

二层多目标随机规划逼近有效解集的上半收敛性^{*}

周婉娜¹, 霍永亮²

(1. 西安翻译学院 工程技术学院, 西安 710105; 2. 重庆文理学院 数学与大数据学院, 重庆 402160)

摘要:【目的】为了研究通过逼近方法求解二层多目标随机规划有效解集与精确的有效解集之间的相互关系, 针对下层为单目标随机规划, 上层为多目标随机规划的一类二层随机规划逼近问题, 构建了二层多目标随机规划逼近有效解集上半收敛性的理论框架。【方法】将多目标二层随机规划分解成多个单目标二层随机规划, 利用每个单目标二层随机规划逼近最优解集的上半收敛性, 借助于多目标二层随机规划有效解集可以表示为所有单目标二层随机规划最优解集的交集的结构特点, 对二层多目标随机规划逼近问题的有效解集的收敛性结果进行了推断。【结果】建立了二层多目标随机规划逼近有效解集的上半收敛性。【结论】提供了利用逼近方法求解二层多目标随机规划有效解集可以近似替代精确的有效解集的理论依据。

关键词: 二层随机规划; 单目标随机规划; 多目标随机规划; 有效解集

中图分类号: O221.5

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2021)01-0039-07

1 研究背景

二层随机规划是具有递阶结构的系统化问题, 它的上、下层规划都有自己的目标函数和约束条件, 该规划主要用在工程设计、经济计划、金融均衡、多层决策等领域。二层随机规划问题包含两个单层随机规划问题, 即由下层随机规划提供的含有上层决策向量的最优解向量函数的上层随机规划问题, 以及以上层决策向量为参变量的下层随机规划问题。文献[1]讨论了将下层随机规划的最优解向量反馈到上层, 得到上层随机规划逼近问题的最优解集关于最小信息概率度量收敛的上半收敛性。文献[2]在下层随机规划目标函数和约束条件都为严格凸向量函数时, 给出二层随机规划逼近解集上半收敛的一个充分条件。文献[3]在假设下层随机规划有唯一最优解时, 将下层随机规划唯一最优解反馈到上层, 得到二层随机规划最优解集的上半收敛性。文献[4-5]讨论了在 Fourtlet-Mourier 度量上随机规划问题的稳定性。文献[6]讨论了将下层随机规划的最优值反馈到上层随机规划, 得到上层随机规划逼近最优解集序列的 Hausdorff 收敛性。文献[7]研究了随机规划可行集序列的收敛性条件, 给出随机规划逼近最优解集上半收敛的一个充分条件。文献[8]研究了多目标随机规划逼近问题弱有效解集关于最小信息概率度量收敛的上半收敛性条件。文献[9]对上层为凸的单目标, 下层为线性多目标的二层规划问题提出了一个精确罚函数法。本文受文献[8-9]的启发, 在下层为严格凸单目标随机规划问题以及上层为多目标随机规划问题时, 将多目标二层随机规划分解成多个单目标二层随机规划, 利用上层单目标随机规划逼近最优解集的上半收敛性, 借助于多目标规划有效解集可以表示为所有单目标随机规划最优解集的交集的结构特点, 证明了二层多目标随机规划逼近有效解集的上半收敛性。

本文研究了二层多目标随机规划逼近有效解集的上半收敛性。首先, 给出了下层单目标随机规划逼近问题的任意一个最优解序列连续收敛于原问题的唯一最优解; 其次, 讨论了上层多目标随机规划有效解集的上半收敛性。

考虑如下二层随机规划模型:

^{*} 收稿日期: 2020-03-24 修回日期: 2020-06-29 网络出版时间: 2021-03-12 14:23

资助项目: 陕西省教育厅项目(No. 20JK0641); 国家重点研发计划(No. 2020YFA0713400)

第一作者简介: 周婉娜, 女, 讲师, 研究方向为随机最优化, E-mail: zhouwan87@126.com; 通信作者: 霍永亮, 男, 教授, E-mail: yongliang-huo@126.com

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20210312.1120.002.html>

$$\min_{x \in X} \int_{\mathbf{R}^p} F(x, y, u) \mu_0(du). \quad (1)$$

其中: y 是

$$\begin{cases} \min_{y \in Y} \int_{\mathbf{R}^p} g(x, y, u) \mu_0(du) \\ \text{s. t. } \int_{\mathbf{R}^p} h_j(x, y, u) \mu_0(du) \leq 0, j = 1, 2, \dots, d \end{cases} \quad (2)$$

的解。

问题(1),(2)相应的逼近问题为:

$$\min_{x \in X} \int_{\mathbf{R}^p} F(x, y, u) \mu_n(du). \quad (3)$$

其中: y 是

$$\begin{cases} \min_{y \in Y} \int_{\mathbf{R}^p} g(x, y, u) \mu_n(du) \\ \text{s. t. } \int_{\mathbf{R}^p} h_j(x, y, u) \mu_n(du) \leq 0, j = 1, 2, \dots, d \end{cases} \quad (4)$$

的解, X 和 Y 分别是 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{R}^m$ 上的紧集, F 是定义在 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^p$ 上取值为 $\mathbf{R}^s$ 的向量值函数, 这里

$$F(x, y, u) = (f_1(x, y, u), f_2(x, y, u), \dots, f_s(x, y, u)).$$

对每个 $i \in I \triangleq \{1, 2, \dots, s\}$, $f_i(x, y, u)$ 是定义在 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^p$ 上取值为 $\mathbf{R}$ 的函数, g 和 $h_j (j \in J \triangleq \{1, 2, \dots, d\})$ 分别是定义在 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^p$ 上的函数, $\mu_0 = P \circ \xi^{-1}$, ξ 为定义在概率空间 (Ω, F, P) 上的 p 维随机向量, $\mu_n = P \circ \xi_n^{-1}$, ξ_n 为 ξ 的离散化逼近随机变量序列。

2 下层随机规划最优解的收敛性

当 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ 固定时, 下层随机规划问题的原问题变为:

$$\begin{cases} \min_{y \in Y} \int_{\mathbf{R}^p} g(x_0, y, u) \mu_0(du) \\ \text{s. t. } \int_{\mathbf{R}^p} h_j(x_0, y, u) \mu_0(du) \leq 0, j = 1, 2, \dots, d \end{cases} \quad (5)$$

当 $x_n \rightarrow x_0$ 时, 问题(5)相应的逼近问题变为:

$$\begin{cases} \min_{y \in Y} \int_{\mathbf{R}^p} g(x_n, y, u) \mu_n(du) \\ \text{s. t. } \int_{\mathbf{R}^p} h_j(x_n, y, u) \mu_n(du) \leq 0, j = 1, 2, \dots, d \end{cases} \quad (6)$$

问题(5),(6)的可行集分别为 $S_0(x_0)$ 和 $S_n(x_n)$, 即:

$$\begin{aligned} S_0(x_0) &= \left\{ y \in Y \subset \mathbf{R}^m : \int_{\mathbf{R}^p} h_j(x_0, y, u) \mu_0(du) \leq 0, j = 1, 2, \dots, d \right\}, \\ S_n(x_n) &= \left\{ y \in Y \subset \mathbf{R}^m : \int_{\mathbf{R}^p} h_j(x_n, y, u) \mu_n(du) \leq 0, j = 1, 2, \dots, d \right\}. \end{aligned}$$

下层随机规划问题(5),(6)又可转化为与它们等价的如下无约束规划问题:

$$\min_{y \in Y} \left[\int_{\mathbf{R}^p} g(x_0, y, u) \mu_0(du) + \delta_{S_0(x_0)}(y) \right], \quad (7)$$

$$\min_{y \in Y} \left[\int_{\mathbf{R}^p} g(x_n, y, u) \mu_n(du) + \delta_{S_n(x_n)}(y) \right]. \quad (8)$$

其中: $\delta_{S_0(x_0)}(y) = \begin{cases} 0, & y \in S_0(x_0) \\ +\infty, & y \notin S_0(x_0) \end{cases}$ 。

定义 1^[2] 设 $f(x)$ 是定义在凸集 $X \subset \mathbf{R}^n$ 上取值为 $\mathbf{R}$ 的函数, 对任意的 $x, y \in X, x \neq y$ 以及任意的 $\lambda \in [0, 1]$, 如果:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

则称 $f(x)$ 是严格凸函数。

定义 2^[7] 对任意给定 $x_0 \in X$, 当 $x_n \rightarrow x_0$ 时, 令:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(x_n) = \{y \in Y : y = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}, y_{n_k} \in S_{n_k}(x_{n_k}), \forall k \in \mathbf{N}\},$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} S_n(x_n) = \{y \in Y : y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, y_n \in S_n(x_n), \forall n \geq n_0\}.$$

如果 $\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(x_n) \subset S_0(x_0) \subset \liminf_{n \rightarrow \infty} S_n(x_n)$, 则称集合序列 $\{S_n(x_n)\}$ 收敛于 $S_0(x_0)$, 记为 $S_n(x_n) \xrightarrow{k} S_0(x_0)$ 。

定义 3^[3] 称可行集 $S_0(x_0)$ 是正则的, 即满足 $S_0(x_0) = \text{cl}S_0^o(x_0)$, 且 $S_0^o(x_0) \neq \emptyset$, 其中:

$$S_0^o(x_0) = \left\{y \in Y \subset \mathbf{R}^m : \int_{\mathbf{R}^p} h_j(x_0, y, u) \mu_0(du) < 0, j = 1, 2, \dots, d\right\}.$$

注 1 若 $S_0(x_0) \neq \text{cl}S_0^o(x_0)$, 导致 $S_0(x_0)$ 不正则。当 $x_n \rightarrow x_0$ 时, 则 $S_n(x_n) \not\xrightarrow{k} S_0(x_0)$, 从而导致了目标函数的逼近最优解集不一定上半收敛于初始规划的解。

例 1 令 $g_n(x, y) \equiv g(x, y) = (y-2)^2, h(x, y) = \begin{cases} y-1, & y \leq 1 \\ 0, & y > 1 \end{cases}, h_n(x, y) = \begin{cases} y-1+\frac{1}{n}, & y \leq 1 \\ \frac{1}{n}, & y > 1 \end{cases}$ 。

现在考察一般非线性规划逼近问题最优解的收敛性。当 $x_n \rightarrow x_0$ 时, 考虑初始规划问题

$$\begin{cases} \min_{y \in Y} g(x_0, y) \\ \text{s. t. } h(x_0, y) \leq 0 \end{cases}$$

和逼近问题

$$\begin{cases} \min_{y \in Y} g_n(x_n, y) \\ \text{s. t. } h_n(x_n, y) \leq 0 \end{cases},$$

则有:

$$S_0(x_0) = \{y \mid h(x_0, y) \leq 0\} = (-\infty, +\infty),$$

$$S_0^o(x_0) = \{y \mid h(x_0, y) < 0\} = (-\infty, 1),$$

$$S_n(x_n) = \{y \mid h_n(x_n, y) \leq 0\} = \left(-\infty, 1 - \frac{1}{n}\right].$$

显然, 有:

$$\text{cl}S_0^o(x_0) = (-\infty, 1] \neq (-\infty, +\infty) = S_0(x_0), S_n(x_n) \not\xrightarrow{k} S_0(x_0).$$

$$\arg \min_{y \in S_0^o(x_0)} g(x_0, y) = \{2\}, \arg \min_{y \in S_n^o(x_n)} g_n(x_n, y) = \left\{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right\}.$$

从而有: $\lim_{n \rightarrow \infty} \arg \min_{y \in S_n^o(x_n)} g_n(x_n, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right\} = \{1\} \neq \{2\} = \arg \min_{y \in S_0^o(x_0)} g(x_0, y)$ 。

注 2 若 $S_0^o(x_0) = \emptyset$ 时, 也可能导致 $S_0(x_0)$ 不正则。

例 2 在定义 3 中, 设随机变量 u 服从 $[0, 1]$ 均匀分布, 令:

$$h_j(x, y, u) \equiv h(x, y, u) \triangleq \begin{cases} x y \cos(xu), & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], y \in [-1, 0] \\ 0, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], y \in [0, 1] \end{cases},$$

$$\text{则 } \int_{\mathbf{R}^1} h_j(x, y, u) \mu_0(du) = \int_0^1 h_j(x, y, u) du = \begin{cases} y \sin x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], y \in [-1, 0] \\ 0, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], y \in [0, 1] \end{cases}.$$

当 $x_0 = 0$ 时, 则 $S_0^o(x_0) = \emptyset$, 从而有 $\text{cl}S_0^o(x_0) = \emptyset \neq [-1, 1] = S_0(x_0)$ 。由注 1 可知, $S_0(x_0)$ 不正则。

引理 1 设 $g(x, y, u)$ 在 $X \times Y \times \mathbf{R}^p$ 上连续且有界, $h_j(x, y, u) (j \in J)$ 在 $X \times Y \times \mathbf{R}^p$ 上下半连续且有界, 且对每个固定的 y , 关于 (x, u) 上半连续, 对每个固定的 x 与 u , $g(x, y, u), h_j(x, y, u)$ 关于 y 是严格凸函数, $S_0^o(x_0) \neq \emptyset$,

且 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$, 若 $x_n \rightarrow x_0$, 则问题(8)的任意一个最优解 $y_n(x_n)$ 连续收敛于问题(7)的唯一最优解 $y_0(x_0)$ 。

证明 由文献[2]定理 1 可知, 只要证明可行集 $S_0(x_0)$ 正则即可。下面证明 $S_0^0(x_0)$ 为凸集。

由 $S_0^0(x_0) \neq \emptyset$, 注意到对每个固定的 x 与 u , $h_j(x, y, u)$ 关于 y 是严格凸函数, 则对任意的 $y_1, y_2 \in S_0^0(x_0)$, 且 $y_1 \neq y_2$, 及任意的 $\lambda \in [0, 1], j \in J$, 均有:

$$h_j(x_0, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2, u) < \lambda h_j(x_0, y_1, u) + (1-\lambda)h_j(x_0, y_2, u)。$$

由于 $h_j(x, y, u)$ 在 $X \times Y \times \mathbf{R}^p$ 上有界, 从而由期望的性质可知:

$$\int_{\mathbf{R}^p} h_j(x_0, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2, u) \mu_0(du) < \lambda \int_{\mathbf{R}^p} h_j(x_0, y_1, u) \mu_0(du) + (1-\lambda) \int_{\mathbf{R}^p} h_j(x_0, y_2, u) \mu_0(du)。$$

注意到 $y_1, y_2 \in S_0^0(x_0)$, 则:

$$\lambda \int_{\mathbf{R}^p} h_j(x_0, y_1, u) \mu_0(du) + (1-\lambda) \int_{\mathbf{R}^p} h_j(x_0, y_2, u) \mu_0(du) < 0。$$

故 $\int_{\mathbf{R}^p} h_j(x_0, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2, u) \mu_0(du) < 0$, 即 $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in S_0^0(x_0)$, 故 $S_0^0(x_0)$ 为凸集。

由凸集的性质可知, $\text{cl}S_0^0(x_0) = S_0(x_0)$, 从而由定义 3 可知, 可行集 $S_0(x_0)$ 为正则的。

证毕

3 上层多目标随机规划有效解集的上半收敛性

设 $y_0(x_0)$ 是下层随机规划原问题的最优解, $y_n(x_n)$ 是下层随机规划逼近问题最优解集中的任意一个最优解, 则上层随机规划的原问题改写为:

$$\min_{x \in X} \int_{\mathbf{R}^p} F(x, y_0(x), u) \mu_0(du), \quad (9)$$

相应的逼近问题改写为:

$$\min_{x \in X} \int_{\mathbf{R}^p} F(x, y_n(x), u) \mu_n(du)。 \quad (10)$$

问题(9), (10)的有效解集分别记为 M_0 和 M_n 。

对每个固定的 $i \in I = \{1, 2, \dots, s\}$, 设单目标随机规划:

$$\min_{x \in X} \int_{\mathbf{R}^p} f_i(x, y_0(x), u) \mu_0(du) \quad (11)$$

以及

$$\min_{x \in X} \int_{\mathbf{R}^p} f_i(x, y_n(x), u) \mu_n(du)。 \quad (12)$$

问题(11), (12)的最优解集分别记为 M_0^i 和 M_n^i 。

定义 4^[10] 设 $H(x)$ 是定义在凸集 $X \subset \mathbf{R}^n$ 上取值为 $\mathbf{R}^s$ 的向量值函数, 对于任意两个向量:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_s)^T, y = (y_1, y_2, \dots, y_s)^T,$$

定义如下的偏序关系: $x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i$, 对一切的 $i \in I$, 但至少存在某一个 $j_0 \in I$, 使得 $x_{j_0} < y_{j_0}$; $x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i$, 对一切的 $i \in I$ 。

对给定的 $x_0 \in X$, 如果不存在 $x \in X$, 使得 $H(x) \leq H(x_0)$ 成立, 则称 x_0 是 $H(x)$ 的有效解, 有效解又叫 Pareto 最优解, 最优解的全体称为最优解集; 如果对任意的 $x \in X$, 都有 $H(x_0) \leq H(x)$, 则称 x_0 是 $H(x)$ 的绝对最优解, 绝对最优解的全体称为绝对最优解集。

引理 2 对每个 $i \in I$, $f_i(x, y, u), g(x, y, u)$ 在 $X \times Y \times \mathbf{R}^p$ 上连续有界, 对每个 $j \in J$, $h_j(x, y, u)$ 在 $X \times Y \times \mathbf{R}^p$ 上下半连续且有界, 且对每个固定的 y , 关于 (x, u) 上半连续, 且对任意固定的 x 与 u , $h_j(x, y, u), g(x, y, u)$ 关于 y 是严格凸函数, X 是紧凸集, 问题(9)的绝对最优解集非空, 则有效解集 M_0 可以表示为 $M_0 = \bigcap_{i=1}^s M_0^i$ 。同理, 问题

(10)的绝对最优解集非空, 则有效解集 M_n 可以表示为 $M_n = \bigcap_{i=1}^s M_n^i$ 。

证明 由文献[10]中的定理 9 及附注易得。

集合 $A \subset \mathbf{R}^n$ 到集合 $B \subset \mathbf{R}^n$ 的上半距离定义为 $e(A, B) = \sup_{y \in A} d(y, B)$, 其中:

$$d(y, B) = \begin{cases} \inf\{\|y-x\|, x \in B\}, & \text{当 } B \neq \emptyset \\ +\infty, & \text{当 } B = \emptyset \end{cases}.$$

定义 5^[11] 对每个 $i \in I$, 称集合序列 M_n^i 上半收敛于 M_0^i 是指 $\lim_{n \rightarrow \infty} e(M_n^i, M_0^i) = 0$.

定理 1 若 $x_n \rightarrow x_0, f_i(x, y, u), g(x, y, u)$ 在 $X \times Y \times \mathbf{R}^p$ 上连续有界, $h_j(x, y, u) (j \in J)$ 在 $X \times Y \times \mathbf{R}^p$ 上下半连续且有界, 且对每个固定的 y , 关于 (x, u) 上半连续, 对每个固定的 x 与 $u, g(x, y, u), h_j(x, y, u)$ 关于 y 是严格凸函数, $S_0^o(x_0) \neq \emptyset$, 且 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$, 则对每个固定的 $i \in I$, 有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^p} f_i(x_n, y_n(x_n), u) \mu_n(du) = \int_{\mathbf{R}^p} f_i(x_0, y_0(x_0), u) \mu_0(du).$$

证明 由引理 1 可知, 当 $x_n \rightarrow x_0$ 时, $y_n(x_n)$ 连续收敛于 $y_0(x_0)$, 对每个固定的 $i \in I$, 由于 $f_i(x, y, u)$ 在 $X \times Y \times \mathbf{R}^p$ 上连续有界, 由文献[11]的定理 5.1, 对每个固定的 $i \in I$, 有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^p} f_i(x_n, y_n(x_n), u) \mu_n(du) = \int_{\mathbf{R}^p} f_i(x_0, y_0(x_0), u) \mu_0(du). \quad \text{证毕}$$

定义 6^[12] 设函数序列 $\{f_n(x): \mathbf{R}^m \rightarrow \bar{\mathbf{R}}, n \in \mathbf{N}\}$ 和函数 $f_0(x): \mathbf{R}^m \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$, 如果:

- 1) 对任意的 $x_0 \in \mathbf{R}^m, x_n \rightarrow x_0$, 有 $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \geq f_0(x_0)$;
- 2) 对任意 $x_0 \in \mathbf{R}^m$, 存在某个 $x_n \rightarrow x_0$, 使得 $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \leq f_0(x_0)$.

则称函数序列 $f_n(x)$ 上图收敛于 $f_0(x)$, 记为 $f_n(x) \xrightarrow{\text{epi}} f_0(x)$.

引理 3 对每个 $i \in I, f_i(x, y, u), g(x, y, u)$ 在 $X \times Y \times \mathbf{R}^p$ 上连续有界, 对每个 $j \in J, h_j(x, y, u)$ 在 $X \times Y \times \mathbf{R}^p$ 上下半连续且有界, 且对每个固定的 y , 关于 (x, u) 上半连续, 对每个固定的 x 与 $u, g(x, y, u), h_j(x, y, u)$ 关于 y 均为严格凸函数, 对每个 $x \in X, S_0^o(x) \neq \emptyset$, 且满足 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$, 则对每个固定的 $i \in I$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} e(M_n^i, M_0^i) = 0$.

证明 对每个固定的 $i \in I$, 令:

$$T_0^i(x) = \int_{\mathbf{R}^p} f_i(x, y_0(x), u) \mu_0(du), T_n^i(x) = \int_{\mathbf{R}^p} f_i(x, y_n(x), u) \mu_n(du),$$

$$K_0^i(x) = \int_{\mathbf{R}^p} f_i(x, y_0(x), u) \mu_0(du) + \delta_X(x), K_n^i(x) = \int_{\mathbf{R}^p} f_i(x, y_n(x), u) \mu_n(du) + \delta_X(x).$$

对每个固定的 $i \in I$ 和任意的 $x_0 \in X \subset \mathbf{R}^n$, 当 $x_n \rightarrow x_0$ 时, 由定理 1 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n^i(x_n) = T_0^i(x_0)$, 注意到 X 的紧致性,

显然 $X \xrightarrow{k} X$, 由文献[13]的引理 5 可知, 对每个固定的 $i \in I$, 有 $K_n^i(x) \xrightarrow{\text{epi}} K_0^i(x)$. 其余部分证明类似于文献[7]中定理 5 的证明, 由此可知, 对每个固定的 $i \in I$, 有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(M_n^i, M_0^i) = 0. \quad \text{证毕}$$

定理 2 对每个 $i \in I, f_i(x, y, u), g(x, y, u)$ 在 $X \times Y \times \mathbf{R}^p$ 上连续有界, 对每个 $j \in J, h_j(x, y, u)$ 在 $X \times Y \times \mathbf{R}^p$ 上下半连续且有界, 且对每个固定的 y , 关于 (x, u) 上半连续, 对每个固定的 x 与 $u, g(x, y, u), h_j(x, y, u)$ 关于 y 均为严格凸函数, 对每个 $x \in X, S_0^o(x) \neq \emptyset$, 且满足: 1) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$; 2) $\bigcap_{i=1}^s M_0^i \neq \emptyset$. 则问题(10)的有效解集序列 M_n 上半收敛于问题(9)的有效解集 M_0 .

证明 由定理 2 的条件知 $\bigcap_{i=1}^s M_0^i \neq \emptyset$, 为了证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} e(\bigcap_{i=1}^s M_n^i, \bigcap_{i=1}^s M_0^i) = 0$, 即需证明, $\forall \epsilon > 0, \exists N_0$, 当 $n \geq N_0$ 时, 有 $e(\bigcap_{i=1}^s M_n^i, \bigcap_{i=1}^s M_0^i) < \epsilon$, 也即需证明 $\bigcap_{i=1}^s M_n^i \subset \bigcap_{i=1}^s M_0^i + B_\epsilon(0)$, 其中: $B_\epsilon(0) = \{y \in \mathbf{R}^m \mid \|y-0\| < \epsilon\}$.

现证对任意包含 $\bigcap_{i=1}^s M_0^i$ 的开集 V , 存在 n_0 , 当 $n \geq n_0$ 时, 有 $\bigcap_{i=1}^s M_n^i \subset V$. 假设不成立, 即存在 n_k , 使得 $y_{n_k} \in \bigcap_{i=1}^s M_{n_k}^i$, 但 $y_{n_k} \notin V$. 而由于 $\bigcap_{i=1}^s M_{n_k}^i \subset Y$ 及 Y 的紧致性, 则 $\{y_{n_k}\}$ 必存在聚点 y_0 , 而 V 是开集, 则 $y_0 \notin V$.

另一方面, 由引理 3 知, 对每个固定的 $i \in I$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} e(M_n^i, M_0^i) = 0$, 注意到 $y_{n_k} \in \bigcap_{i=1}^s M_{n_k}^i \subset M_{n_k}^i$, 有 $y_0 \in M_0^i$, 则 $y_0 \in \bigcap_{i=1}^s M_0^i \subset V$. 故 $y_0 \notin V$ 与 $y_0 \in \bigcap_{i=1}^s M_0^i \subset V$ 矛盾, 特别取 $V = \bigcap_{i=1}^s M_0^i + B_\epsilon(0)$, 从而有 $\lim_{n \rightarrow \infty} e(\bigcap_{i=1}^s M_n^i, \bigcap_{i=1}^s M_0^i) = 0$, 则问题(10)的有效解集序列 M_n 上半收敛于问题(9)的有效解集 M_0 . 证毕

4 结束语

本文针对下层为单目标随机规划,上层为多目标随机规划的一类二层随机规划逼近问题,构建了求解二层多目标随机规划逼近有效解集上半收敛的理论框架。首先,将多目标二层随机规划分解成多个单目标二层随机规划,然后针对每个单目标二层随机规划,给出了相应的下层单目标随机规划逼近问题的任意一个最优解序列连续收敛于原问题的唯一最优解,并将下层随机规划的唯一最优解反馈到上层,获得每个上层单目标随机规划目标函数的连续收敛性,依据上图收敛理论给出了每个上层单目标随机规划逼近最优解集序列的上半收敛性。其次,通过每个上层单目标随机规划逼近最优解集的上半收敛性,利用上层多目标随机规划有效解集可以表示为所有上层单目标随机规划最优解集的交集的结构特性,证明了所有的上层单目标随机规划最优解集的交集也是上半收敛的,从而得到上层多目标随机规划有效解集的上半收敛性。该结论表明了利用逼近方法求解二层多目标随机规划有效解集可以近似替代精确的有效解集。此外,本文还举例说明了正则性概念在随机规划逼近问题最优解集上半收敛性中所起的重要作用。

参考文献:

- [1] 霍永亮. 二层随机规划逼近问题最优解集的上半收敛性[J]. 系统科学与数学, 2014, 34(6): 674-681.
HUO Y L. The upper semi-convergence of optimal solution sets of approximation problems for bi-level stochastic programming [J]. Journal of Systems Sciences and Mathematical Science, 2014, 34(6): 674-681.
- [2] 周婉娜, 霍永亮. 二层随机规划逼近解集上半收敛性的一个充分条件[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2015, 40(9): 17-22.
ZHOU W N, HUO Y L. On a sufficient condition of upper semi-convergence of approximation solution set for bi-level stochastic programming[J]. Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition), 2015, 40(9): 17-22.
- [3] 周婉娜, 霍永亮. 二层随机规划逼近最优解集的上半收敛性[J]. 纯粹数学与应用数学, 2014, 30(2): 207-215.
ZHOU W N, HUO Y L. The upper semi-convergence of optimal solution set of approximation for bi-level stochastic programming[J]. Pure and Applied Mathematics, 2014, 30(2): 207-215.
- [4] ROMISH W, SCHULTZ R. Stability analysis for stochastic programs[J]. Annals of Operations Research, 1991, 30(1): 241-266.
- [5] DUPATCOVA J, GROWE-KUSKA N, ROMISH W. Scenario reduction in stochastic programming: an approach using probability metric[J]. Mathematical Programming, 2003, 95(3): 493-511.
- [6] 周婉娜, 霍永亮. 二层随机规划逼近 ϵ -最优解集的 Hausdorff 收敛性[J]. 湖南师范大学自然科学学报, 2016, 39(3): 80-83.
ZHOU W N, HUO Y L. The Hausdorff convergence of the ϵ -optimal solution set of approximation for bi-level stochastic programming[J]. Journal of Natural Science of Hunan Normal University, 2016, 39(3): 80-83.
- [7] 霍永亮, 刘三阳. 随机规划逼近最优解集的上半收敛性[J]. 西安电子科技大学学报, 2005, 32(6): 953-957.
HUO Y L, LIU S Y. The upper semi-convergence of optimal solution set of approximation for stochastic programming[J]. Journal of Xidian University, 2005, 32(6): 953-957.
- [8] 霍永亮, 周道清. 多目标随机规划逼近问题弱有效解集的上半收敛性[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2013, 38(1): 1-6.
HUO Y L, ZHOU D Q. The upper semi-convergence of weak effective solution sets of approximation problems for multi-objective stochastic programming[J]. Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition), 2013, 38(1): 1-6.
- [9] 杨亚红, 刘三阳. 二层多目标规划的一个精确罚函数法[J]. 应用数学, 2001, 14(1): 76-80.
YANG Y H, LIU S Y. An exact penalty function approach for linear bilevel multiobjective[J]. Mathematica Applicata, 2001, 14(1): 76-80.
- [10] 林铨云, 董加礼. 多目标优化的方法与理论[M]. 吉林: 吉林教育出版社, 1992.
LIN C Y, DONG J L. The method and theory of multi-objective optimization[M]. Jilin: Jilin Education Publishing House, 1992.
- [11] 霍永亮. 随机规划稳定性理论[M]. 成都: 西南交通大学出版社, 2010.
HUO Y L. Stability theory of stochastic programming[M]. Chengdu: Southwest Jiaotong University Press, 2010.
- [12] TYRREL R R, ROGER J-B W. Variational analysis[M]. Berlin: Springer, 1997.
- [13] 霍永亮, 刘三阳. 概率约束规划逼近最优解集的稳定性和最优值的连续性[J]. 系统科学与数学, 2007, 27(6): 908-914.
HUO Y L, LIU S Y. Stability of approximate optimal solutions sets and continuity of optimal values of probabilistic constrained programs[J]. Journal of Systems Sciences and Mathematical Science, 2007, 27(6): 908-914.

Operations Research and Cybernetics

The Upper Semi-Convergence of the Sets of Approximation Efficient Solutions for Bi-Level Multi-Objective Stochastic Programming

ZHOU Wanna¹, HUO Yongliang²

(1. College of Engineering and Technology, Xi'an FanYi University, Xi'an 710105;

2. College of Mathematics and Big Data, Chongqing University of Arts and Sciences, Chongqing 402160, China)

Abstract: [Purposes] Our goal is to study the relationship between the effective solution sets and the exact effective solution sets of bi-level multi-objective stochastic programming by the approximate method, and to construct a theoretical framework of the upper semi-convergence of the approximation efficient solution sets for bi-level multi-objective stochastic programming, which is the lower level single objective stochastic programming and the upper level multi-objective stochastic programming. [Methods] The multi-objective bi-level stochastic programming is first decomposed into multiple single objective bi-level stochastic programming, and then the upper semi-convergence of approximate the optimal solution sets of each single objective bi-level stochastic programming is used to solve the bi-level multi-objective stochastic programming. With the help of the structural characteristics, the effective solution sets of multi-objective bi-level stochastic programming can be expressed to the intersection of optimal solution sets for all single objective bi-level stochastic programming, and then the convergence result of the effective solution sets for the approximation problem of bi-level multi-objective stochastic programming is deduced. [Findings] The upper semi-convergence of approximation efficient solution sets of bi-level multi-objective stochastic programming is established. [Conclusions] This conclusion provides the theoretical basis that approximation effective solution sets can approximately replace the exact effective solution sets in bi-level multi-objective stochastic programming.

Keywords: bi-level stochastic programming; single objective stochastic programming; multi-objective stochastic programming; effective solution sets

(责任编辑 黄 颖)