含时滞项的对数型变系数波动方程的爆破

摘要:针对一类具有非线性阻尼项、对数源项、以及速度时滞项的变系数波动方程建立爆破准则。在对核函数 r 和变系数 $c_1(x)$， $c_2(x)$ 施加适当假设的基础上，利用能量方法，证明当初始能量为负时，解将会在有限的时间内发生爆破并给出了爆破时间的上下界估计。
关键词:爆破；变系数；时滞项；非线性对数项；声学边界条件
中图分类号:O175.2　　**文献标志码:**A

引言

黏弹性波动方程作为描述具有记忆效应材料动态响应的核心数学模型，在固体力学、流体动力学、生物材料科学及地球物理勘探等诸多领域中具有广泛的应用价值。近年来，随着实际工程问题对建模精度要求的不断提高，兼具变系数、声学边界、非线性源项、以及时滞项的波动方程日益受到研究者的关注。探究此类复杂模型的动力学行为，尤其是解的爆破现象，不仅对深入理解系统的长期演化与稳定性具有重要的理论意义，也为工程结构的安全评估与失效预警提供了关键的数学依据。

本文旨在研究一类具有时滞项和声学边界的对数型变系数波动方程，并建立其解的爆破准则。首先，通过构造适当的能量泛函，结合变系数项和对数源项的特点，分析出其耗散性质与增长机制。随后，运用能量方法证明：当初始能量为负时，系统解将在有限时间内发生爆破。进一步，给出了爆破时间的上下界估计。本文结果不仅推广了已有关于常系数黏弹性波动方程爆破理论的相关结论，也为研究更一般形式的非线性波动方程提供了新的分析思路。

含有对数非线性源项的波动方程能够更为精确地刻画源项强度随系统状态以对数形式变化的物理过程。与传统多项式型非线性相比，对数非线性在描述饱和增长、临界行为以及一些具有复杂演化特征的物理现象，例如量子力学中的某些模型、信息在系统中的传播过程以及生物种群数量的自我限制增长等。近年来，该类模型的研究已取得一系列重要成果(见文献[1-3])。与此同时，声学边界条件作为刻画弹性结构与相邻声学介质相互耦合作用的重要模型亦受到广泛关注(见文献[4-6])。2023 年，Guo 和 Zhang 在文献[7]中研究了一类对数型波动方程解的渐近稳定性

$$w_{tt}-\Delta w+\int_0^t g(t-s)\Delta w(s)\mathrm{d}s+w+w_t=w\log|w|^k,$$

通过运用对数 Sobolev 不等式与 Lyapunov 方法，得到了一个与常微分方程相关的一般衰减速率。

在考虑实际系统的非均匀性和复杂性时，引入变系数模型具有重要意义。常系数方程通常用于描述均匀介质中的理想化过程，而实际工程材料往往具有明显的空间非均匀特性，例如梯度材料和复合材料，其物理参数（如密度、弹性模量及阻尼系数）随空间位置变化而变化。因此，变系数偏微分方程成为准确刻画非均匀介质中波传播、热传导及结构振动等现象的必要工具，其应用涵盖地震波在分层地质结构中的传播、非均匀复合材料的热力响应以及变截面或变材料属性结构的动力学分析等。基于此，2024 年 Hao 和 Zhang 在文献[8]中研究了一类带有变系数、声学边界及对数源项的波动方程。

特别地，对于同时包含时滞项，对数非线性、记忆效应以及声学边界的模型，近年来亦取得了一定进展。2023 年，Park 在文献[9]中研究一类具有时滞项和声学边界的对数型波动方程，采用能量方法证明了初始能量为负时解会在有限时间内发生爆破。

2023 年，Choucha 和 Ouchenane 在文献[10]中研究一类具有时滞项的对数非线性项的波动方程

$$w_{tt}-\Delta w+\mu_1 w_t(x,t)+\mu_2 w_t(x,t-\tau)=w|w|^{p-2}\ln|w|^k,$$

首先利用半群理论，建立了该问题解的局部存在性结果。随后，针对初始能量为负的情形，证明了该解在有限时间内会发生爆破。

2023 年，Tahamtani 等人在文献[11]中研究一类带有声学边界和对数项的波动方程

$$w_{tt}-\Delta w+\alpha(t)\int_0^t g(t-s)\Delta w(s)\mathrm{d}s+w_t+w=w\ln|w|^k,$$

通过选取适当的初始数据，证明了解的整体存在性及一般衰减性结果。

本文研究一类具有时滞项和声学边界条件的对数型变系数波动方程的初边值问题

$$\begin{aligned}&w_{tt}-\Delta w+\int_0^t r(t-s)\mathrm{div}(c_1(x)\nabla w(s))\mathrm{d}s+c_2(x)\,|\,w_t\,|^{k-2}\,w_t\\&=|\,w\,|^{m-2}\,w\ln|\,w\,|-w_t(t-\tau)\,|\,w_t(t-\tau)\,|^{k-2},\ \text{在}\Omega\times(0,T)\text{内},\end{aligned}\tag{1}$$

$$w=0,\ \text{在}\Gamma_0\times(0,T)\text{上},\tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial\nu}-\int_0^t r(t-s)(c_1(x)\nabla w(s))\cdot\nu\mathrm{d}s+p(w_t)=q(x)z_t,\ \text{在}\Gamma_1\times(0,T)\text{上},\tag{3}$$

$$w_t+l(x)z_t+h(x)z=0,\ \text{在}\Gamma_1\times(0,T)\text{上},\tag{4}$$

$$w(x,0)=w_0(x),\ w_t(x,0)=w_1(x),\ \text{在}\Omega\text{内},\ z(x,0)=z_0(x),\ \text{在}\ \Gamma_1\text{上},\tag{5}$$

$$w_t(x,t-\tau)=j_0(x,t-\tau),\ \text{对于}(x,t)\in\Omega\times(0,\tau),\tag{6}$$

其中Ω为R^n中的有界区域，其边界$\partial\Omega=\Gamma_0\cup\Gamma_1$是光滑的，满足$\Gamma_0\cap\Gamma_1=\varnothing$，且$\Gamma_0$和$\Gamma_1$均为非空闭集；参数$\tau>0$表示时间延迟；指数满足$k\geq 2$，$m>2$。该模型描述了非均匀介质中一类考虑材料历史记忆效应、非线性耗散、时滞反馈以及与声学边界耦合的粘弹性波动问题。其物理背景广泛存在于土木工程、材料科学、声学工程及控制系统中，主要用于研究结构的动态稳定性、能量耗散机制及解的爆破行为。在此模型中，$w(x,t)$表示速度势函数；$z(x,t)$表示边界Γ_1上的位移；$c_1(x)$和$c_2(x)$分别表示粘弹性阻尼系数与摩擦阻尼系数；时滞项$\tau>0$反映阻尼作用并非是瞬时发生的，而是依赖于系统过去某一时刻的状态；$l(x)$为边界阻尼系数；$h(x)$为弹性系数；r表示记忆项核函数；p描述了边界Γ_1上弹性支承的非线性响应特性。

1 符号定义以及基本假设

1.1 符号定义

本文引入符号定义：$\|w\|=\|w\|_{L^2(\Omega)}$，$\|w\|_q=\|w\|_{L^q(\Omega)}$，$\|w\|_{q,\Gamma_1}=\|w\|_{L^q(\Gamma_1)}$，$(w_1,w_2)=\int_\Omega w_1w_2\mathrm{d}x$，$V=\left\{y\in H^1(\Omega):y=0\text{在}\Gamma_0\text{上}\right\}$。考虑$\mathrm{R}^n$中的一个有界开区域$\Omega$，存在一个常数$B>0$，使得如下 Sobolev 不等式成立：

$$\|y\|_r\leq B\|\nabla y\|,\tag{7}$$

这里，B是$V\to L^r(\Omega)$的最优常数，其中

$$2\leq r\begin{cases}<\infty & \text{若 } n=1,2\\ \leq\dfrac{2n}{n-2} & \text{若}n\geq 3\end{cases}。$$

对于任意$\omega>0$，有

$$\begin{cases}\left|b^\omega\ln b\right|\leq\dfrac{1}{e\omega} & \text{若}0<b<1\\ 0\leq\ln b\leq\dfrac{b^\omega}{e\omega} & \text{若}b\geq 1\end{cases}。\tag{8}$$

不等式

$$b^{\mu_1}\leq b+1\leq(1+\frac{1}{\mu_2})(b+\mu_2),\ b\geq 0,\ 0<\mu_1\leq 1,\ \mu_2>0。\tag{9}$$

1.2 基本假设

参考文献[12]，设$u=(x,\sigma,t)=w_t(x,t-\sigma\tau)$，其中$(x,\sigma,t)\in\Omega\times(0,1)\times(0,T)$，那么问题(1.1)-(1.6)可以表述为

$$w_{tt}-\Delta w+\int_0^t r(t-s)\operatorname{div}(c_1(x)\nabla w(s))\mathrm{d}s+c_2(x)\,|\,w_t\,|^{k-2}\,w_t$$

$$=|\,w\,|^{m-2}\,w\ln|\,w\,|-\left|u\left(x,1,t\right)\right|^{k-2}u\left(x,1,t\right)，\text{在}\Omega\times(0,T)\text{内}，\tag{10}$$

$$\tau u_t\left(x,\sigma,t\right)+u_\sigma\left(x,\sigma,t\right)=0，\text{对于}\left(x,\sigma,t\right)\in\Omega\times\left(0,1\right)\times\left(0,T\right)，\tag{11}$$

$$w=0，\text{在}\Gamma_0\times(0,T)\text{上}，\tag{12}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}-\int_0^t r(t-s)(c_1(x)\nabla w(s))\cdot\nu\mathrm{d}s+p(w_t)=q(x)z_t，\text{在}\Gamma_1\times(0,T)\text{上}，\tag{13}$$

$$w_t+l(x)z_t+h(x)z=0，\text{在}\Gamma_1\times(0,T)\text{上}，\tag{14}$$

$$w(x,0)=w_0(x)，\ w_t(x,0)=w_1(x)，\text{在}\Omega\text{内}，\ z(x,0)=z_0(x)，\text{在}\ \Gamma_1\text{上}，\tag{15}$$

$$u\left(x,\sigma,0\right)=j_0\left(x,-\sigma t\right)=u_0\left(x,\sigma\right)，\text{对于}(x,\sigma)\in\Omega\times(0,1)\ 。\tag{16}$$

我们的目标是为问题(10)-(16)建立爆破准则，为此引入如下假设(A)：

(A)(i)设空间维度 n 满足 $1\le n\le 3$。

(ii)设指数 m 满足

$$\begin{cases}2<m<\infty & \text{若 } n=1,2\\ 2<m<\min\left\{\dfrac{2(n-1)}{n-2},\dfrac{n+2}{n-2}\right\}=4 & \text{若}n=3\end{cases}\ 。\tag{17}$$

(iii)设指数 k 满足

$$\max\left\{2,\frac{m^2+2m}{m^2-2m+4},\frac{m^2+4m}{m^2+4}\right\}<k<m\ 。\tag{18}$$

(iv)设核函数 $r:\left[0,\infty\right)\to\left(0,\infty\right)$ 是一个非增的可微函数且满足

$$1-\left\|c_1\right\|_\infty\int_0^\infty r\left(s\right)\mathrm{d}s=r_a>0；\tag{19}$$

$$\int_0^\infty c_1\left(x\right)r\left(s\right)\mathrm{d}s<\left\|c_1\right\|_\infty\int_0^\infty r\left(s\right)\mathrm{d}s<\left\|c_1\right\|_\infty\frac{(m-2)m}{m^2-2m+1}\ 。\tag{20}$$

(v)设系数 $c_1(x)$，$c_2(x)\in C^1\left(\bar{\Omega}\right)$，且满足下列条件

$$0<A_1\le c_1\left(x\right)；\tag{21}$$

$$0<A_2\le c_2\left(x\right)；\tag{22}$$

(vi)设 $p:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$，是一个单调连续函数，且存在正常数 p_1，p_2，使得

$$p_1\left|s\right|^{p_0}\le p\left(s\right)s\le p_2\left|s\right|^{p_0}，\ p_0\ge 2，\ s\in\mathrm{R}\ 。\tag{23}$$

(vii)设函数 l，h，q，本质有界且满足

$$l\left(x\right)>l_0>0，\ h\left(x\right)>h_0>0，\ q\left(x\right)>q_0>0，\ x\in\Gamma_1\ 。\tag{24}$$

为使本文的论述更加完整，基于文献[13-14]中的相关论证，本文在此不再给出证明，而仅陈述如下关于解的存在性的结果。

定理 1 假设指数 m 满足

$$\begin{cases}2<m<\infty & \text{若 } n=1,2\\ 2<m<\dfrac{2(n-1)}{n-2} & \text{若}n\ge 3\end{cases}\ 。$$

那么，对于每一个 $(w_0,w_1,z_0,u_0)\in V\times L^2(\Omega)\times L^2(\Gamma_1)\times L^k(\Omega\times(0,1))$，问题(2.4)- (2.10)存在唯一的局部解 (w,z,u) 其中 $w\in C(0,T;V)\cap C^1(0,T;L^2(\Omega))$，$z\in L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1))$，$u\in L^\infty(0,T;L^k(\Omega\times(0,1)))$。

注 1

(*i*)对于 $m>2$ 和 $n\ge 1$，有

$$m>\frac{m^2+2m}{m^2-2m+4}，\tag{25}$$

且

$$m>\frac{\left(m^2+4m\right)C_1\left(m,n\right)-m^2B_1\left(m,n\right)}{\left(m^2+4\right)C_1\left(m,n\right)-m^2B_1\left(m,n\right)}, \tag{26}$$

其中 $B_1\left(m,n\right)=n\left(m-2\right)+4$， $C_1\left(m,n\right)=2m+\left(n-1\right)\left(m-2\right)$。

(*ii*)对于 $m>2$ 和 $n\geq 1$，有以下等式成立

$$\min\left\{C_2\left(n\right),\ B_2\left(m,n\right)\right\}=B_2\left(m,n\right), \tag{27}$$

其中 $B_2\left(m,n\right)=\dfrac{4m+2\left(n-1\right)\left(m-2\right)}{n\left(m-2\right)+4}$， $C_2\left(n\right)=\dfrac{2n+2}{n}$。

(*iii*)假设(17)，(18)成立，则存在以下不等式

$$\frac{2\left(m-k\right)}{m^2\left(k-1\right)}<\frac{m-2}{2m}, \tag{28}$$

且

$$2<C_3\left(m,k\right)<B_3\left(m,n\right)<m, \tag{29}$$

其中 $B_3\left(m,n\right)=\dfrac{4m+2\left(n-1\right)\left(m-2\right)}{n\left(m-2\right)+4}$， $C_3\left(m,k\right)=\dfrac{2m^2\left(k-1\right)}{m^2\left(k-1\right)-4\left(m-k\right)}$。

(*iv*)由(18)可知，存在常数 ω_0， $\omega_1>0$，使得满足以下不等式

$$2<m+\omega_0\begin{cases}<\infty & \text{若 } n=1,2\\ \leq\dfrac{2n}{n-2}=6 & \text{若 } n=3\end{cases},$$

且

$$2<2\left(m-1+\omega_1\right)\begin{cases}<\infty & \text{若 } n=1,2\\ \leq\dfrac{2n}{n-2}=6 & \text{若 } n=3\end{cases}。$$

因此，可以得出

$$V\text{嵌入}L^{m+\omega_0}\left(\Omega\right)，\text{且}V\text{嵌入}L^{2(m-1+\omega_1)}\left(\Omega\right)。 \tag{30}$$

2 爆破

对方程(10)- (16)的任意一个解，定义能量函数

$$\begin{aligned}E\left(t\right)=&\frac{1}{2}\left\|w_t\right\|^2+\frac{1}{2}\int_\Omega\left(1-c_1\left(x\right)\int_0^t r\left(s\right)\mathrm{d}s\right)\left|\nabla w\right|^2dx+\frac{1}{m^2}\left\|w\right\|_m^m+\frac{1}{2}\left(r\circ\nabla w\right)\left(t\right)\\&+\frac{1}{2}\left\|q^{\frac{1}{2}}\left(x\right)h^{\frac{1}{2}}\left(x\right)z\right\|_{\Gamma_1}^2-\frac{1}{m}\int_\Omega\left|w\right|^m\ln\left|w\right|\mathrm{d}x+\xi\tau\int_0^1\left\|u\left(\sigma,t\right)\right\|_k^k\mathrm{d}\sigma\end{aligned}, \tag{31}$$

其中

$$\left(r\circ\nabla w\right)\left(t\right)=\int_\Omega\int_0^t r\left(t-s\right)c_1\left(x\right)\left|\nabla w\left(t\right)-\nabla w\left(s\right)\right|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}x,$$

且

$$\frac{k-1}{k}<\xi<A_2-\frac{1}{k}。 \tag{32}$$

引理 1 在定理 1 的条件下，存在常数 $\Im_1>0$，使得下列不等式成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E\left(t\right)\leq-\Im_1\left(\left\|u\left(1,t\right)\right\|_k^k+\left\|w_t\right\|_k^k\right)+\frac{1}{2}\left(r'\circ\nabla w\right)\left(t\right)-\left\|q^{\frac{1}{2}}\left(x\right)l^{\frac{1}{2}}\left(x\right)z_t\right\|_{\Gamma_1}^2-\frac{A_1}{2}r\left(t\right)\left\|\nabla w\right\|^2-p_1\left\|w_t\right\|_{L^{p_0}(\Gamma_1)}^{p_0}\leq 0 \tag{33}$$

证明 通过(10)- (16)，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)=-\int_\Omega c_2(x)|w_t|^k\,\mathrm{d}x-\left\|q^{\frac{1}{2}}(x)l^{\frac{1}{2}}(x)z_t\right\|_{\Gamma_1}^2-\int_\Omega|u(x,1,t)|^{k-2}u(x,1,t)w_t\mathrm{d}x$$
$$-\frac{1}{2}\int_\Omega c_1(x)r(t)|\nabla w|^2\,\mathrm{d}x-\int_{\Gamma_1}p(w_t)w_t\mathrm{d}\Gamma+\frac{1}{2}(r'\circ\nabla w)(t)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\xi\tau\int_0^1\|u(\sigma,t)\|_k^k\mathrm{d}\sigma\right)。\tag{34}$$

通过 Young's 不等式，可得

$$-\int_\Omega|u(x,1,t)|^{k-2}u(x,1,t)w_t\mathrm{d}x\le\frac{k-1}{k}\|u(1,t)\|_k^k+\frac{1}{k}\|w_t\|_k^k,\tag{35}$$

由(11)式，可知

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1\|u(\sigma,t)\|_k^k\mathrm{d}\sigma&=-\frac{1}{\tau}\int_\Omega\int_0^1k|u(x,\sigma,t)|^{k-2}u(x,\sigma,t)u_\sigma(x,\sigma,t)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{\tau}\int_\Omega\int_0^1\frac{\partial}{\partial\sigma}|u(x,\sigma,t)|^k\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{\tau}\|u(1,t)\|_k^k+\frac{1}{\tau}\|w_t\|_k^k\end{aligned}。\tag{36}$$

由假设(21)和(22)式可以得到

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega c_1(x)r(t)|\nabla w|^2\,\mathrm{d}x\le-\frac{1}{2}\int_\Omega A_1r(t)|\nabla w|^2\,\mathrm{d}x=-\frac{A_1}{2}r(t)\|\nabla w\|^2,\tag{37}$$

$$-\int_\Omega c_2(x)|w_t|^k\,\mathrm{d}x\le-\int_\Omega A_2|w_t|^k\,\mathrm{d}x=-A_2\|w_t\|_k^k。\tag{38}$$

根据假设(23)式，有

$$-\int_{\Gamma_1}p(w_t)w_t\mathrm{d}\Gamma\le-\int_{\Gamma_1}p_1|w_t|^{p_0}\,\mathrm{d}\Gamma=-p_1\|w_t\|_{L^{p_0}(\Gamma_1)}^{p_0}。\tag{39}$$

由(34)- (39)式可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)\le&-\left(A_2-\frac{1}{k}-\xi\right)\|w_t\|_k^k-\left\|q^{\frac{1}{2}}(x)l^{\frac{1}{2}}(x)z_t\right\|_{\Gamma_1}^2+\frac{1}{2}(r'\circ\nabla w)(t)\\&-\frac{A_1}{2}r(t)\|\nabla w\|^2-\left(\xi-\frac{k-1}{k}\right)\|u(1,t)\|_k^k-p_1\|w_t\|_{L^{p_0}(\Gamma_1)}^{p_0}\end{aligned},\tag{40}$$

设

$$\Im_1=\min\left\{A_2-\frac{1}{k}-\xi,\xi-\frac{k-1}{k}\right\},$$

于是(33)式成立，引理得证。

现在，设

$$G(t)=-E(t)。\tag{41}$$

则有

$$\begin{aligned}&G'(t)=-E'(t)\\&\ge\Im_1\left(\|w_t\|_k^k+\|u(1,t)\|_k^k\right)+\left\|q^{\frac{1}{2}}(x)l^{\frac{1}{2}}(x)z_t\right\|_{\Gamma_1}^2-\frac{1}{2}(r'\circ\nabla w)(t)+\frac{A_1}{2}r(t)\|\nabla w\|^2+p_1\|w_t\|_{L^{p_0}(\Gamma_1)}^{p_0}\\&\ge0\end{aligned}\tag{42}$$

若 $E(0)<0$，则由(42)和(31)式可以得到

$$0<G(0)\le G(t)\le\frac{1}{m}\int_\Omega|w|^m\ln|w|\mathrm{d}x,\tag{43}$$

则有

$$\int_\Omega|w|^m\ln|w|\mathrm{d}x\ge0。\tag{44}$$

引理 2[15] 设 $\phi\in V$ 且 r 满足

$$2 \le r \begin{cases} < \infty & \text{若 } n = 1,2 \\ \le \dfrac{2n}{n-2} & \text{若} n \ge 3 \end{cases} 。$$

则对任意 $2 \le s \le r$，成立下列不等式

$$\|\phi\|_r^s \le C\left(\|\phi\|_r^r + \|\nabla\phi\|^2\right)。$$

引理 3[15] 设 $\phi \in V$ 满足(44)且 r 满足

$$2 \le r \begin{cases} < \infty & \text{若 } n = 1,2 \\ \le \dfrac{n+2}{n-2} & \text{若} n \ge 3 \end{cases} 。$$

则对任意 $2 \le s \le r$，成立下列不等式

$$\left(\int_\Omega |\phi|^r \ln|\phi| \mathrm{d}x\right)^{s/r} \le C\left(\|\nabla\phi\|^2 + \int_\Omega |\phi|^r \ln|\phi| \mathrm{d}x\right)。$$

引理 4[15] 设 $r \ge 2$，对于满足(44)的 $\phi \in L^r(\Omega) \cap V$，成立下列不等式

$$\|\phi\|_r^r \le C\left(\|\nabla\phi\|^2 + \int_\Omega |\phi|^r \ln|\phi| \mathrm{d}x\right)。$$

本文的主要结果是以下定理：

定理 2 若假设性条件(A)、定理 1 和 $E(0) < 0$ 均成立，则问题(10)- (16)的解 (w,z,u) 将在某个有限时间 $T^* > 0$ 发生爆破。此外，爆破时间 T^* 满足下述估计：

$$\int_{\vartheta(0)}^{+\infty} \frac{1}{2\psi + d_1\psi^{m-1+\omega_1} + d_2} \mathrm{d}\psi \le T^* \le \frac{1-\alpha}{C\alpha M^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(0)}。 \tag{45}$$

这里

$$\vartheta(0) = \|w_1\|^2 + \|\nabla w_0\|^2 + \left\| q^{\frac{1}{2}}(x) h^{\frac{1}{2}}(x) z_0 \right\|_{\Gamma_1}^2 + 2\xi\tau \|u_0\|_{L^k(\Omega\times(0,1))}^k ,$$

其中 d_1 和 d_2 是(79)式中给出的常数，α 满足(47)式，$M(0)$ 由(60)式给出，C 为某个正数。

证明 设

$$M(t) = G^{1-\alpha}(t) + \delta(w, w_t) - \frac{\delta}{2}\left\| q^{\frac{1}{2}}(x) l^{\frac{1}{2}}(x) z \right\|_{\Gamma_1}^2 - \delta \|q(x) z w\|_{\Gamma_1} , \tag{46}$$

其中 $\delta > 0$ 且 α 满足

$$\frac{2(m-k)}{m^2(k-1)} \le \alpha \le \min\left\{ \frac{m-k}{m(k-1)}, \frac{m-2}{2m}, \frac{g-2}{2g} \right\} , \tag{47}$$

此处 g 满足

$$\frac{2m^2(k-1)}{m^2(k-1) - 4(m-k)} < g < \frac{4m + 2(n-1)(m-2)}{(m-2)n + 4} 。 \tag{48}$$

利用(10)- (16)和 Young's 不等式，对于任意的 $\lambda_1 > 0$ 有

$$\begin{aligned}M'(t)&=(1-\alpha)G^{-\alpha}(t)G'(t)+\delta\|w_t\|^2+\delta\int_0^t r(t-s)\int_\Omega c_1(x)\nabla w(t)\cdot(\nabla w(s)-\nabla w(t))\mathrm{d}s\mathrm{d}x\\&\quad+\delta\int_\Omega|w|^m\ln|w|\mathrm{d}x-\delta\int_\Omega\left(1-c_1(x)\int_0^t r(s)\mathrm{d}s\right)|\nabla w|^2\mathrm{d}x+\delta\left\|q^{\frac{1}{2}}(x)h^{\frac{1}{2}}(x)z\right\|_{\Gamma_1}^2\\&\quad-\delta\int_\Omega c_2(x)w|w_t|^{k-2}w_t\mathrm{d}x-\delta\int_\Omega w|u(x,1,t)|^{k-2}u(x,1,t)\mathrm{d}x\\&\geq(1-\alpha)G^{-\alpha}(t)G'(t)+\delta\|w_t\|^2+\delta\left\|q^{\frac{1}{2}}(x)h^{\frac{1}{2}}(x)z\right\|_{\Gamma_1}^2+\delta\int_\Omega|w|^m\ln|w|\mathrm{d}x\\&\quad-\delta\int_\Omega\left[1-\left(c_1(x)-\frac{c_1(x)}{4\lambda_1}\right)\int_0^t r(s)\mathrm{d}s\right]|\nabla w|^2\mathrm{d}x-\delta\lambda_1(r\circ\nabla w)(t)\\&\quad-\delta\int_\Omega c_2(x)w|w_t|^{k-2}w_t\mathrm{d}x-\delta\int_\Omega w|u(x,1,t)|^{k-2}u(x,1,t)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{49}$$

通过对 $\delta\lambda_2\int_\Omega|w|^m\ln|w|\mathrm{d}x$ (其中 $0<\lambda_2<\frac{m-2}{m}$)进行加减运算，并利用(31)式和(41)式，得到

$$\begin{aligned}M'(t)&\geq(1-\alpha)G^{-\alpha}(t)G'(t)+\delta\left(1+\frac{m(1-\lambda_2)}{2}\right)\|w_t\|^2+\frac{\delta(1-\lambda_2)}{m}\|w\|_m^m\\&\quad+\delta\lambda_2\int_\Omega|w|^m\ln|w|\mathrm{d}x+\delta\left(1+\frac{m(1-\lambda_2)}{2}\right)\left\|q^{\frac{1}{2}}(x)h^{\frac{1}{2}}(x)z\right\|_{\Gamma_1}^2\\&\quad+\delta\left(\frac{m(1-\lambda_2)}{2}-\lambda_1\right)(r\circ\nabla w)(t)+\delta m(1-\lambda_2)G(t)\\&\quad+\delta\int_\Omega\left[\left(\frac{m(1-\lambda_2)}{2}-1\right)-\left(\frac{m(1-\lambda_2)}{2}-1+\frac{1}{4\lambda_1}\right)\int_0^t c_1(x)r(s)\mathrm{d}s\right]|\nabla w|^2\mathrm{d}x\\&\quad-\delta\int_\Omega c_2(x)w|w_t|^{k-2}w_t\mathrm{d}x-\delta\int_\Omega w|u(x,1,t)|^{k-2}u(x,1,t)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{50}$$

设 $\sigma_1=(\theta G^{-\alpha}(t))^{-\frac{k-1}{k}}$，其中 $\theta>0$，利用 Holder 不等式和 Young's 不等式可得

$$\int_\Omega c_2(x)\sigma_1 w\cdot\sigma_1^{-1}|w_t|^{k-1}\mathrm{d}x\leq\frac{\sigma_1^k}{k}\cdot\delta\|c_2\|_\infty\|w\|_k^k+\frac{k-1}{k}\cdot\sigma_1^{-\frac{k}{k-1}}\cdot\delta^{-\frac{1}{k-1}}\|c_2\|_\infty\|w_t\|_k^k,\tag{51}$$

$$\int_\Omega\sigma_1 w\cdot\sigma_1^{-1}|u(x,1,t)|^{k-1}\mathrm{d}x\leq\frac{1}{k}\sigma_1^k\|w\|_k^k+\frac{k-1}{k}\sigma_1^{-\frac{k}{k-1}}\|u(1,t)\|_k^k,\tag{52}$$

合并(51)和(52)式，得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega c_2(x)\sigma_1 w\cdot\sigma_1^{-1}|w_t|^{k-1}\mathrm{d}x+\int_\Omega\sigma_1 w\cdot\sigma_1^{-1}|u(x,1,t)|^{k-1}\mathrm{d}x\\&\leq\frac{k-1}{k}\cdot\sigma_1^{-\frac{k}{k-1}}\cdot\delta^{-\frac{1}{k-1}}\|c_2\|_\infty\left(\|w_t\|_k^k+\|u(1,t)\|_k^k\right)+\frac{\sigma_1^k\left(\delta\|c_2\|_\infty+1\right)}{k}\|w\|_k^k\\&\leq C_1(G(t))^{-\alpha}G'(t)+\frac{C}{k\theta^{k-1}}(G(t))^{\alpha(k-1)}\|w\|_m^k,\end{aligned}\tag{53}$$

其中 $C_1=\dfrac{\delta^{\frac{1}{1-k}}\|c_2\|_\infty(k-1)\theta}{k\Im_1}$。

由(17)式可知，问题(10)- (16)的解 w 属于空间 $L^{m+1}(\Omega)$。结合(43)式、引理 4 以及 Young's 不等式，有下列不等式成立

$$\begin{aligned}(G(t))^{\alpha(k-1)}\|w\|_m^k &\le C\left\{\left(\int_\Omega |w|^m \ln|w|\mathrm{d}x\right)^{\alpha(k-1)+\frac{k}{m}}+\left(\int_\Omega |w|^m \ln|w|\mathrm{d}x\right)^{\alpha(k-1)}\|\nabla w\|^{\frac{2k}{m}}\right\}\\ &\le C\left\{\left(\int_\Omega |w|^m \ln|w|\mathrm{d}x\right)^{\frac{\alpha m(k-1)+k}{m}}+\left(\int_\Omega |w|^m \ln|w|\mathrm{d}x\right)^{\frac{\alpha(k-1)m}{m-k}}+\|\nabla w\|^2\right\}。\end{aligned} \tag{54}$$

由(47)式，可知

$$2\le \alpha m(k-1)+k\le m\ ,$$

利用引理 3，推导出

$$\left(\int_\Omega |w|^m \ln|w|\mathrm{d}x\right)^{\frac{\alpha m(k-1)+k}{m}}\le C\left(\int_\Omega |w|^m \ln|w|\mathrm{d}x+\|\nabla w\|^2\right)。 \tag{55}$$

同样的，由(47)式，可以得到

$$2\le \frac{\alpha(k-1)m^2}{m-k}\le m\ ,$$

所以有

$$\left(\int_\Omega |w|^m \ln|w|\mathrm{d}x\right)^{\frac{\alpha(k-1)m}{m-k}}\le C\left(\|\nabla w\|^2+\int_\Omega |w|^m \ln|w|\mathrm{d}x\right)。 \tag{56}$$

将(55)式和(56)式代入到(54)式中，可以得到

$$(G(t))^{\alpha(k-1)}\|w\|_m^k\le C\left(\int_\Omega |w|^m \ln|w|\mathrm{d}x+\|\nabla w\|^2\right)。 \tag{57}$$

由(53)和(57)式，得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega c_2(x)w|w_t|^{k-2}w_t\mathrm{d}x+\int_\Omega w|u(x,1,t)|^{k-2}u(x,1,t)\mathrm{d}x\\ &\le C_1(G(t))^{-\alpha}G'(t)+\frac{C}{k\theta^{k-1}}\left(\int_\Omega |w|^m \ln|w|\mathrm{d}x+\|\nabla w\|^2\right),\end{aligned} \tag{58}$$

将(58)式代入到(50)式中，则有

$$\begin{aligned}M'(t)\ge{}&\left((1-\alpha)-C_2\right)G^{-\alpha}(t)G'(t)+\delta\left(1+\frac{m(1-\lambda_2)}{2}\right)\|w_t\|^2\\ &+\delta\left(1+\frac{m(1-\lambda_2)}{2}\right)\left\|q^{\frac{1}{2}}(x)h^{\frac{1}{2}}(x)z\right\|_{\Gamma_1}^2+\delta\left(\lambda_2-\frac{C}{k\theta^{k-1}}\right)\int_\Omega |w|^m \ln|w|\mathrm{d}x\\ &+\frac{\delta(1-\lambda_2)}{m}\|w\|_m^m+\left(\frac{m(1-\lambda_2)}{2}-\lambda_1\right)(r\circ\nabla w)(t)+\delta m(1-\lambda_2)G(t)\\ &+\delta\int_\Omega\left\{\left(\frac{m(1-\lambda_2)}{2}-1\right)-\frac{C}{k\theta^{k-1}}-\left(\frac{m(1-\lambda_2)}{2}-1+\frac{1}{4\lambda_1}\right)\int_0^t c_1(x)r(s)\mathrm{d}s\right\}|\nabla w|^2\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中 $C_2=\dfrac{\delta^{\frac{2-k}{1-k}}\|c_2\|_\infty(k-1)\theta}{k\Im_1}$。

取 $\lambda_1=\dfrac{m(1-\lambda_2)}{2}$ 并利用下述关系

$$\begin{aligned}&\left(\frac{m(1-\lambda_2)}{2}-1\right)-\left(\frac{m(1-\lambda_2)}{2}-1+\frac{1}{4\lambda_1}\right)\int_0^t c_1(x)r(s)\mathrm{d}s\\ &=\left\{\left(\frac{m(1-\lambda_2)}{2}-1\right)\left(1-\int_0^t c_1(x)r(s)\mathrm{d}s\right)-\frac{1}{2m(1-\lambda_2)}\int_0^t c_1(x)r(s)\mathrm{d}s\right\}\\ &\ge\left\{\left(\frac{m(1-\lambda_2)}{2}-1\right)r_a-\frac{1}{2m(1-\lambda_2)}(1-r_a)\right\}=b_{\lambda_2},\end{aligned}$$

可以得到

$$M'(t)\geq\left((1-\alpha)-C_2\right)G^{-\alpha}(t)G'(t)+\delta\left(1+\frac{m(1-\lambda_2)}{2}\right)\|w_t\|^2$$
$$+\delta\left(1+\frac{m(1-\lambda_2)}{2}\right)\left\|q^{\frac{1}{2}}(x)h^{\frac{1}{2}}(x)z\right\|_{\Gamma_1}^2+\delta\left(\lambda_2-\frac{C}{k\theta^{k-1}}\right)\int_\Omega|w|^m\ln|w|\mathrm{d}x\text{。}\tag{59}$$
$$+\frac{\delta(1-\lambda_2)}{m}\|w\|_m^m+\delta m(1-\lambda_2)G(t)+\delta\left\{b_{\lambda_2}-\frac{C}{k\theta^{k-1}}\right\}\|\nabla w\|^2$$

设

$$b=(\frac{m}{2}-1)r_a-\frac{1}{2m}(1-r_a)\text{，}$$

那么

$$b>0\text{，}\quad b_{\lambda_2}<b\text{，}\quad\lim_{\lambda_2\to0^+}b_{\lambda_2}=b\text{。}$$

因此，存在$0<\lambda_2(0)<\frac{m-2}{m}$使得

$$b_{\lambda_2}>0\text{对于}0<\lambda_2<\lambda_2(0)\text{。}$$

适当选取一个足够大的$\theta>0$，使得

$$b_{\lambda_2}-\frac{C}{k\theta^{k-1}}>0\text{和}\lambda_2-\frac{C}{k\theta^{k-1}}>0\text{，}$$

再适当选取一个足够小的$\delta>0$，使得

$$(1-\alpha)-C_2>0\text{。}$$

并且

$$M(0)=G^{1-\alpha}(0)+\delta(w_0,w_1)-\frac{\delta}{2}\left\|q^{\frac{1}{2}}(x)l^{\frac{1}{2}}(x)z_0\right\|_{\Gamma_1}^2-\delta\|q(x)z_0w_0\|_{\Gamma_1}>0\text{。}\tag{60}$$

于是有

$$M'(t)\geq C\left(\|w_t\|^2+\left\|q^{\frac{1}{2}}(x)h^{\frac{1}{2}}(x)z\right\|_{\Gamma_1}^2+\|w\|_m^m+G(t)+\int_\Omega|w|^m\ln|w|\mathrm{d}x+\|\nabla w\|^2\right)\text{。}\tag{61}$$

由式子(46)可以知

$$M^{\frac{1}{1-\alpha}}(t)\leq C\left(G(t)+|(w,w_t)|^{\frac{1}{1-\alpha}}+\|q(x)zw\|_{\Gamma_1}^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)\text{，}\tag{62}$$

利用 Young's 不等式和(47)式有$2\leq\frac{2}{(1-\alpha)}\leq m$，再应用引理 2，推导出

$$|(w,w_t)|^{\frac{1}{1-\alpha}}\leq C\|w\|_m^{\frac{1}{1-\alpha}}\|w_t\|^{\frac{1}{1-\alpha}}\leq C\left(\|w_t\|^2+\|w\|_m^{\frac{2}{1-2\alpha}}\right)\leq C\left(\|w_t\|^2+\|w\|_m^m+\|\nabla w\|^2\right)\text{。}\tag{63}$$

通过$g>2$并使用 Young's 不等式，可得：

$$\|q(x)zw\|_{\Gamma_1}^{\frac{1}{1-\alpha}}=\left\|\frac{q(x)h(x)zw}{h(x)}\right\|_{\Gamma_1}^{\frac{1}{1-\alpha}}$$
$$\leq\left(\frac{\|q(x)\|_{\Gamma_1,\infty}\|h(x)\|_{\Gamma_1,\infty}}{h_0^2}\right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}\left\|q^{\frac{1}{2}}(x)h^{\frac{1}{2}}(x)z\right\|_{\Gamma_1}^{\frac{1}{(1-\alpha)}}\|w\|_{\Gamma_1}^{\frac{1}{1-\alpha}}\text{。}\tag{64}$$
$$\leq C\left(\left\|q^{\frac{1}{2}}(x)h^{\frac{1}{2}}(x)z\right\|_{\Gamma_1}^2+\|w\|_{\Gamma_1,g}^{\frac{2}{1-2\alpha}}\right)$$

从(47)式可以看出 $\frac{2}{g(1-2\alpha)}\le 1$，取(9)式中的 $\mu_1=\frac{2}{g(1-2\alpha)}$， $\mu_2=G(0)$，有

$$\|w\|_{\Gamma_1,g}^{\frac{2}{1-2\alpha}}\le\frac{G(0)+1}{G(0)}\left(\|w\|_{\Gamma_1,g}^{g}+G(0)\right)\le C\left(\|w\|_{\Gamma_1,g}^{g}+G(t)\right),\tag{65}$$

结合(62)- (65)和(43)式，可以推导出

$$M^{\frac{1}{1-\alpha}}(t)\le C\left(G(t)+\|w_t\|^2+\|w\|_m^m+\|\nabla w\|^2+\left\|q^{\frac{1}{2}}(x)h^{\frac{1}{2}}(x)z\right\|_{\Gamma_1}^2+\|w\|_{\Gamma_1,g}^{g}\right)。\tag{66}$$

下面，估计(60)式中的最后一项。由(48)、(29)和(27)式，可以得到

$$2<g<\frac{2n+2}{n},$$

于是有

$$0<\frac{n}{2}-\frac{n-1}{g}<\frac{2}{g}<1。$$

设 $s\in\left[\frac{n}{2}-\frac{n-1}{g},\frac{2}{g}\right)$，通过使用嵌入和插值定理，有下列不等式成立

$$\|w\|_{\Gamma_1,g}^{g}\le C\|w\|_{H^s(\Omega)}^{g}\le C\|w\|_m^{(1-s)g}\|\nabla w\|^{sg}。\tag{67}$$

通过使用 Young's 不等式： $\frac{sg}{2}+\frac{2-sg}{2}=1$，可以得到

$$\|w\|_{\Gamma_1,g}^{g}\le C\left(\|\nabla w\|^2+\left(\|w\|_m^m\right)^{\frac{2g(1-s)}{m(2-sg)}}\right)。\tag{68}$$

由(48)式可知

$$\frac{n}{2}-\frac{n-1}{g}\le\frac{2(m-g)}{g(m-2)}。$$

取 $\frac{n}{2}-\frac{n-1}{g}\le s\le\frac{2(m-g)}{g(m-2)}\left(<\frac{2}{g}\right)$，则有

$$0<\frac{2g(1-s)}{m(2-sg)}\le 1。$$

最后，通过使用(9)式： $\mu_1=\frac{2g(1-s)}{m(2-sg)}$， $\mu_2=G(0)$，得出

$$\left(\|w\|_m^m\right)^{\frac{2g(1-s)}{p(2-sg)}}\le\left(\frac{G(0)+1}{G(0)}\right)\left(\|w\|_m^m+G(0)\right)\le C\left(\|w\|_m^m+G(t)\right)。\tag{69}$$

由(66)、(68)和(69)式，可得出结论

$$M^{\frac{1}{1-\alpha}}(t)\le C\left(G(t)+\|w_t\|^2+\|w\|_m^m+\|\nabla w\|^2+\left\|q^{\frac{1}{2}}(x)h^{\frac{1}{2}}(x)z\right\|_{\Gamma_1}^2\right),\tag{70}$$

最终由(61)和(70)式，得出

$$M'(t)\ge CM^{\frac{1}{1-\alpha}}(t),t\ge 0,\tag{71}$$

这表明解 T^* 在有限时间内爆炸

$$T^*\le\frac{1-\alpha}{C\alpha M^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(0)}。\tag{72}$$

为了证明(45)式左边的不等式成立，设

$$\vartheta(t)=\|w_t\|^2+\int_\Omega\left(1-c_1(x)\int_0^t r(s)\mathrm{d}s\right)|\nabla w|^2\,\mathrm{d}x+\left\|q^{\frac{1}{2}}(x)h^{\frac{1}{2}}(x)z\right\|_{\Gamma_1}^2+(r\circ\nabla w)(t)+2\xi\tau\int_0^1\|u(\sigma,t)\|_k^k\mathrm{d}\sigma。\tag{73}$$

由(71)、(46)、(41)和(31)式，可以得出

$$\lim_{t\to(T^*)^-}\int_\Omega |w|^m \ln|w|\,\mathrm{d}x = +\infty \text{ 。} \tag{74}$$

由(44)、(8)和(30)式，得到下列不等式成立

$$0<\int_\Omega |w|^m \ln|w|\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{e\omega_0}\|w\|_{m+\omega_0}^{m+\omega_0} \le \frac{B_{m+\omega_0}^{m+\omega_0}}{e\omega_0}\|\nabla w\|^{m+\omega_0} \text{ 。} \tag{75}$$

由(74)和(75)式，得出

$$\lim_{t\to(T^*)^-}\|\nabla w\| = +\infty \text{ ,} \tag{76}$$

从而

$$\lim_{t\to(T^*)^-}\vartheta(t) \ge \lim_{t\to(T^*)^-} r_a\|\nabla w\|^2 = +\infty \text{ ,} \tag{77}$$

从根据(73)、(31)、(33)、(8)、(30)式和 Young's 不等式，有

$$\begin{aligned}
\vartheta'(t) &= 2E'(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{m}\int_\Omega |w|^m\ln|w|\,\mathrm{d}x - \frac{1}{m^2}\|w\|_m^m\right)\\
&\le -2\Im_1\left(\|w_t\|_k^k + \|u(1,t)\|_k^k\right) + (r'\circ\nabla w)(t) - 2p_1\|w_t\|_{L^{p_0}(\Gamma_1)}^{p_0}\\
&\quad -2\left\|q^{\frac{1}{2}}(x)l^{\frac{1}{2}}(x)z_t\right\|_{\Gamma_1}^2 - A_1 r(t)\|\nabla w\|^2 + 2\int_\Omega w_t|w|^{m-2}w\ln|w|\,\mathrm{d}x\\
&\le 2\int_\Omega |w_t||w|^{m-2}w\ln|w|\,\mathrm{d}x\\
&\le 2\|w_t\|^2 + \int_{|w|\ge 1}\left||w|^{m-1}\ln|w|\right|^2\mathrm{d}x + \int_{|w|<1}\left||w|^{m-1}\ln|w|\right|^2\mathrm{d}x\\
&\le 2\|w_t\|^2 + \frac{B_{2(m-1+\omega_1)}^{2(m-1+\omega_1)}}{e^2\omega_1^2}\|\nabla w\|^{2(m-1+\omega_1)} + \frac{|\Omega|}{e^2(m-1)^2}\\
&\le 2\vartheta(t) + d_1\vartheta^{m-1+\omega_1}(t) + d_2,
\end{aligned} \tag{78}$$

其中

$$d_1 = \frac{B_{2(m-1+\omega_1)}^{2(m-1+\omega_1)}}{e^2\omega_1^2 h_a^{m-1+\omega_1}}\text{ ，和 } d_2 = \frac{|\Omega|}{e^2(m-1)^2}\text{ 。} \tag{79}$$

从(78)式，可以得出

$$\int_0^{T^*}\frac{\vartheta'(t)}{2\vartheta(t)+d_1\vartheta^{m-1+\omega_1}(t)+d_2}\mathrm{d}t \le \int_0^{T^*}\mathrm{d}t \text{ 。}$$

最终有

$$\int_{\vartheta(0)}^{+\infty}\frac{1}{2\psi+d_1\psi^{m-1+\omega_1}+d_2}\mathrm{d}\psi \le T^* \text{ 。}$$

定理 2 证明完毕。

3 结论

本文研究的波动方程相较于现有文献，在源项方面和系数方面进行了拓展，将其改为对数型源项并将常系数项改为变系数项。本文所考虑的源项组合，可以得到材料在时滞作用下的波动响应，进而分析其稳定性、临界点以及爆破现象。这种分析为多种工程应用提供了理论支持，尤其是涉及到动态响应分析和安全性评估时，能够帮助工程师设计出更加安全、可靠的系统。同时也具有深刻的物理背景，揭示了材料在非线性、时变载荷作用下的复杂行为，还在多个领域中具有实际的应用意义，尤其是在工程结构、材料设计以及地震与声学研究等方面。本文通过能量方法和一些基本假设，证明了在某些合适的条件下，具有负初始能量的解会在有限时间内发生爆炸，此外还估计了爆炸时间的上下界。

本文主要研究了问题(1)-(6)在次临界能级下的爆破行为，而未讨论其在临界与超临界能级下解的整体存在性与爆破性。相关问题，尤其是超临界能级情形下解的性质仍有待进一步研究。未来的工作可在此基础上，系统分析从次临界到超临界能级范围内解的动力学行为。

参考文献

[1] Y.YANG, Z.B.FANG, On a semilinear wave equation with Kirchhoff-type nonlocal damping terms and logarithmic nonlinearity, Mediterr. J. Math. 20(1) (2023) no.13.

[2] N.IRKIL, E. PISKIN, P.AGARWAL, Global existence and decay of solutions for a system of viscoelastic wave equations of Kirchhoff type with logarithmic nonlinearity, Math. Meth. Appl. Sci. 45(5)(2022) 2921–2948.

[3] L.YAN, L.L.SUN, General stability and exponential growth of nonlinear variable coefficient wave equation with logarithmic source and memory term, Math. Meth. Appl. Sci. 46(1)(2023) 879–894.

[4] D.D.GUO, Z.F.ZHANG, Exponential stabilization of wave equation with acoustic boundary conditions and its application to memory-type boundary, Math. Meth. Appl. Sci. 45 (11)(2022) 6599–6614.

[5] M.J.LEE, J.R.KANG, General stability for the viscoelastic wave equation with nonlinear time-varying delay, nonlinear damping and acoustic boundary conditions, Mathematics 11 (22)(2023) 4593.

[6] J.L.YU, H.F.DI, Variable-coefficient viscoelastic wave equation with acoustic boundary conditions: global existence, blowup and energy decay rates, Banach J. Math. Anal. 17 (4)(2023) 68.

[7] D. D. GUO and Z. F. ZhANG, General decay for semi-linear wave equations with memory term and logarithmic source, Results Math. 117 (2023), no. 4, 1–16.

[8] J. HAO and T. ZHANG, General energy decay estimates for a variable coefficient viscoelastic semilinear wave equation with logarithmic source term and acoustic boundary conditions, Math. Meth. Appl. Sci. (2024), 1–21.

[9] PARK, S. H , Blow-up for logarithmic viscoelastic equations with delay and acoustic boundary conditions. Adv. Nonlinear Anal. 12 (2023), no. 1, 1–14.

[10] A.CHOUCHA, D.OUCHENANE, Local existence and blow up of solutions to a logarithmic nonlinear wave equation with timevarying delay, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 68(1)(2023) 171–187.

[11] F.TAHAMTANI, M.SHAHROUZI, J.FERREIRA, Global existence and general decay for a weak viscoelastic equation with acoustic boundary conditions and a logarithmic source term, Z. Angew. Math. Phys. 74 (5)(2023) 207.

[12] SUN-HYE P., Global existence, energy decay and blow-up of solutions for wave equations with time delay and logarithmic source. 2020;2020:631.

[13] T. G. HA and S.-H. PARK, Blow-up phenomena for a viscoelastic wave equation with strong damping and logarithmic nonlinearity, Adv. Difference Equ. 2020 (2020), 235 (17 pages).

[14] M. KAfiNI, S. A. MESSAOUDI and S. NICAISE, A blow-up result in a nonlinear abstract evolution system with delay, Nonlinear Differ. Equ. Appl. 23 (2016), 13 (14 pages).

[15] M. KAFINI and S. MESSAOUDI, Local existence and blow up of solutions to a logarithmic nonlinear wave equation with delay, Appl. Anal. 99 (2020), 530–547.

Blow-up of a Logarithmic Variable-Coefficient Wave Equation with Time Delay

Abstract: A blow-up criterion is established for a class of variable-coefficient viscoelastic wave equations with nonlinear damping, logarithmic source terms, and velocity delay. Under suitable assumptions on the kernel function r and the variable coefficients $c_1(x)$ and $c_2(x)$, an energy method is used to prove that if the initial energy is negative, the solution blows up in finite time, with explicit upper and lower bounds for the blow-up time provided.

Keywords: Blow-up; variable coefficients; time delay; nonlinear logarithmic term; acoustic boundary conditions