DOI:10.11721/cqnuj20160416

三阶段时滞种群生长模型的渐近稳定性*

牟 恩[1],赵朝锋[2],陈小东[3],张启敏[4]

(1. 西南医科大学 基础医学院,四川 泸州 646000;2. 河南护理职业学院 公共学科部,河南 安阳 455000;
3. 四川省纳溪中学校,四川 泸州 646000;4. 宁夏大学 数学计算机学院,银川 750021)

摘要:根据种群生长的阶段性,引入时滞建立了一类三阶段结构的时滞种群生长模型:$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=\alpha x_3(t)-\gamma x_1(t)-\alpha e^{-\gamma\tau}x_3(t-\tau)\\ \dot{x}_2(t)=\alpha e^{-\gamma\tau}x_3(t-\tau)-bx_2(t)-ax_2(t)\\ \dot{x}_3(t)=ax_2(t)-cx_3(t)-dx_3^2(t)\end{cases}$,初始条件:$\begin{cases}x_1(t)=\varphi_1(t)\geqslant 0,x_2(t)=\varphi_2(t)\geqslant 0\\ x_3(t)=\varphi_3(t)\geqslant 0,t\in[-\tau,0]\end{cases}$。利用微分方程稳定性理论分析了系统的零平衡点和正平衡点的局部稳定性。利用有效的 Liapunov 函数得到零平衡点和正平衡点的全局稳定性:1)当 $a\alpha e^{-\gamma\tau}<(b+a)c$ 时,系统有唯一平衡点 E_0,且它是局部稳定的;当 $a\alpha e^{-\gamma\tau}>(b+a)c$ 时,E_0 是不稳定的,此时系统除了 E_0 外,还存在唯一正平衡点 E_*,且它是局部稳定的。2)当 $\alpha e^{-\gamma\tau}\leqslant c$,则系统的平衡点 E_0 是全局渐进稳定的,当 $\alpha e^{-\gamma\tau}\geqslant\frac{a+b}{a-b}c$,$a>b$,则系统的正平衡点 E_* 是全局渐进稳定的。所得结论对人工控制种群的发展具有一定的指导意义。

关键词:稳定性;时滞;单种群;Liapunov 函数

中图分类号:O175.13 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2016)04-0085-05

自然界中生物种[1-3]发展的稳定性问题,是生物学者、数学家们一直关心的问题之一。Aiello 等人[4]考虑了时滞依赖于种群的密度或称为状态依赖的时滞单种群阶段结构模型,并研究了正平衡态的存在和稳定性以及稳定性的区域。胡宝安等人[5]研究了具有阶段结构的 SIS 传染病模型,田晓红等人[6]研究了一类具有时滞和阶段结构的 SIS 传染病模型等。高淑京在文献[7]中,按幼年、成年、老年三阶段建立了一类种群阶段模型,而文献[8]给出了明确的稳定性结果。2004 年梁志清等人在文献[9]中将种群分为蛹、幼虫、成虫 3 个阶段建立了结构模型,同时对稳定性进行了一些分析。实际上种群的发展繁衍都有一个滞后的过程。因此,为了更准确地研究种群发展,笔者将时滞这个因素考虑到模型中去。

1 模型建立

考虑到某些物种具有卵、幼年和成年 3 个成长阶段,建立下列模型:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=\alpha x_3(t)-\gamma x_1(t)-\alpha e^{-\gamma\tau}x_3(t-\tau),\\ \dot{x}_2(t)=\alpha e^{-\gamma\tau}x_3(t-\tau)-bx_2(t)-ax_2(t),\\ \dot{x}_3(t)=ax_2(t)-cx_3(t)-dx_3^2(t)。\end{cases}\tag{1}$$

初始条件为:

$$\begin{cases}x_1(t)=\varphi_1(t)\geqslant 0,x_2(t)=\varphi_2(t)\geqslant 0,\\ x_3(t)=\varphi_3(t)\geqslant 0,t\in[-\tau,0],\end{cases}\tag{2}$$

其中,x_1,x_2,x_3 分别代表物种在卵、幼年、成年在 t 时刻的密度。τ 表示由卵变化为幼年的时间,α 表示成年的产

* **收稿日期**:2015-09-26 **修回日期**:2015-12-19 **网络出版时间**:2016-07-07 16:34

资助项目:国家自然科学基金(No. 11061024)

作者简介:牟恩,女,助教,研究方向为生物数学、金融数学和金融工程,E-mail: mouen0204@163.com;**通信作者**:张启敏,教授,E-mail: zhanqimin64@sina.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20160707.1634.048.html

卵率,γ 表示卵的死亡率,$\alpha e^{-\gamma\tau}$ 表示卵变为幼年的概率,b 表示幼年的死亡率,a 表示幼年向成年的转化率,c 表示成年的死亡率,dx_3^2 项表示密度制约。为了保证初始条件的连续性,还假定:

$$x_1(0)=\int_{-\tau}^{0}\alpha\varphi_3(s)e^{\gamma s}ds。$$

2 模型分析

引理 1 考虑二阶超越多项式方程:

$$\lambda^2+p\lambda+r+(s\lambda+q)e^{-\lambda\tau}=0, \tag{3}$$

这里 p,q,r,s 是实数。

(H_1) $p+s>0$;

(H_2) $q+r>0$;

(H_3) $s^2-p^2+2r<0$ 和 $r^2-q^2>0$ 或 $(s^2-p^2+2r)^2<4(r^2-q^2)$;

(H_4) $r^2-q^2<0$ 或 $s^2-p^2+2r>0$ 和 $(s^2-p^2+2r)^2=4(r^2-q^2)$。

如果有(H_1),(H_2),(H_3)成立,则方程(3)的所有根有负实部。如果有(H_4)成立,则方程(3)的根没有负实部。

定理 1 对于初始条件 $x_1(t)>0,x_2(t)>0,x_3(t)>0,t\in[-\tau,0]$,$D$ 是系统(1)的正不变集,其中 $D=\{(x_1,x_2,x_3):x_1(t)>0,x_2(t)>0,x_3(t)>0,t>0\}$。

证明 考虑系统(1)的后两个方程:

$$\begin{cases}\dot{x}_2(t)=\alpha e^{-\gamma\tau}x_3(t-\tau)-bx_2(t)-ax_2(t),\\ \dot{x}_3(t)=ax_2(t)-cx_3(t)-dx_3^2(t)。\end{cases} \tag{4}$$

可得:

$$\begin{cases}\dot{x}_2|_{x_2=0}=\alpha e^{-\gamma\tau}x_3(t-\tau)>0,\\ \dot{x}_3|_{x_3=0}=ax_2(t)>0。\end{cases}$$

故可知 $D_1=\{(x_2,x_3):x_2>0,x_3>0\}$ 是系统(4)的正不变集。再利用文献[15]的方法可得 $x_1(t)>0$,故 $D=\{(x_1,x_2,x_3):x_1(t)>0,x_2(t)>0,x_3(t)>0,t>0\}$ 是系统(4)的正不变集。 证毕

定理 2 满足初始条件(2)的系统(1)的正解是最终有界的。

证明 作函数 $V(t)=x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)$。$V(t)$ 沿着系统(1)求导数得:

$$\dot{V}=\alpha x_3-\gamma x_1-bx_2-cx_3-dx_3^2\leqslant-\mu(x_1+x_2+x_3)+\alpha x_3-dx_3^2=-\mu V+\alpha x_3-dx_3^2\leqslant-\mu V+\frac{\alpha^2}{4d}, \tag{5}$$

其中 $\mu=\min\{\gamma,b,c\}$。

由(5)式容易得出 $\lim\limits_{t\to\infty}\sup V(t)\leqslant\frac{\alpha^2}{4d\mu}$,即系统(1)满足初始条件(2)的解最终有界。 证毕

3 模型稳定性的分析

定理 3 当 $a\alpha e^{-\gamma\tau}<(b+a)c$ 时,系统(1)有唯一平衡点 E_0,且它是局部稳定的;当 $a\alpha e^{-\gamma\tau}>(b+a)c$ 时,E_0 是不稳定的,此时系统(1)除了 E_0 外,还存在唯一正平衡点 E_*,且它是局部稳定的。

证明 通过观察,显然系统(1)有边界平衡点 $E_0(0,0,0)$。当 $a\alpha e^{-\gamma\tau}>(b+a)c$ 时,存在唯一的正平衡点 $E_*(x_1^*,x_2^*,x_3^*)$,其中

$$x_1^*=\frac{(\alpha-\alpha e^{-\gamma\tau})[a\alpha e^{-\gamma\tau}-(b+a)c]}{\gamma d(b+a)},x_2^*=\frac{\alpha e^{-\gamma\tau}[a\alpha e^{-\gamma\tau}-(b+a)c]}{(b+a)^2d},x_3^*=\frac{a\alpha e^{-\gamma\tau}-(b+a)c}{(b+a)d}。$$

系统在 $E_0(0,0,0)$ 处的线性近似系统为:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\gamma & 0 & \alpha\\ 0 & -(b+a) & 0\\ 0 & a & -c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & -\alpha e^{-\gamma\tau}\\ 0 & 0 & \alpha e^{-\gamma\tau}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t-\tau)\\ x_2(t-\tau)\\ x_3(t-\tau)\end{pmatrix}。$$

Jacobian 特征矩阵为：$\boldsymbol{J}(E_0)=\begin{bmatrix}\lambda+\gamma & 0 & -\alpha+\alpha e^{-(\lambda+\gamma)\tau}\\ 0 & \lambda+b+a & -\alpha e^{-(\lambda+\gamma)\tau}\\ 0 & -a & \lambda+c\end{bmatrix}$，特征方程为：

$$(\lambda+\gamma)[(\lambda+b+a)(\lambda+c)-a\alpha e^{-(\lambda+\gamma)\tau}]=0, \tag{6}$$

显然 $\lambda=-\gamma$ 是一个负根。

对于方程 $[(\lambda+b+a)(\lambda+c)-a\alpha e^{-(\lambda+\gamma)\tau}]=0$，展开整理得：

$$\lambda^2+(b+a+c)\lambda+(b+a)c-a\alpha e^{-\gamma\tau}e^{-\lambda\tau}=0。 \tag{7}$$

令 $p=b+a+c, q=-a\alpha e^{-\gamma\tau}, r=(b+a)c, s=0$，则 $p+s=b+a+c>0, q+r=(b+a)c-a\alpha e^{-\gamma\tau}>0$（当正平衡点不存在时），$s^2-p^2+2r=-(b+a+c)^2+2(b+a)c=-(b+a)^2-c^2<0, r^2-q^2=[(b+a)c]^2-(a\alpha e^{-\gamma\tau})^2>0$（正平衡点不存在时）。故可知当 $a\alpha e^{-\gamma\tau}<(b+a)c$ 时，(H_1)，(H_2)，(H_3) 成立。

故由引理 1 可得：当 $a\alpha e^{-\gamma\tau}<(b+a)c$ 时，方程(7)的所有根都有负实部，即当 $a\alpha e^{-\gamma\tau}<(b+a)c$ 时，E_0 是局部渐进稳定的。

当 $a\alpha e^{-\gamma\tau}>(b+a)c$ 时，$r^2-q^2=[(b+a)c]^2-(a\alpha e^{-\gamma\tau})^2<0$，即 (H_4) 成立，故方程(7)的根没有负实部，即当正平衡点存在时 E_0 不稳定。

作代换 $X_1=x_1-x_1^*, X_2=x_2-x_2^*, X_3=x_3-x_3^*$。仍用 x_1, x_2, x_3 记 X_1, X_2, X_3，得系统(1)在 E_* 处的线性系统为：

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=\alpha x_3(t)-\gamma x_1(t)-\alpha e^{-\gamma\tau}x_3(t-\tau),\\ \dot{x}_2(t)=\alpha e^{-\gamma\tau}x_3(t-\tau)-bx_2(t)-ax_2(t),\\ \dot{x}_3(t)=ax_2(t)-cx_3(t)-2dx_3^*x_3(t)。\end{cases}$$

Jacobian 特征矩阵为 $\boldsymbol{J}(E_*)=\begin{pmatrix}\lambda+\gamma & 0 & -\alpha+\alpha e^{-(\lambda+\gamma)\tau}\\ 0 & \lambda+b+a & -\alpha e^{-(\lambda+\gamma)\tau}\\ 0 & -a & \lambda+2dx_3^*+c\end{pmatrix}$，特征方程为：

$$(\lambda+\gamma)[(\lambda+b+a)(\lambda+2dx_3^*+c)-a\alpha e^{-(\lambda+\gamma)\tau}]=0, \tag{8}$$

显然 $\lambda=-\gamma$ 是一个负根。

对于方程 $(\lambda+b+a)(\lambda+2dx_3^*)-a\alpha e^{-(\lambda+\gamma)\tau}=0$，展开得：

$$\lambda^2+(b+a+c+2dx_3^*)\lambda+(b+a)(c+2dx_3^*)-a\alpha e^{-\gamma\tau}e^{-\lambda\tau}=0。 \tag{9}$$

令 $p=b+a+c+2dx_3^*, r=(b+a)(c+2dx_3^*), s=0, q=-a\alpha e^{-\gamma\tau}$，则有：

$$p+s>0;$$

$$q+r=-a\alpha e^{-\gamma\tau}+(b+a)c+2d(b+a)\frac{[a\alpha e^{-\gamma\tau}-(b+a)c]}{(b+a)d}=a\alpha e^{-\gamma\tau}-(b+a)c>0;$$

$$r^2-q^2=[2a\alpha e^{-\gamma\tau}-(b+a)c]^2-(a\alpha e^{-\gamma\tau})^2>0;$$

$$s^2-p^2+2r=-(b+a+c+2dx_3^*)^2+2(b+a)(c+2dx_3^*)<0。$$

由上可知引理 1 中的 (H_1)，(H_2)，(H_3) 成立，即正平衡点 E_* 是局部稳定的。　　证毕

定理 4　若 $\alpha e^{-\gamma\tau}\leqslant c$，则系统(1)的平衡点 E_0 是全局渐进稳定的。

证明　由于系统(1)后两个方程不含 x_1，故只要讨论后两个方程即可。讨论系统(4)：

$$\begin{cases}\dot{x}_2(t)=\alpha e^{-\gamma\tau}x_3(t-\tau)-bx_2(t)-ax_2(t),\\ \dot{x}_3(t)=ax_2(t)-cx_3(t)-dx_3^2(t)。\end{cases}$$

作 Liapunov 函数：

$$W(t)=x_2(t)+x_3(t)+\alpha e^{-\gamma\tau}\int_{t-\tau}^{t}x_3(\theta)\mathrm{d}\theta。 \tag{10}$$

沿着系统(4)对 t 求导得：$\dot{W}(t)=\dot{x}_2+\dot{x}_3+\alpha e^{-\gamma\tau}x_3(t)-\alpha e^{-\gamma\tau}x_3(t-\tau)=-bx_2(t)+(\alpha e^{-\gamma\tau}-c)x_3(t)-dx_3^2(t)$。当 $\alpha e^{-\gamma\tau}\leqslant c$ 时，可知 $\dot{W}(t)\leqslant 0$ 恒成立，当且仅当 $x_2=x_3=0$ 时等号成立。故当 $\alpha e^{-\gamma\tau}\leqslant c$ 时，系统(4)的平衡

点(0,0)全局渐进稳定。由系统(1)的第一个方程得 $x_1(t)=\int_{t-\tau}^{t}\alpha\,\mathrm{e}^{-\gamma(t-s)}x_3(s)\mathrm{d}s$,因此有:

$$\lim_{t\to+\infty}x_1(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\int_{t-\tau}^{t}\alpha\,\mathrm{e}^{\gamma\tau}x_3(s)\mathrm{d}s}{\mathrm{e}^{\gamma\tau}}=\frac{\alpha-\alpha\mathrm{e}^{-\gamma\tau}}{\gamma}\lim_{t\to+\infty}x_3(t)=0。\tag{11}$$

故当 $\alpha\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\leqslant c$ 时,E_0 是全局渐进稳定的。 证毕

定理 5 若 $\alpha\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\geqslant\frac{a+b}{a-b}c$,$a>b$,则系统(1)的正平衡点 E_* 是全局渐进稳定的。

证明 由定理 3 的条件知 $a\alpha\mathrm{e}^{-\gamma\tau}>(b+a)c$。对系统(1)作变换 $X_1=x_1-x_1^*$,$X_2=x_2-x_2^*$,$X_3=x_3-x_3^*$,仍用 x_1,x_2,x_3 记 X_1,X_2,X_3,得到新系统如下:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=\alpha x_3(t)-\gamma x_1(t)-\alpha\mathrm{e}^{-\gamma\tau}x_3(t-\tau),\\ \dot{x}_2(t)=\alpha\mathrm{e}^{-\gamma\tau}x_3(t-\tau)-bx_2(t)-ax_2(t),\\ \dot{x}_3(t)=ax_2(t)-cx_3(t)-2dx_3^*x_3(t)-dx_3^2(t)。\end{cases}\tag{12}$$

显然,系统(12)有一个平衡点 E_0。由变换可知,若要证明系统(1)的正平衡点 E_* 是全局渐进稳定的,则只需证明系统(12)的平衡点 E_* 是全局稳定的即可。下面证明系统(12)的平衡点 E_0 是全局稳定的。

由于系统(12)后两个方程不含 x_1,故只要讨论后两个方程即可:

$$\begin{cases}\dot{x}_2(t)=\alpha\mathrm{e}^{-\gamma\tau}x_3(t-\tau)-bx_2(t)-ax_2(t),\\ \dot{x}_3(t)=ax_2(t)-cx_3(t)-2dx_3^*x_3(t)-dx_3^2(t)。\end{cases}\tag{13}$$

作 Liapunov 函数:

$$W(t)=x_2(t)+x_2^*+x_3(t)+x_3^*+\int_{t-\tau}^{t}(x_3(\theta)+x_3^*)\mathrm{d}\theta。\tag{14}$$

对于(14)式沿着系统(13)求导得:

$$\dot{W}(t)=\alpha\mathrm{e}^{-\gamma\tau}x_3(t)-bx_2(t)-cx_3(t)-2dx_3^*x_3(t)-dx_3^2(t)。$$

当 $\alpha\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\leqslant c+2dx_3^*$,即 $\alpha\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\geqslant\frac{a+b}{a-b}c$,$a>b$ 时,$\dot{W}(t)\leqslant 0$ 恒成立,当且仅当 $x_2=x_3=0$ 时等号成立。故当 $\alpha\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\geqslant\frac{a+b}{a-b}c$,$a>b$ 时 (x_2^*,x_3^*) 是全局渐进稳定的。再由(11)式得:

$$\lim_{t\to+\infty}x_1(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\int_{t-\tau}^{t}\alpha\,\mathrm{e}^{\gamma\tau}x_3(s)\mathrm{d}s}{\mathrm{e}^{\gamma\tau}}=\frac{\alpha-\alpha\mathrm{e}^{-\gamma\tau}}{\gamma}\lim_{t\to+\infty}x_3(t)=0,$$

即 E_0 对于系统(12)是全局渐进稳定的。 证毕

参考文献:

[1] Gopalsamy K, Aggarwala B D. The logistic equation with a diffusionally couple delay[J]. Bull Math Biol, 1981, 43: 125-140.

[2] Pao C V. Systems of parabolic equations with continuous and discrete delays[J]. J Math Anal Appl, 1997, 205: 157-185.

[3] EL-Morshedy H A, Liz E. Convergence to equilibria in discrete population models[J]. Diff Equ Appl, 2005, 11: 117-131.

[4] 唐三一,肖燕妮. 单种群生物动力系统[M]. 北京:科学出版社,2008.
Tang S Y, Xiao Y N. Population dynamical systems of single-species[M]. Beijing: Science Press, 2008.

[5] 胡宝安,陈博文,原存德. 具有阶段结构的 SIS 传染病模型[J]. 生物数学学报,2005,20(1):58-64.
Hu B A, Chen B W, Yuan C D. The epidemic model with two-stage structure[J]. Journal of Biomathematics, 2005, 20(1): 58-64.

[6] 田晓红,徐瑞. 一类具有时滞和阶段结构的 SIS 传染病模型的稳定性与持久性[J]. 生物数学学报,2010,25(2):313-319.
Tian X H, Xu R. Permanence and stability of an SIS epidemic model with time delay and stage structure[J]. Journal of Biomathematics, 2010, 25(2): 313-319.

[7] 高淑京. 具有三个阶段结构单种群模型的全局渐进稳定性[J]. 新疆大学学报:理工版,2001,18(2):154-158.

Gao S J. Global stability of three-stage-structured single-species growth model[J]. Journal of Xingjiang University: Science Edition, 2001, 18(2): 154-158.

[8] 马知恩,周义仓. 常微分方程稳定性与稳定性方法[M]. 北京:科学出版社,2001.

Ma Z E, Zhou Y C. Stability and methods of stability for ordinary differential equations[M]. Beijing: Science Press, 2001.

[9] 梁志清,周泽文. 阶段结构单种群模型的全局渐进稳定性[J]. 玉林师范学院,2004,25(3):6-8.

Liang Z Q, Zhou Z W. Global asymptotica stability of single-species growth model with stage structure[J]. Journal of Yulin Teachers College, 2004, 25(3): 6-8.

[10] 陈兰荪,宋新宇,陆征一. 数学生态学模型与研究方法[M]. 成都:四川科学技术出版社,2003.

Chen L S, Song X Y, Lu Z Y. Mathematical models and methods in ecology[M]. Chengdu: Sichuan Science and Technology Press, 2003.

[11] 高淑京,陈兰荪. 具有三个成长阶段的单种群时滞模型的永久持续生存和全局稳定性[J]. 数学物理学报,2006,26A(4):527-533.

Gao S J, Chen L S. Permanence and global stability for single-species model with three life stages and time delay [J]. Acta Mathematica Science, 2006, 26A(4): 527-533.

Stability for Single Population Growth Model with Three-stage Structures and Time Delay

MOU En[1], ZHAO Chaofeng[2], CHEN Xiaodong[3], ZHANG Qimin[4]

(1. Basic Medical College, Southwest Medical University, Luzhou Sichuan 646000;

2. Public Discipline Department, Henan Vocation College of Nursing, Anyang Henan 455000;

3. Naxi Middle School of Sichuan, Luzhou Sichuan 646000;

4. School of Mathematics and Computer Science, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

Abstract: According to characteristics of populations, a class of three-stage structure of populations system with time delay is established: $\begin{cases} \dot{x}_1(t)=\alpha x_3(t)-\gamma x_1(t)-\alpha e^{-\gamma\tau}x_3(t-\tau) \\ \dot{x}_2(t)=\alpha e^{-\gamma\tau}x_3(t-\tau)-bx_2(t)-ax_2(t) \\ \dot{x}_3(t)=ax_2(t)-cx_3(t)-dx_3^2(t) \end{cases}$, Initial conditions: $\begin{cases} x_1(t)=\varphi_1(t)\geqslant 0, x_2(t)=\varphi_2(t)\geqslant 0 \\ x_3(t)=\varphi_3(t)\geqslant 0, t\in[-\tau,0] \end{cases}$. By using the stability theory of differential equations, analysising the local asymptotic stability of the zero equilibrium and the positive equilibrium. By using the effective Liapunov function, the global asymptotic stability of the zero equilibrium and the positive equilibrium are proved. 1) If $a\alpha e^{-\gamma\tau}<(b+a)c$, the system has only one equilibrium E_0, local asymptotic stable. If $a\alpha e^{-\gamma\tau}>(b+a)c$, E_0 is not stable. Except E_0, there is only one the positive equilibrium E_*, local asymptotic stable. 2) If $\alpha e^{-\gamma\tau}\leqslant c$, the equilibrium E_0 is global asymptotic stable. If $\alpha e^{-\gamma\tau}\geqslant\frac{a+b}{a-b}c$, where $a>b$, the positive equilibrium E_* is global asymptotic stable. The conclusion is directive significance for the development of artificial control population.

Key words: stability; time delay; single population; Liapunov function

(责任编辑 游中胜)