math Appl Sin, 2015, 38(1):150-165.

[8] 邱德华. $\tilde{\rho}$混合随机变量序列加权和的收敛性[J]. 数学物理学报,2011,31A(1):132-141.
Qiu D H. Convergence for weighted sums of $\tilde{\rho}$-mixing random variables[J]. Acta Math Sci, 2011, 31A(1):132-141.

[9] 邱德华. $\tilde{\rho}$混合随机变量阵列加权和的完全收敛性[J]. 数学学报,2014,57(1):151-162.
Qiu D H. Complete convergence for weighted sums of arrays $\tilde{\rho}$-mixing random variables[J]. Acta Math Sin, 2014, 57(1):151-162.

[10] Guo M L, Zhu D J. Equivalent conditions of complete moment convergence of weighted sums of ρ^*-mixing sequence of random variables[J]. Statist Probab Lett, 2013, 83:13-20.

[11] Gut A. Complete convergence for arrays[J]. Period Math Hunger, 1992, 25(1):51-75.

The Complete Convergence for $\tilde{\rho}$-mixing Random Variables Sequence

ZHANG Shuili, QU Cong, CHEN Yingxia

(Institute of Mathematics and Statistics, Pingdingshan University, Pingdingshan Henan 467000, China)

Abstract: In this paper, we studied the complete convergence for $\tilde{\rho}$-mixing random variables sequence with different distribution, and obtained some sufficient conditions of complete convergence for $\tilde{\rho}$-mixing random variables sequence under general conditions, by using the Rosenthal inequality of $\tilde{\rho}$-mixing random variables and truncated method. As a corollary, the strong law of large number for $\tilde{\rho}$-mixing random variables is obtained which generalize and extend well-known results.

Key words: $\tilde{\rho}$-mixing random variables; complete convergence; weak stochastically dominate

(责任编辑　黄　颖)