

E -预不变凸区间值函数及其在数学规划中的应用*

邓春艳, 彭再云, 陈雪静, 彭志莹

(重庆交通大学 数学与统计学院, 重庆 400074)

摘要:【目的】提出并研究了在 LU-序关系下的 E -预不变凸区间值函数。【方法】首先给出了 LU- E -预不变凸区间值函数和 LU- E -不变凸区间值函数的定义, 举例验证了 LU- E -预不变凸区间值函数的存在性; 其次讨论了 LU- E -预不变凸区间值函数与其他几类区间值函数间的关系; 最后研究了一类 LU- E -预不变凸区间值优化问题, 给出了 E -type-I 型最优解和 E -type-II 型最优解的概念, 并证明了 E -KKT 最优性条件的必要性和充分性条件。【结果】基于 LU-序关系, 理论推导并举例验证。【结论】文中将近期关于广义凸函数的一些研究成果进行了推广, 在一定程度上丰富了广义凸函数的研究。

关键词: LU- E -预不变凸区间值函数; E -不变凸; E -KKT 最优性

中图分类号: O221

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2021)01-0030-09

函数的凸性与广义凸性是运筹学和经济学中重要的基础理论, 在最优化理论中起着十分重要的作用。广义凸性受到许多学者的关注, 并获得了一些较好的成果。1981 年, Hanson^[1]提出了不变凸函数的概念, 并讨论了这类函数的一些相关性质。1986 年, Ben-Israel 等人^[2]在文献[1]的基础上进一步研究了可微情形下不变凸性函数的性质。1988 年, Weir 和 Mond^[3]以及 Weir 和 Jeyakumar^[4]给出了预不变凸函数的定义, 把不变凸情形推广到了预不变凸情形, 并获得了非线性规划问题的最优性条件和对偶结果。1999 年, Youness^[5]提出了 E -凸集、 E -凸函数的定义, 并得到它们在 E -凸规划问题中的一些应用结果。2001 年, Yang^[6]对文献[5]中的几个错误结论进行了修正, 并举出若干反例进行了说明。2009 年, Fulga 等人^[7]给出了 E -预不变凸函数的定义, 得到了 E -预不变凸函数的一些性质, 并获得了 E -预不变凸型非线性规划问题的几个应用结果。2015 年, 杨新民等人^[8]讨论了预不变凸函数和局部预不变凸函数的性质, 并较系统地介绍了数值函数各种类型的广义凸性及其它们在运筹学和经济学中的应用。同年, 彭再云等人^[9]提出了一类新的广义凸函数—— G - E -半预不变凸函数, 并得到了半预不变凸多目标规划问题的最优性条件。相关研究可见文献[10-13]。

另一方面, 由于不确定性问题能够更好刻画决策分析中存在的普遍性现象, 因此相关研究得到了国内外学者的广泛关注。不确定性优化问题包括随机优化问题、模糊优化问题以及区间值优化问题, 其中区间值优化问题是一类具有不确定参数的优化问题, 这种以区间数形式表现的优化问题具有广泛的应用。例如: 水库调度优化问题中, 由于降雨、温度等因素, 河流在一年内的水量是不同的, 且差异性较大, 这就需要借助区间值优化理论进行研究。近些年来, 有关区间值函数的研究也成为了一个热点。2007 年, Wu^[14]提出了一类新的广义凸函数——区间值函数, 给出了区间值函数的 LU-凸定义, 并提出了一类异于传统优化问题的区间值优化问题。2014 年, Zhang 等人^[15]将实值函数的不变凸性和预不变凸性的概念扩展到了区间值函数, 并研究了这类广义凸区间值优化问题的 KKT 最优性条件与对偶性。2019 年, Antczak 和 Abdalaleem^[16]建立了一类含有等式约束和不等式约束的多目标区间值非凸向量优化问题, 研究了该优化问题的 E -KKT 最优性充分条件和必要条件。

受到文献[14, 16]的启发, 本文提出了一类新的区间值函数, 即 LU- E -预不变凸区间值函数, 讨论了它的相关性质。借助 E -可微性, 提出了 E -type-I 型最优解和 E -type-II 型最优解的概念, 并给出了这类优化问题的 E -

* 收稿日期: 2020-10-20 网络出版时间: 2021-03-10 16:08

资助项目: 国家自然科学基金(No. 11301571); 重庆市基础与前沿研究项目(No. cstc2018jcyjAX0337); 重庆市巴渝学者计划资助项目; 重庆市留创计划创新项目(No. cx2019148); 最优化与控制教育部重点实验室开放基金重点课题(No. CSSXKFKTZ201801); 重庆市研究生科研创新项目(No. CYS20290); 重庆市研究生导师团队建设项目(No. JDDSTD201802)

第一作者简介: 邓春艳, 女, 研究方向为多目标优化理论与方法, E-mail: dengcy666@163.com; 通信作者: 彭再云, 男, 教授, 博士生导师, E-mail: pengzaiyun@126.com

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20210310.1138.012.html>

KKT 最优性条件的必要性和充分性。

1 预备知识

本节主要介绍一些基本定义和 LU-序关系。设 $\mathbf{R}^n$ 为 n 维欧氏空间, $E: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 和 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是两个向量值映射。

用 $\mathcal{I}$ 来表示 $\mathbf{R}$ 中所有闭区间构成的集族, 设闭区间 $A = [a^L, a^U]$, 其中 a^L 和 a^U 分别表示是 A 的下界和上界。设 $A = [a^L, a^U]$ 和 $B = [b^L, b^U]$ 是 $\mathcal{I}$ 中的两个闭区间, 定义:

$$1) A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\} = [a^L + b^L, a^U + b^U];$$

$$2) -A = \{-a; a \in A\} = [-a^U, -a^L], \text{ 则有 } A - B = A + (-B) = [a^L - b^U, a^U - b^L], \text{ 同时有 } kA = \{ka; a \in A\} = \begin{cases} [ka^L, ka^U], & k \geq 0 \\ [ka^U, ka^L], & k < 0 \end{cases}, \text{ 其中 } k \text{ 是一个实数。}$$

设 $A = [a^L, a^U]$ 是一个闭区间, 记 $A^L = a^L$ 和 $A^U = a^U$ 。若 $A = [a^L, a^U]$ 和 $B = [b^L, b^U]$ 是闭区间, 则有 $(A + B)^L = a^L + b^L = A^L + B^L$ 和 $(A + B)^U = a^U + b^U = A^U + B^U$ 。

Wu 在文献[14]中给出了区间值函数的定义, 函数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{I}$ 称为区间值函数, 若对 $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ 是 $\mathbf{R}$ 中的闭区间。也可记作 $f(x) = [f^L(x), f^U(x)]$, 其中 f^L 和 f^U 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的实值函数, 满足对 $\forall x \in \mathbf{R}^n$, 都有 $f^L(x) \leq f^U(x)$, 同时有 $(f(x))^L = f^L(x)$, 且 $(f(x))^U = f^U(x)$ 。

在区间值数学问题中, 通常采用序关系来对区间进行比较, 接下来介绍其中一类序关系。

现设 $A = [a^L, a^U]$ 和 $B = [b^L, b^U]$ 是 $\mathbf{R}$ 中的两个闭区间, 则记 $A \leq_{LU} B$ 当且仅当 $a^L \leq b^L$ 和 $a^U \leq b^U$ 成立, 记 $A <_{LU} B$ 当且仅当 $A \leq_{LU} B$ 和 $A \neq B$ 成立, 即下式之一成立:

$$\begin{cases} a^L < b^L, \\ a^U \leq b^U, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a^L \leq b^L, \\ a^U < b^U, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a^L < b^L, \\ a^U < b^U. \end{cases}$$

引理 1^[14,17] 设 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的区间值函数, 则 f 在 $c \in \mathbf{R}^n$ 处是连续的, 当且仅当 f^L 和 f^U 在 c 处均连续。

下面回顾区间值函数的弱可微性以及 E -可微的概念。

定义 1^[14] 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集, 称区间值函数 $f: D \rightarrow \mathcal{I}$, $f(x) = [f^L(x), f^U(x)]$ 在 $x_0 \in X$ 处是弱可微的, 若实值函数 $f^L(x)$ 与 $f^U(x)$ 在 x_0 处可微。

定义 2^[16] 设 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 是一个定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的可微实值函数, $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $E: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, 称 f 在 x_0 处 E -可微, 当且仅当 $f(E(\cdot))$ 是一个可微实值函数, 即:

$$f(E(x)) = f(E(x_0)) + \nabla(f(E(x_0)))(x - x_0) + \theta(x_0, x - x_0) \|x - x_0\|,$$

其中: 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\theta(x_0, x - x_0) \rightarrow 0$ 。

定义 3^[16] 设 $E: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, 称区间值函数 $f: D \rightarrow \mathcal{I}$, $f(x) = [f^L(x), f^U(x)]$ 在 $x_0 \in X$ 处是 E -可微的, 当且仅当实值函数 $f^L(E(\cdot))$ 和 $f^U(E(\cdot))$ 是可微函数, 即:

$$f^L(E(x)) = f^L(E(x_0)) + \nabla f^L(E(x_0))(x - x_0) + \theta^L(x_0, x - x_0) \|x - x_0\|,$$

$$f^U(E(x)) = f^U(E(x_0)) + \nabla f^U(E(x_0))(x - x_0) + \theta^U(x_0, x - x_0) \|x - x_0\|。$$

其中: 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\theta^L(x_0, x - x_0) \rightarrow 0$, $\theta^U(x_0, x - x_0) \rightarrow 0$ 。

定义 4^[14] 设 $X \subseteq \mathbf{R}^n$, $E: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, f 为定义在 D 上的区间值函数, $x_0 \in D$, 若实值函数 $f^L(E(\cdot))$ 和 $f^U(E(\cdot))$ 在 x_0 处是连续可微的, 则称 f 在 x_0 处是弱连续 E -可微的。

2 LU- E -预不变凸区间值函数的定义及性质

本节将实值函数上的 E -预不变凸性与区间值函数结合, 在 LU 序关系下, 提出了 LU- E -不变凸区间值函数和 LU- E -预不变凸区间值函数的概念, 并研究了这些新定义的广义凸区间值函数的相关性质。

定义 5^[5] 称集合 $S \subseteq \mathbf{R}^n$ 为关于映射 $E: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的 E -凸集, 若对 $\forall x, y \in S$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, 有:

$$\lambda E(x) + (1 - \lambda)E(y) \in S。$$

定义 6^[18] 设 $S \subseteq \mathbf{R}^n$ 为关于映射 $E: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的 E -凸集, f 是 S 上的区间值函数, 若对 $\forall x, y \in S$, $\forall \lambda \in [0,$

1], 使得: $f(\lambda E(x) + (1-\lambda)E(y)) \leq_{LU} \lambda f(E(x)) + (1-\lambda)f(E(y))$, 则称 f 在 S 上是 LU- E -凸区间值函数。

定义 7^[19] 称集合 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 关于 η 是 E -不变凸集, 若存在向量函数 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 和 $E: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, 对 $\forall x, y \in A$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, 使得 $E(y) + \lambda \eta(E(x), E(y)) \in A$ 。

注 1 显然, 当 $\eta(E(x), E(y)) = E(x) - E(y)$ 时, E -不变凸集就退化成 E -凸集。

定义 8^[19] 集合 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 关于 η 是 E -不变凸集, 称实值函数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 在集合 A 上关于 η 是 E -预不变凸函数, 若 $\forall x, y \in A$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, 使得 $f(E(y) + \lambda \eta(E(x), E(y))) \leq \lambda f(E(x)) + (1-\lambda)f(E(y))$ 。

Najeeb 在文献[20]中给出了 E -不变凸实值函数的概念。

定义 9^[20] 设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 为关于向量函数 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的 E -不变凸集, f 是 A 上的实值函数, 若对 $\forall x, y \in A$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, 使得 $f(E(x)) - f(E(y)) \geq \eta^T(E(x), E(y)) \nabla f(E(y))$, 则称 f 在 A 上是关于 η 的 E -不变凸函数。

注 2 如果 f 是定义 E -不变凸集上关于 η 的 E -预不变凸 E -可微函数, 则 f 也是关于同一个 η 的 E -不变凸函数。反之不一定成立。

接下来给出 LU-序关系下的 E -不变凸区间值函数的定义。

定义 10 设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 为关于向量函数 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的 E -不变凸集, f 是 A 上的区间值函数, 如果实值函数 f^L 和 f^U 在 A 上关于同一 η 是 E -不变凸的, 则称 f 在 A 上是关于 η 的 LU- E -不变凸区间值函数。

基于 LU-序关系 Zhang 在文献[15]中提出了 LU-预不变凸区间值函数的概念。

定义 11^[15] 设集合 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 为关于向量函数 $\eta: K \times K \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的不变凸集, f 是定义在 A 上的区间值函数, 若对 $\forall x, y \in A$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, 使得 $f(y + \lambda \eta(x, y)) \leq_{LU} \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, 则称 f 在 A 上是关于 η 的 LU-预不变凸函数。

基于文献[7, 15], 下面给出在 LU-序关系下的 LU- E -预不变凸区间值函数的概念。

定义 12 设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 为关于向量函数 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的 E -不变凸集, f 是定义在 A 上的区间值函数, 如果对 $\forall x, y \in A$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, 使得 $f(E(y) + \lambda \eta(E(x), E(y))) \leq_{LU} \lambda f(E(x)) + (1-\lambda)f(E(y))$, 则称 f 在 A 上是关于 η 的 LU- E -预不变凸区间值函数。

下面用实例来验证 LU- E -预不变凸区间值函数的存在性。

例 1 设 $f(x) = [-2, -1]|x|$, 对 $\forall x \in \mathbf{R}$, $E(x) = 2x$ 。对 $\forall x, y \in \mathbf{R}$, 则 f 在 $\mathbf{R}$ 上关于如下的 $\eta: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是预不变凸区间值函数:

$$\eta(x, y) = \begin{cases} x - y, & x \geq 0, y \geq 0 \\ x - y, & x \leq 0, y \leq 0 \\ y - x, & x > 0, y < 0 \\ y - x, & x < 0, y > 0 \end{cases}$$

分析 容易证明对 $\forall \lambda \in [0, 1]$, R 为定关于 η 的 E -不变凸集, 下证 f 在 $\mathbf{R}$ 上是关于 η 的 LU- E -预不变凸区间值函数。

1) 当 $x \geq 0, y \geq 0$ 时, $2y + \lambda(2x - 2y) \geq 0$, 则有:

$$\begin{aligned} f^L(E(y) + \lambda \eta(E(x), E(y))) &= f^L(2\lambda x + 2(1-\lambda)y) = -2[2\lambda x + 2(1-\lambda)y] = \\ &= -4\lambda x - 4(1-\lambda)y \leq \lambda f^L(E(x)) + (1-\lambda)f^L(E(y)), \end{aligned}$$

同理可得, $f^U(E(y) + \lambda \eta(E(x), E(y))) \leq \lambda f^U(E(x)) + (1-\lambda)f^U(E(y))$ 。

2) 当 $x \leq 0, y \leq 0$ 时, 与 1) 类似, 可得:

$$f^U(E(y) + \lambda \eta(E(x), E(y))) \leq \lambda f^U(E(x)) + (1-\lambda)f^U(E(y))。$$

3) 当 $x > 0, y < 0$ 时, $2(1+\lambda)y \leq 2(1-\lambda)y$, $2y + \lambda(2y - 2x) < 0$, 则有:

$$\begin{aligned} f^L(E(y) + \lambda \eta(E(x), E(y))) &= f^L(2y + \lambda(2y - 2x)) = 2[2y + \lambda(2y - 2x)] = \\ &= -4\lambda x + 4(1+\lambda)y \leq -4\lambda x + 4(1-\lambda)y = \lambda f^L(E(x)) + (1-\lambda)f^L(E(y))。 \end{aligned}$$

同理可得, $f^U(E(y) + \lambda \eta(E(x), E(y))) \leq \lambda f^U(E(x)) + (1-\lambda)f^U(E(y))$ 。

4) 当 $x < 0, y > 0$ 时, 与 3) 类似, 可得:

$$f^U(E(y) + \lambda \eta(E(x), E(y))) \leq \lambda f^U(E(x)) + (1-\lambda)f^U(E(y))。$$

综上, f 在 $\mathbf{R}$ 上是关于 η 的 LU- E -预不变凸区间值函数。

例 2 设 $A = [-6, 6]$, 对 $\forall x \in A, E(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq \sqrt{6} \\ -1, & |x| > \sqrt{6} \end{cases}$, 对 $\forall x, y \in A$, 有:

$$\eta(x, y) = \begin{cases} x - y, & 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 6 \text{ 或 } -6 \leq x \leq 0, -6 \leq y \leq 0 \\ -x - y, & \text{其他} \end{cases},$$

则区间值函数 $f(x) = [1, 2]|x|$ 在 A 上是关于 η 的 LU- E -预不变凸区间值函数。

注 3 显然, LU- E -凸区间值函数严格包含于 LU- E -预不变凸区间值函数, LU- E -预不变凸区间值函数是文献[18]中 LU- E -凸区间值函数的真推广。

下面给出 LU- E -预不变凸区间值函数的性质。

定理 1 设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 为关于向量函数 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的 E -不变凸集, f 是定义在 A 上的区间值函数, 则 f 在 A 上是关于 η 的 LU- E -预不变凸区间值函数, 当且仅当 $f^L(E(\cdot))$ 和 $f^U(E(\cdot))$ 在 A 上都是关于同一 η 的 E -预不变凸函数。

证明 充分性由定义 12 可得。

下证必要性。因为 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 为关于向量函数 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的 E -不变凸集, 则对 $\forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0, 1]$, 有 $E(y) + \lambda\eta(E(x), E(y)) \in A$ 。

f 在 A 上是关于 η 的 LU- E -预不变凸区间值函数, 则对 $\forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0, 1]$, 关于 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 有

$$f(E(y) + \lambda\eta(E(x), E(y))) \leq_{LU} \lambda f(E(x)) + (1 - \lambda)f(E(y))$$

成立, 即有:

$$\begin{aligned} f^L(E(y) + \lambda\eta(E(x), E(y))) &\leq \lambda f^L(E(x)) + (1 - \lambda)f^L(E(y)), \\ f^U(E(y) + \lambda\eta(E(x), E(y))) &\leq \lambda f^U(E(x)) + (1 - \lambda)f^U(E(y)). \end{aligned}$$

根据定义 8 可知, $f^L(E(\cdot))$ 和 $f^U(E(\cdot))$ 在 A 上都是关于同一 η 的 E -预不变凸函数。证毕

推论 1 设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 为关于向量函数 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的 E -不变凸集, 若 f 在 A 上是关于 η 的 LU- E -预不变凸弱连续 E -可微区间值函数, 则 f 在 A 上也是关于同一 η 的 LU- E -不变凸区间值函数。

证明 根据 f 在 A 上是关于 η 的 LU- E -预不变凸区间值函数, 则由定理 1 知, $f^L(E(\cdot))$ 和 $f^U(E(\cdot))$ 在 A 上也是关于同一 η 的 E -预不变凸实值函数。由弱连续 E -可微的假设和定义 3 知, $f^L(E(\cdot))$ 和 $f^U(E(\cdot))$ 都是连续可微的。根据注 2 和定义 10 可知, f 在 A 上是关于同一个 η 的 LU- E -不变凸区间值函数。证毕

推论 2 设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 为关于向量函数 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的 E -不变凸集, 如果 f 在 A 上是关于 η 的 E -不变凸弱 E -可微区间值函数, 则对 $0 < \lambda, \mu \in \mathbf{R}$, 实值函数 $\lambda f^L + \mu f^U$ 在 A 上是关于同一 η 的 E -不变凸实值函数。

证明 由于 f 在 A 上是一个 LU- E -不变凸弱 E -可微区间值函数, 由定义 3 和定义 10 可知, $f^L(E(\cdot))$ 和 $f^U(E(\cdot))$ 都是连续 E -可微的 E -不变凸函数, 因此, 实值函数 $f^L(E(\cdot))$ 和 $f^U(E(\cdot))$ 关于非负系数的线性组合在 A 上是关于同一 η 是 E -不变凸函数。证毕

为了后文讨论的需要, 此处对一些必要符号进行说明。设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, 规定: 1) $x = y$, 即 $x_i = y_i$; 2) $x < y$, 即 $x_i < y_i$; 3) $x \leq y$, 即 $x_i \leq y_i$ 。其中: $i = 1, \dots, m$ 。

定理 2 设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 为关于向量函数 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的 E -不变凸集, f 在 A 上是关于 η 的 LU- E -预不变凸 E -可微区间值函数, 如果 $\nabla f^L(E(\cdot)) \geq (\leq) \mathbf{0}, \nabla f^U(E(\cdot)) \geq (\leq) \mathbf{0}$, 即 $\partial f(E(\cdot))/\partial x_i \geq (\leq) 0 (i = 1, \dots, n)$, 且对 $\forall x, y \in A$, 满足 $\eta(E(x), E(y)) \geq (\leq) E(x) - E(y)$, 则有

$$\begin{aligned} f^L(E(x)) - f^L(E(y)) &\geq \nabla f^L(E(y))(E(x) - E(y)), \\ f^U(E(x)) - f^U(E(y)) &\geq \nabla f^U(E(y))(E(x) - E(y)) \end{aligned}$$

成立。

证明 根据条件 $\nabla f^L(E(\cdot)) \geq (\leq) \mathbf{0}, \nabla f^U(E(\cdot)) \geq (\leq) \mathbf{0}, \eta(E(x), E(y)) \geq (\leq) E(x) - E(y)$, 则对 $\forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0, 1]$, 有:

$$\begin{aligned} f^L(E(y) + \lambda(E(x) - E(y))) &\leq f^L(E(y) + \lambda\eta(E(x), E(y))), \\ f^U(E(y) + \lambda(E(x) - E(y))) &\leq f^U(E(y) + \lambda\eta(E(x), E(y))). \end{aligned}$$

根据定义 12 和定理 1, 则有:

$$f^L(E(y) + \lambda\eta(E(x), E(y))) \leq \lambda f^L(E(x)) + (1 - \lambda)f^L(E(y)),$$

$$f^U(E(y) + \lambda \eta(E(x), E(y))) \leq \lambda f^U(E(x)) + (1 - \lambda) f^U(E(y)).$$

即:

$$f^L(E(y) + \lambda(E(x) - E(y))) \leq \lambda f^L(E(x)) + (1 - \lambda) f^L(E(y)),$$

$$f^U(E(y) + \lambda(E(x) - E(y))) \leq \lambda f^U(E(x)) + (1 - \lambda) f^U(E(y)).$$

因此,有不等式:

$$f^L(E(x)) - f^L(E(y)) \geq \frac{f^L(E(y) + \lambda(E(x) - E(y))) - f^L(E(y))}{\lambda},$$

$$f^U(E(x)) - f^U(E(y)) \geq \frac{f^U(E(y) + \lambda(E(x) - E(y))) - f^U(E(y))}{\lambda},$$

成立。当 $\lambda \rightarrow 0$ 时,有:

$$f^L(E(x)) - f^L(E(y)) \geq \nabla f^L(E(y))(E(x) - E(y)),$$

$$f^U(E(x)) - f^U(E(y)) \geq \nabla f^U(E(y))(E(x) - E(y)).$$

得证。

证毕

3 E-预不变凸区间值优化问题的 E-KKT 最优性

考虑如下这一类只含不等式约束的区间值向量优化问题:

$$(IVOP) \quad \min f(x) = [f^L(x), f^U(x)],$$

$$\text{s. t. } g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m.$$

其中 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{I}$ 为定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的区间值函数, $g_i: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的实值函数。记 $g := (g_1, \dots, g_m)$, 设 $X = \{x \in \mathbf{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$ 为优化问题 (IVOP) 的可行集, 其中 x 为问题 (IVOP) 的可行解。

对于上述这一类区间值优化问题, Wu 在文献 [14] 中给出了 type-I 型最优解和 type-II 型最优解的概念。

定义 13^[14] 设 x^* 是问题 (IVOP) 的一个可行解, 如果不存在 $\bar{x} \in X$ 使得 $f(\bar{x}) <_{LU} f(x^*)$, 则称 x^* 是问题 (IVOP) 的 type-I 型最优解。

为了给出第二种解的概念, 下面介绍另一种序关系。设 $A = [a^L, a^U]$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的一个闭区间, 记运算结果 $a^C = \frac{1}{2}(a^L + a^U)$, $a^W = \frac{1}{2}(a^U - a^L)$, 称 a^C 为闭区间 A 的中心、 a^W 为闭区间 A 的半宽度。因此, 闭区间 A 可记为 $A = \langle a^C, a^W \rangle$ 。设 $A = \langle a^C, a^W \rangle$, $B = \langle b^C, b^W \rangle$ 为两个闭区间, Ishibuchi 和 Tanaka 在文献 [21] 中介绍了下面这一类序关系。

对于最小化问题, 用 $A \leq_{CW} B$ 表示 $a^C \leq b^C$ 且 $a^W \leq b^W$ 。在最小化问题中, 中心越小且半宽度越小的区间更小。

定义 14^[14] 设 x^* 是问题 (IVOP) 的一个可行解, 如果不存在 $\bar{x} \in X$ 使得 $f(\bar{x}) <_{LU} f(x^*)$ 或 $f(\bar{x}) <_{CW} f(x^*)$, 则称 x^* 是问题 (IVOP) 的 type-II 型最优解。

设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 为关于向量函数 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的 E -不变凸集, 且 E 既是单射又是满射。在本文中, 假设优化问题 (IVOP) 是 E -可微的。为考虑优化问题 (IVOP) 的 E -可微性, 建立对应区间值优化问题 (IVOP_E):

$$\min f(E(x)) = [f^L(E(x)), f^U(E(x))],$$

$$\text{s. t. } g_i(E(x)) \leq 0, i = 1, \dots, m,$$

$$x \in A.$$

其中: $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{I}$ 为定义在 A 上的区间值函数, $g_i (i = 1, \dots, m)$ 为定义在 A 上的实值函数, 称优化问题 (IVOP_E) 为 E -区间值优化问题。设 $X_E = \{x \in A : g_i(E(x)) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$ 为优化问题 (IVOP_E) 的可行集, 其中 x 为问题 (IVOP_E) 的可行解。

与文献 [14] 类似, 给出优化问题 (IVOP) 的 E -type-I 型最优解和 E -type-II 型最优解的概念。

定义 15 设 x^* 是优化问题 (IVOP) 的一个可行解, 如果不存在 $\bar{x} \in X_E$ 使得 $f(E(\bar{x})) <_{LU} f(E(x^*))$, 则称 $E(x^*)$ 是优化问题 (IVOP) 的 E -type-I 型最优解。

定义 16 设 x^* 是优化问题 (IVOP) 的一个可行解, 如果不存在 $\bar{x} \in X_E$ 使得 $f(E(\bar{x})) <_{LU} f(E(x^*))$ 或 $f(E(\bar{x})) <_{CW} f(E(x^*))$, 则称 $E(x^*)$ 是优化问题 (IVOP) 的 E -type-II 型最优解。

引理 2 设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的 E -不变凸集, 且 $E: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 既是单射又是满射, 若 $X_E = \{z \in X :$

$g_i(E(z)) \leq 0, i=1, \dots, m\}$, 则 $E(X_E) = X$ 。

证明 设 $x \in E(X_E)$, 根据假设, 存在 $z \in X_E$, 使得 $x = E(z)$ 。现假设 $x \notin X$, 则至少存在一个 $g_i(x) > 0$ 。因此, 有 $g_i(E(z)) > 0$, 与 $z \in X_E$ 矛盾, 则有 $E(X_E) \subset X$ 。另一方面, 设 $x \in X$ 。现假设 $x \notin E(X_E)$, 则根据假设有 $E^{-1}(x) \not\subset X_E$, 即至少存在一个 $g_i(E(E^{-1}(x))) > 0$ 。因此, 有 $g_i(x) > 0$, 与 $g_i(x) \leq 0 (i=1, \dots, m)$ 矛盾, 则有 $X \subset E(X_E)$ 。

综上, $E(X_E) = X$ 。

证毕

类似于文献[16]中引理 3.6 和引理 3.7, 可以得到以下两个结论。

引理 3 设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的 E -不变凸集, 且 $E: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 既是单射又是满射, 若 x^* 是优化问题 (IVOP) 的 type-I 型最优解 (或 type-II 型最优解), 则存在 $\bar{z} \in X_E$, 使得 $E(\bar{z}) = x^*$, $\bar{z}$ 是优化问题 (IVOP_E) 的 type-I 型最优解 (或 type-II 型最优解)。

引理 4 设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的 E -不变凸集, 且 $E: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 既是单射又是满射, 若 $\bar{z} \in X_E$ 是优化问题 (IVOP_E) 的 type-I 型最优解 (或 type-II 型最优解), 则 $E(\bar{z})$ 是优化问题 (IVOP) 的 E -type-I 型最优解 (或 E -type-II 型最优解)。

关于引理 3 和引理 4 的证明, 与文献[16]中引理 3.6 和引理 3.7 的证明类似。

定义 17 设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的 E -不变凸集且 $E: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 既是单射又是满射, 称在 $x^* \in X_E$ 处满足 E -KT 约束品性, 若对 $\forall d \in \mathbf{R}^n (d \neq 0)$, 使得 $\nabla g_i(E(x^*))^\top d \leq 0$ 对 $\forall i \in J(E(x^*)) := \{i \in J : g_i(E(x^*)) = 0\}$ 成立, 其中 $J = \{1, \dots, m\}$ 。

定理 3 (Farkas 引理)^[8] 给定矩阵 $A_{m \times n}$ 及 n 维向量 c , 则以下两个系统有且只有一个有解: 系统 1, $Ax \leq 0, c^\top x > 0$; 系统 2, $A^\top y = c, y \geq 0$ 。

下面给出优化问题 (IVOP) 的 E -KKT 最优性必要条件和充分性条件。

定理 4 (E -KKT 必要条件) 设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的 E -不变凸集, 其中 $E: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 既是单射又是满射, f 是定义在 A 上关于 η 的 LU- E -预不变凸 E -可微区间值函数, $g_i (i=1, \dots, m)$ 为定义在 A 上关于同一 η 的 E -预不变凸 E -可微实值函数。设 $x^* \in X_E$ 是优化问题 (IVOP_E) 的 type-I 型最优解。假设在 x^* 处满足 E -KT 约束品性, 且存在 $\bar{x}$ 使得 $g_i(\bar{x}) < 0$, 则存在 Lagrange 乘子 $0 < \lambda^L, \lambda^U \in \mathbf{R}, 0 \leq \mu_i \in \mathbf{R}, i=1, \dots, m$, 使得:

$$\lambda^L \nabla f^L(E(x^*)) + \lambda^U \nabla f^U(E(x^*)) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(E(x^*)) = 0, \quad (1)$$

$$\mu_i g_i(E(x^*)) = 0, i=1, \dots, m. \quad (2)$$

证明 现假设存在 $d \in \mathbf{R}^n, d \neq 0$, 使得以下各式成立:

$$\nabla f^L(E(x^*))^\top d < 0, \nabla f^U(E(x^*))^\top d < 0, \nabla g_i(E(x^*))^\top d \leq 0. \quad (3)$$

因为 $g_i(\bar{x}) < 0$, 且 E -KT 约束品性在 x^* 处满足, 则:

$$g_i(E(\bar{x})) - g_i(E(x^*)) < 0, \forall i \in J(E(x^*)),$$

由于 $g_i(E(\cdot)) (i=1, \dots, m)$ 为定义在 A 上关于 η 的 E -预不变凸 E -可微实值函数, 根据注 1, 则 $g_i(E(\cdot)) (i=1, \dots, m)$ 也为定义在 A 上关于同一 η 的 E -不变凸函数, 由定义 9 有:

$$\eta^\top(E(\bar{x}), E(x^*)) \nabla g_i(E(x^*)) < 0, \forall i \in J(E(x^*)), \quad (4)$$

由 (3), (4) 式, 可得 $(d + \delta \eta(E(\bar{x}), E(x^*)))^\top \nabla g_i(E(x^*)) < 0, \forall i \in J(E(x^*))$ 对 $\forall \delta > 0$ 成立。因此, 对足够小的实数 $\epsilon > 0$ 有:

$$g_i(E(x^*) + \epsilon[d + \delta \eta(E(\bar{x}), E(x^*))]) \leq g_i(E(x^*)) = 0, \forall i \in J(E(x^*)),$$

即 $E(x^*) + \epsilon[d + \delta \eta(E(\bar{x}), E(x^*))]$ 是优化问题 (IVOP) 的可行解。由于 $x^* \in X_E$ 是优化问题 (IVOP) 的 type-I 型最优解, 根据引理 4, 则有 $E(x^*)$ 是优化问题 (IVOP) 的 E -type-I 型最优解。因此优化问题 (IVOP_E) 的可行解 $E(x^*) + \epsilon[d + \delta \eta(E(\bar{x}), E(x^*))]$ 满足:

$$\begin{aligned} f^L(E(x^*) + \epsilon[d + \delta \eta(E(\bar{x}), E(x^*))]) &\geq f^L(E(x^*)), \\ f^U(E(x^*) + \epsilon[d + \delta \eta(E(\bar{x}), E(x^*))]) &\geq f^U(E(x^*)). \end{aligned}$$

即:

$$\begin{aligned} \nabla f^L(E(x^*))^\top (d + \delta \eta(E(\bar{x}), E(x^*))) &\geq 0, \\ \nabla f^U(E(x^*))^\top (d + \delta \eta(E(\bar{x}), E(x^*))) &\geq 0, \end{aligned}$$

对 $\forall \delta > 0$ 成立。当 $\delta \rightarrow 0^+$ 时, 则有 $\nabla f^L(E(x^*))^T d \geq 0, \nabla f^U(E(x^*))^T d \geq 0$, 与 (3) 式矛盾。因此, 根据 Farkas

引理, 有: $\lambda^L \nabla f^L(E(x^*)) + \lambda^U \nabla f^U(E(x^*)) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(E(x^*)) = 0$ 。

同时, 根据假设 E-KT 约束品性在 x^* 处满足, 则有 $g_i(E(x^*)) = 0, \forall i \in J(E(x^*))$ 。因此, (2) 式也成立。

证毕

定义 18 若 Lagrange 乘子 $0 < \lambda^L, \lambda^U \in \mathbf{R}, \mu = (\mu_1, \dots, \mu_m), 0 \leq \mu_i \in \mathbf{R}, i = 1, \dots, m$, 在 x^* 处满足 (1), (2) 式, 则称 $(x^*, \lambda^L, \lambda^U, \mu) \in X_E \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^m$ 是优化问题 (IVOP_E) 的 E-KKT 点。

定理 5 (E-KKT 充分条件) 设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的 E-不变凸集且 $E: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 既是单射又是满射, $(x^*, \lambda^L, \lambda^U, \mu) \in X_E \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^m$ 是优化问题 (IVOP_E) 的 E-KKT 点, 其中 $\lambda^L, \lambda^U, \mu$ 是 Lagrange 乘子, 且满足 $0 < \lambda^L, \lambda^U \in \mathbf{R}, \mu = (\mu_1, \dots, \mu_m), 0 \leq \mu_i \in \mathbf{R} (i = 1, \dots, m)$ 。若有以下条件成立:

- 1) 目标函数 f 在 $x^* \in X_E$ 处是关于 η 的 LU-E-预不变凸 E-可微区间值函数;
- 2) 不等式约束 g 在 $x^* \in X_E$ 处是关于同一个 η 的 E-预不变凸 E-可微实值函数;
- 3) $\nabla f^L(E(\cdot)) \geq (\leq) \mathbf{0}, \nabla f^U(E(\cdot)) \geq (\leq) \mathbf{0}$, 且对 $\forall x, y \in A$, 满足 $\eta(E(x), E(y)) \geq (\leq) E(x) - E(y)$ 。

则 x^* 是优化问题 (IVOP_E) 的 type-I 型最优解, $E(x^*)$ 是优化问题 (IVOP) 的 E-type-I 型最优解。

证明 假设 x^* 不是优化问题 (IVOP_E) 的 type-I 型最优解, 则存在 $\bar{x} \in X_E$, 有:

$$f(E(\bar{x})) <_{LU} f(E(x^*))。 \quad (5)$$

由假设 1)、2) 以及定理 1, 实值函数 $f^L(E(x)), f^U(E(x)), g(E(x))$ 在 $x^* \in X_E$ 处是关于同一个 η 的 LU-E-预不变凸 E-可微区间值函数, 再根据条件 3) 及定理 2, 则有:

$$\nabla f^L(E(x^*))(E(\bar{x}) - E(x^*)) \leq f^L(E(\bar{x})) - f^L(E(x^*)) < 0, \quad (6)$$

$$\nabla f^U(E(x^*))(E(\bar{x}) - E(x^*)) \leq f^U(E(\bar{x})) - f^U(E(x^*)) < 0。 \quad (7)$$

由于 $(x^*, \lambda^L, \lambda^U, \mu) \in X_E \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^m$ 是优化问题 (IVOP_E) 的 E-KKT 点, 结合 (6)、(7) 式, 则有:

$$[\lambda^L \nabla f^L(E(x^*)) + \lambda^U \nabla f^U(E(x^*))](E(\bar{x}) - E(x^*)) < 0。 \quad (8)$$

又因为 $\bar{x} \in X_E$, 根据约束指标集 $J(E(x^*))$ 的定义, 则有: $g_i(E(\bar{x})) - g_i(E(x^*)) \leq 0, \forall i \in J(E(x^*))$ 。根据定理 2, 则有: $\nabla g_i(E(x^*))(E(\bar{x}) - E(x^*)) \leq 0, \forall i \in J(E(x^*))$, 由于 $(x^*, \lambda^L, \lambda^U, \mu) \in X_E \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^m$ 是优化问题 (IVOP_E) 的 E-KKT 点, 则:

$$\sum_{i \in J(E(x^*))} \mu_i \nabla g_i(E(x^*))(E(\bar{x}) - E(x^*)) \leq 0。$$

当 $i \notin J(E(x^*))$ 时, 令 $\mu_i = 0$, 则:

$$\sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(E(x^*))(E(\bar{x}) - E(x^*)) \leq 0。 \quad (9)$$

由 (8) 和 (9) 式, 可得 $[\lambda^L \nabla f^L(E(x^*)) + \lambda^U \nabla f^U(E(x^*)) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(E(x^*))](E(\bar{x}) - E(x^*)) < 0$, 与 (1) 式矛盾, 因此假设不成立, 即 x^* 是优化问题 (IVOP_E) 的 type-I 型最优解。同时, 由引理 2 可得, $E(x^*) \in X$, 再根据引理 4, $E(x^*)$ 是优化问题 (IVOP) 的 E-type-I 型最优解。

证毕

下面举例说明定理 5。

例 3 考虑以下区间值目标规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(E(x)), \\ \text{s. t.} \quad & g_1(E(x)) \leq 0, \\ & g_2(E(x)) \leq 0, \\ & x \in A. \end{aligned}$$

其中 $A = [0, \frac{1}{2}]$, 对 $\forall x \in A, E(x) = x^2 + \frac{1}{4}, g_1(x) = x - 2, g_2(x) = -x, f(x) = [x^2 + x + 1, x^2 + 3]$, 对 $\forall x, y \in A$,

$\eta(x, y) = x - y$ 。通过计算, 可得: $f^L(E(x)) = x^4 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{21}{16}, f^U(E(x)) = x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{49}{16}, g_1(E(x)) = x^2 - \frac{7}{4}, g_2(E(x)) = -x^2 - \frac{1}{4}$ 。容易验证 A 是关于 η 的 E-不变凸集, f, g_1 和 g_2 分别是关于同一 η 的 LU-E-预不变凸区

区间函数和 E -不变凸实值函数,且满足定理 5 的条件 3)。根据定理 5 的假设条件,则有:

$$\lambda^L(4x_0^3+3x_0)+\lambda^U(4x_0^3+x_0)+2\mu_1x_0-2\mu_2x_0=0, \quad (16)$$

$$\mu_1\left(x_0^2-\frac{7}{4}\right)=0=\mu_2\left(-x_0^2-\frac{1}{4}\right), \quad (17)$$

当取 $x_0=0$ 时,由(17)式可得 $\mu_1=0=\mu_2$,则可取 $\lambda^L, \lambda^U>0$,使得(16)式成立。因此,根据定理 5, $x_0=0$ 是该区间值优化问题的 type-I 型最优解。

4 总结

在本文中,重点提出了一类新的广义凸函数——LU- E -预不变凸区间值函数。可以看到,本文提出的这一类 LU- E -预不变凸区间值函数比文献[15]中的预不变凸区间值函数更广泛。通过对不可微广义凸区间值优化问题建立 E -可微的概念,解决了不可微广义凸区间值优化问题求解最优解的问题,并建立了这类广义凸区间值优化问题的 E -KKT 条件的必要性和充分性概念。

未来还可以在本文的基础上,讨论 LU- E -预不变凸区间值优化问题的对偶性。此外,本文的约束函数是实值函数,那么在后续研究中,则可讨论约束函数为区间值函数的优化问题。

参考文献:

- [1] HANSON M A. On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1981, 80(2): 545-550.
- [2] BEN-ISRAEL A, MOND B. What is invexity[J]. Journal of Australian Mathematical Society, 1986, 28(1): 1-9.
- [3] WEIR T, MOND B. Pre-invex functions in multiple objective optimization [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1988, 136(1): 29-38.
- [4] WEIR T, JEYAKUMAR V. A class of nonconvex functions and mathematical programming[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 1988, 38(2): 177-189.
- [5] YOUNESS E A. E -convex sets, E -convex functions, and E -convex programming[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1999, 102(2): 439-450.
- [6] YANG X M. On E -convex sets, E -convex functions, and E -convex programming[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2001, 109(3): 699-704.
- [7] FULGA C, PREDA V. Nonlinear programming with E -preinvex and local E -preinvex functions[J]. European Journal of Operational Research, 2009, 192(3): 737-743.
- [8] 杨新民, 戎卫东. 广义凸性及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2015.
YANG X M, RONG W D. Generalized concavity and applications[M]. Beijing: Science Press, 2015.
- [9] 彭再云, 秦南南, 李科科. G - E -半预不变凸型多目标规划的 Wolfe 型对偶[J]. 应用数学学报, 2015, 38(6): 1103-1114.
PENG Z Y, QIN N N, LI K K. Wolf type duality of G - E -semi-preinvex type multiobjective programming problems[J]. Acta Mathematica Applicata Sinica, 2015, 38(6): 1103-1114.
- [10] 彭再云, 周选林, 赵勇. 强 G -预不变凸函数的性质及应用[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2012, 29(4): 12-17.
PENG Z Y, ZHOU X L, ZHAO Y. Characteristics and applications of strongly G -preinvex functions[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2012, 29(4): 12-17.
- [11] 李科科, 彭再云, 刘亚威, 等. 半预拟不变凸性的性质与应用注记[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2017, 34(1): 12-22.
LI K K, PENG Z Y, LIU Y W, et al. Notes on characterizations and applications of semi-prequasi-invexity[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2017, 34(1): 12-22.
- [12] 彭再云, 王子元, 周亚聪, 等. 一类 E - α -预不变拟凸性与数学规划[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2018, 35(3): 9-16.
PENG Z Y, WANG Z Y, ZHOU Y C, et al. A class of E - α -prequasiinvexity and mathematical programming[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2018, 35(3): 9-16.
- [13] PENG Z Y, LI K K, ZHOU J T. Semi-prequasi invex type multiobjective optimization and generalized fractional programming problems[J]. Journal of Nonlinear Science and Applications, 2016, 9(12): 6142-6152.
- [14] WU H C. The Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions in an optimization problem with interval-valued objective function [J]. European Journal of Operational Research, 2007, 176(1): 46-59.
- [15] ZHANG J K, LIU S Y, LI L F, et al. The KKT optimality conditions in a class of generalized convex optimization problems

- with an interval-valued objective function[J]. Optimization Letters, 2014, 8(2): 607-631.
- [16] ANTCZAK T, ABDULALEEM N. Optimality conditions for E -differentiable vector optimization problems with the multiple interval-valued objective function[J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2020, 16(6): 2971-2989.
- [17] WU H C. Wolfe duality for interval-valued optimization[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2008, 138(3): 497-509.
- [18] 蔡章华, 范晓东. E -凸区间值函数及其在优化问题中的应用[J]. 渤海大学学报(自然科学版), 2010, 31(3): 245-249.
CAI Z H, FAN X D. E -convex interval value function and its application in optimization problems[J]. Journal of Bohai University (Natural Science Edition), 2010, 31(3): 245-249.
- [19] SYAU Y R, LEE E S. Some properties of E -convex functions[J]. Applied Mathematics Letters, 2005, 18(9): 1074-1080.
- [20] ABDULALEEM N. E -optimality conditions for E -differentiable E -invex multiobjective programming problems[J]. WSEAS Transactions on Mathematics, 2019, 18: 14-27.
- [21] ISHIBUCHI H, TANAKA H. Multiobjective programming in optimization of the interval objective function[J]. European Journal of Operational Research, 1990, 48(2): 219-225.

Operations Research and Cybernetics

E -Preinvex Interval-Valued Function and Its Application in Mathematical Programming

DENG Chunyan, PENG Zaiyun, CHEN Xuejing, PENG Zhiying

(School of Mathematical and Statistics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [Purposes] Here it mainly studies the correlation properties of LU- E -preinvex interval-valued function under LU-order relations and its application in mathematical programming. [Methods] On the basis of order relations, the theory is deduced and verified with examples. [Findings] Firstly, the definition of the LU- E -preinvex interval-valued function and the LU- E -convex interval value function is given. And the existence of the LU- E -preinvex interval-valued function is verified by example. Secondly, the relationship between LU- E -preinvex interval-valued function and other interval valued functions is discussed. Finally, the LU- E -preinvex interval-valued optimization problem is studied and the concept of E -type- I optimal solution and the E -type- II optimal solution for generalized convex interval-valued optimization problems is given. And it proved that the E -KKT optimality conditions of necessity and sufficiency conditions. [Conclusions] Some recent research results on generalized convex functions are generalized, which enriches the research on generalized convex functions to some extent.

Keywords: LU- E -preinvex interval-valued function; E -invex; E -KKT optimality conditions

(责任编辑 黄 颖)