运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20210102

T-凸空间中广义 H_0-条件下的 KKM 定理*

王常春[1]，陈治友[2]，夏顺友[3]，张转周[1]，许光俊[1]
(1. 遵义师范学院 数学学院，遵义 贵州 563006；2. 贵阳学院 数学与信息科学学院，贵阳 550005；
3. 贵州师范学院 数学与大数据学院，贵阳 550018)

摘要:【目的】为了在不具有线性结构的 T-凸空间中得到弱于 H_0-条件的 GH_0-条件下的 KKM 引理。【方法】利用非线性分析中关于度量以及从属于紧集的有限覆盖的单位分解构造辅助函数，并基于 GH_0-条件的特征，构造复合函数。【结果】在弱于 H_0-条件的 GH_0-条件下建立了 T-凸度量空间和 T-凸拓扑空间中的 KKM 引理。【结论】在空间结构和凸结构条件较弱的情形下推广了 KKM 引理。

关键词:T-凸空间;H_0-条件;GH_0-条件;KKM 定理
中图分类号:O177.91　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2021)01-0055-05

非线性分析中的许多问题都可以通过一些子集族的非空交来解决，而集合族的非空交性质是 Knaster、Kuratowski 及 Mazurkiewicz 三人[1]于 1929 年提出的有限维空间中的著名结论。在 1961 年，文献[2]对该结论进行了重要推广，将它推广到无限维情形。在 1992 年，文献[3]作了进一步推广，得到一些新的结论。前后许多专家学者在拓扑线性空间中进行了许多重要推广和应用研究。在 1990 年，文献[4]在凸空间上作了重要推广。文献[5-7]在可缩集代替线性凸集的 C-空间或 H-空间情形作了重要推广。另外，在 G-凸空间、Hadmard 流等不具有线性凸的空间情形也作了许多重要推广[6-9]。

空间的凸性在 KKM 理论中起着十分重要的作用。自 1987 年，文献[5]以可缩集代替线性凸集得到 KKM 引理以及非线性分析一些相关结果。之后，利用公理化方法建立抽象凸空间理论以及非线性分析相应结果在抽象凸空间上的推广成为一个热门研究领域，产生了很多重要成果[4-9]。在 1956 年，文献[10]引入度量空间中的超凸概念，之后，文献[11]在超凸度量空间中建立了 KKM 定理的推广。

文献[12]利用延拓性质定义拓扑空间中的抽象凸结构，并讨论了该凸结构的一些性质特征。之后在 T-凸空间中对非线性分析中的一些重要结论作了推广，并研究了诸如在非合作博弈平衡存在性等问题的应用[13-19]。

本文在上述工作的基础上，借鉴文献[8]的思想方法，首先在 T-凸空间框架下，将它满足的 H_0-条件推广或弱化为广义 H_0-条件，即 GH_0-条件；然后在 GH_0-条件下，运用经典的集值分析方法，在不具有线性结构的 T-凸空间中，证明了几种不同形式的 KKM 定理，从而将这些 KKM 定理推广到 T-凸空间。

1 预备知识

本部分主要介绍一些基本定义。

定义 1[12]　设 X,Y 为两个拓扑空间，集合 A 为 X 的任意子集，已知映射 $f:A\to Y$ 连续，若存在一个连续映射 $f^*:X\to Y$，使得 $f^*(x)=f(x)$，$\forall x\in A$，则称映射 f 可以从子集 A 延拓(或扩张)到空间 X。

* **收稿日期**:2019-11-21　**修回日期**:2020-08-26　**网络出版时间**:2021-03-10 16:06
资助项目:国家自然科学基金(No. 71961003;No. 11661084;No:11761023);贵州省科技厅科技合作计划(黔科合 LH 字 No.[2016]7031);贵州省科技厅基础研究计划(黔科合基础 No.[2017]1201);贵州师范学院博士基金(No. 2018BS005)
第一作者简介:王常春，男，副教授，研究方向为非线性分析与对策论，E-mail:wangchangchun22006@163.com;**通信作者**:陈治友，男，教授，E-mail:czy_gz_cn@126.com
网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20210310.1118.002.html

定义 2[12] 设 X,Y 为两个拓扑空间,若对 X 的任意子集 A 和任意的连续映射 $f:A\to Y$,f 可以从集合 A 延拓到空间 X,则称子集 A 关于空间 X 具有延拓性质。

定义 3[12] 设 X 为一个拓扑空间,$\{T_A\}$为 X 的一族非空子集,而且该子集族中任意元关于 X 具有延拓性质,对 X 中任意有限子集 A,B,对应的 T_A,T_B 满足,当 $A\subset B$ 时,$T_A\subset T_B$,则称二元对$(X,\{T_A\})$为一个 T-凸空间。集 $D\subset X$ 称为一个 T-凸集,如果对 D 的任意有限子集 A,都有 $T_A\subset D$。

设$(X,\{T_A\})$是一个 T-凸空间,子集 $A\subset X$ 的 T-凸包定义为:

$$\mathrm{co}^{\mathrm{T}}A=\bigcap\{D\subset X:A\subset D \text{ 且 } D \text{ 是 } T\text{-凸集}\}。$$

注 1 T-凸包,表示包含集合 A 的所有 X 中的 T-凸集合的交。若 $A\subset X$ 为一个 T-凸集当且仅当 $\mathrm{co}^{\mathrm{T}}A=A$,记 $T=\{A\subset X:\mathrm{co}^{\mathrm{T}}A=A\}$。

定义 4[12] 称 T-凸空间$(X,\{T_A\})$满足 H_0-条件,如果有下面性质:

对任意有限集$\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}\subset X$,都存在连续映射 $f:\Delta_n\to\mathrm{co}^{\mathrm{T}}\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$,使得:

$$f(\Delta_J)\subset\mathrm{co}^{\mathrm{T}}\{x_j:j\in J\},\forall\varnothing\neq J\subset N,$$

其中:$N=\{0,1,2,\cdots,n\}$,$\Delta_n=e^0e^1\cdots e^n$ 是 n 维标准单纯形,$e^0,e^1,\cdots,e^n$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的标准正交基。

2 主要结果

首先考察一下 H_0-条件中连续映射 f 所具有的本质特征。

对 T-凸空间$(X,\{T_A\})$中的每一个有限集$\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}\subset X$,都存在一个连续映射 $f:\Delta_n\to\mathrm{co}^{\mathrm{T}}\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}\subset X$。另一方面,对任意连续映射 $g:X\to\Delta_n$(或称单纯形映射)易知,复合映射 $g\circ f:\Delta_n\to\Delta_n$ 为一连续映射。因此,根据 Brouwer 不动点定理知,映射 $g\circ f:\Delta_n\to\Delta_n$ 在 Δ_n 上一定存在不动点,即存在 $e\in\Delta_n$,使得 $e=g\circ f(e)$。此时连续映射 f 所蕴含的这一本质特征称为连续映射 f 关于单纯形 Δ_n 和单纯形映射 $g:X\to\Delta_n$ 具有不动点性质。

因此,H_0-条件中连续映射 f 具有以下两个本质特征:

1) 连续映射 $f:\Delta_n\to\mathrm{co}^{\mathrm{T}}\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$对于 Δ_n 和单纯形映射 $g:X\to\Delta_n$ 具有不动点性质;

2) $f(\Delta_J)\subset\mathrm{co}^{\mathrm{T}}\{x_j:j\in J\},\forall\varnothing\neq J\subset N$。

那么,能否将 H_0-条件中连续映射 f 推广为集值映射 h,从而使它具备上述本质特征呢? 即就是在 H_0-条件中是否存在集值映射 h,使得 h 满足下面的两个条件:

1) 集值映射 $h:\Delta_n\to 2^X$ 对于 Δ_n 和单纯形映射 $g:X\to\Delta_n$ 具有不动点性质,即对每一个单纯形映射 $g:X\to\Delta_n$,存在 $e_0\in\Delta_n$,使得 $e_0\in g\circ h(e_0)$;

2) $h(\Delta_J)\subset\mathrm{co}^{\mathrm{T}}\{x_j:j\in J\},\forall\varnothing\neq J\subset N$。

事实上,这样的存在性是可能的。见下面的例子。

例 1 设$(X,\{T_A\})$为一 T-凸空间,有限集$\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}\subset X$,而 $\Delta_n=e^0e^1\cdots e^n$ 是 n 维标准单纯形,令 $I(e)=\left\{i:e=\sum_{i=0}^{n}t_ie^i,t_i\geqslant\frac{1}{n}\right\}$。由 $h(e)=\mathrm{co}^{\mathrm{T}}\{x_i:i\in I(e)\},\forall e\in\Delta_n$ 定义集值映射 $h:\Delta_n\to 2^X$。由文献[9]知,集值映射 $h:\Delta_n\to 2^X$ 满足上述条件 1)和 2),除此之外,它还是上半连续的(事实上,注意到 $h(e^i)=\{x_i\},\forall i\in N$ 以及线性凸和 T-凸组合的连续性,利用集值映射极限式定义可证)。

综上所述,可将 H_0-条件中的单值连续映射推广或者弱化为集值映射而定义一种广义 H_0-条件,即 GH_0-条件。

定义 5 称 T-凸空间$(X,\{T_A\})$满足 GH_0-条件,若 T-凸空间$(X,\{T_A\})$上的 T-凸结构$\{T_A\}$有下面性质:对每个有限集$\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}\subset X$,存在集值映射 $h:\Delta_n\to 2^X$,使得:

$$h(\Delta_J)\subset\mathrm{co}^{\mathrm{T}}\{x_j:j\in J\},\forall\varnothing\neq J\subset N。$$

并且集值映射 $h:\Delta_n\to 2^X$ 对于 Δ_n 和单纯形映射 $g:X\to\Delta_n$ 具有不动点性质,即对每一个单纯形映射 $g:X\to\Delta_n$,存

在 $e_0\in\Delta_n$，使得 $e_0\in g\circ h(e_0)$。

注 2　如果 T-凸空间$(X,\{T_A\})$满足 H_0-条件，则它一定满足 GH_0-条件。反之则未必。

定理 1(T-凸度量空间中的 KKM 定理)　设$(X,d,\{T_A\})$为一个满足 GH_0-条件的 T-凸度量空间，而 M_0，$M_1,\cdots,M_n$ 为 X 中的 $n+1$ 个闭集，如果对 X 的任意一个有限子集$\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$，都有包含关系式$\mathrm{co}^{\mathrm{T}}\{x_j:j\in J\}\subset\bigcup\limits_{j\in J}M_j$，$\forall\varnothing\neq J\subset N$ 成立，则$\bigcap\limits_{i=0}^{n}M_i\neq\varnothing$。

证明　假设结论不成立，则 $\bigcap\limits_{i=0}^{n}M_i=\varnothing$。定义泛函 $\mu_i:X\to[0,1]$如下：

$$\mu_i(x)=\frac{d(x,M_i)}{\sum\limits_{i=0}^{n}d(x,M_i)},i=0,1,\cdots,n,\ \forall x\in X,$$

则对每一个 $x\in X$，$\mu_i(x)\geqslant 0$，$i=0,1,\cdots,n$，且满足 $\sum\limits_{i=0}^{n}\mu_i(x)=1$。

再定义单纯形映射 $g:X\to\Delta_n$ 为：$g(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\mu_i(x)e^i$，$\forall x\in X$。由于 T-凸度量空间$(X,d,\{T_A\})$满足 GH_0-条件，因此对于满足该定理条件的有限集$\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}\subset X$，存在集值映射 $h:\Delta_n\to 2^X$，使得 $h(\Delta_J)\subset\mathrm{co}^{\mathrm{T}}\{x_j:j\in J\}\subset\bigcup\limits_{j\in J}M_j$，$\forall\varnothing\neq J\subset N$。并且映射 $h:\Delta_n\to 2^X$ 对于 Δ_n 和单纯形映射 $g:X\to\Delta_n$ 具有不动点性质，即对每一个单纯形映射 $g:X\to\Delta_n$，存在 $e_0\in\Delta_n$，使得 $e_0\in g\circ h(e_0)$。

因此存在某个 $x^*\in h(e_0)$使得 $e_0=g(x^*)=\sum\limits_{i=0}^{n}\mu_i(x^*)e^i$。记 $I(x^*)=\{i:\mu_i(x^*)>0,i\in\{0,1,\cdots,n\}\}$。则 $\forall i\in I(x^*)$，都有 $\mu_i(x^*)>0$ 且 $x^*\notin M_i$，故 $x^*\notin\bigcup\limits_{i\in I(x^*)}M_i$。

另外，有 $h(e_0)=h(g(x^*))=h\Big(\sum\limits_{i=0}^{n}\mu_i(x^*)e^i\Big)=h\Big(\sum\limits_{i\in I(x^*)}\mu_i(x^*)e^i\Big)\subset\mathrm{co}^{\mathrm{T}}\{x_i:i\in I(x^*)\}$。

于是，有 $x^*\in h(e_0)\subset\mathrm{co}^{\mathrm{T}}\{x_i:i\in I(x^*)\}\subset\bigcup\limits_{i\in I(x^*)}M_i$。产生矛盾。故结论得证。　证毕

在定理 1 的证明中，由于有限个开集构成的集族$\{M_i^c:i=0,1,\cdots,n\}$可以覆盖空间 X，因此根据紧性可以用单位分解来定义泛函族$\{\mu_i\}$。从而立即可得下面定理。

定理 2(T-凸紧拓扑空间中的 KKM 定理)　设$(X,\{T_A\})$为满足 GH_0-条件的 T-凸紧拓扑空间，而 $M_0,M_1,\cdots,M_n$ 为 X 中的 $n+1$ 个闭集，对 X 中的有限子集$\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$满足：

$$\mathrm{co}^{\mathrm{T}}\{x_j:j\in J\}\subset\bigcup_{j\in J}M_j,\forall\varnothing\neq J\subset N,$$

则 $\bigcap\limits_{i=0}^{n}M_i\neq\varnothing$。

定理 3(T-凸空间中的 KKM 定理)　设$(X,\{T_A\})$为满足 GH_0-条件的 T-凸拓扑空间，Y 是空间 X 的子集，集值映射 $M:Y\to 2^X$ 是闭值的 KKM 映射。如果 X 是一个紧拓扑空间或者度量空间，则集族$\{M(y):y\in Y\}$具有有限交性质。

证明　任取一有限子集$\{y_0,y_1,\cdots,y_n\}\subset Y$，只需证明 $\bigcap\limits_{i=0}^{n}M(y_i)\neq\varnothing$ 即可。由于 $M:Y\to 2^X$ 是闭值的 KKM 映射，所以有 $\mathrm{co}^{\mathrm{T}}\{y_j:j\in J\}\subset\bigcup\limits_{j\in J}M(y_j)$，$\forall\varnothing\neq J\subset N$。

又由于 X 满足 GH_0-条件，因此对于有限集$\{y_0,y_1,\cdots,y_n\}\subset Y$，必存在集值映射 $h:\Delta_n\to 2^X$，使得 $h(\Delta_J)\subset\mathrm{co}^{\mathrm{T}}\{y_j:j\in J\}$，$\forall\varnothing\neq J\subset N$。且映射 $h:\Delta_n\to 2^X$ 对于 Δ_n 和单纯形映射 $g:X\to\Delta_n$ 具有不动点性质。因此有 $h(\Delta_J)\subset\mathrm{co}^{\mathrm{T}}\{y_j:j\in J\}\subset\bigcup\limits_{j\in J}M(y_j)$，$\forall\varnothing\neq J\subset N=\{0,1,\cdots,n\}$。

现用闭集族$\{M(y_0),M(y_1),\cdots,M(y_n)\}$代替定理 1 和定理 2 的证明中的闭集族$\{M_0,M_1,\cdots,M_n\}$，立即得 $\bigcap\limits_{i=0}^{n}M(y_i)\neq\varnothing$。　证毕

注 3 定理1～3是对文献[17]部分结果在具有延拓性质的 T-凸空间上的推广。

参考文献:

[1] KANSTER B, KURATOWSKI C, MAZURKIEWICZ S. Ein Beweis des fixpunktsatzes für n-dimensionale simplexe[J]. Fundamenta Mathematicae, 1929, 14(1): 132-137.

[2] FAN K. A generalization of Tychonoff's fixed-point theorem[J]. Mathematische Annalen, 1961, 142(3): 305-310.

[3] PARK S. Some coincidence theorems on acyclic multifunctions and applications to KKM theory[M]//TAN K K. Fixed Point Theory and Applications. Singapore: World Scientific Publishing Company, 1992: 248-277.

[4] LASSONDE M. Fixed points for Kakutani factorizable multifunctions[J]. Journal of Mathmatical Analysis & Applications, 1990, 152(1): 46-60.

[5] HORVATH C D. Some results on multivalued mappings and inequalities without convexity[M]//LIN B L, SIMONS S. Nonlinear and Convex Analysis. Lecture Notes in Pure and Applied Math. New York: Marcel Dekker Inc, 1987: 99-106.

[6] PARK S, KIM H. Foundations of the KKM theory on generalized convex spaces[J]. Journal of Mathmatical Analysis & Applications, 1997, 209(2): 551-571.

[7] 王彤,邓磊. G-凸空间中的广义KKM定理及极小极大定理[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2005, 30(3): 397- 400.
WANG T, DENG L. Generalized KKM theorem and minimax theorem in G-convex spaces[J]. Journal of Southwest China Normal University (Natural Science), 2005, 30(3): 397-400.

[8] ZHOU L W, HUANG N J. A revision on geodesic pseudo-convex combination and Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem on Hadamard manifolds[J]. Journal Optimization Theory and Applications, 2019, 182(3): 1-13.

[9] XIANG S W, XIA S Y, CHEN J. KKM lemmas and minimax inequality theorems in abstract convexity spaces[J]. Fixed Point Theory and Applications, 2013, 2013(1): 1-12.

[10] ARONSZAJN N, PANITCHPAKDI P. Extensions of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces[J]. Pacific Journal of Mathematics, 1956, 6(3): 405-439.

[11] KIRK W A, SIMS B, YUAN G X Z. The Knaster-Kuratowski and Mazurkiewicz theory in hyperconvex metric spaces and some of its applications[J]. Nonlinear Analysis, 2000, 39(5): 611-627.

[12] 陈治友. T-凸空间的结构和性质[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2012, 34(10): 106-108.
CHEN Z Y. Stucture and property of T-convextity spaces[J]. Journal of Southwest University (Natural Science Edition), 2012, 34(10): 106-108.

[13] 陈治友,夏顺友. 抽象凸空间中广义最大元的稳定性[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2012, 34(8): 116-118.
CHEN Z Y, XIA S Y. Stability of the generalized maximal elements in an abstract convex space[J]. Journal of Southwest University (Natural Science Edition), 2012, 34(8): 116-118.

[14] 陈治友,夏顺友. 抽象凸空间上广义博弈Nash平衡点的存在性[J]. 辽宁工程技术大学学报(自然科学版), 2012, 31(5): 786-791.
CHEN Z Y, XIA S Y. Existence of Nash equilibrium point in generalized game within an abstract convex space[J]. Journal of Liaoning Technical University (Natural Science), 2012, 31(5): 786-791.

[15] 陈治友,夏顺友. 抽象凸空间中的Shapley-KKM引理[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2014, 37(3): 338-340.
CHEN Z Y, XIA S Y. Shapley-KKM lemma on abstract convex spaces[J]. Journal of Sichuan Normal University (Natural Science), 2014, 37(3): 338-340.

[16] 陈治友. T-凸空间中的连续选择定理与不动点定理[J]. 西北师范大学学报(自然科学版), 2017, 53(3): 25-27.
CHEN Z Y. Continuity selection and fixed-point theorems on T-convex spaces[J]. Journal of Northwest Normal University (Natural Science), 2017, 53(3): 25-27.

[17] 陈治友. T-凸空间中的KKM引理及其应用[J]. 湖南师范大学自然科学学报, 2017, 40(5): 84-87.
CHEN Z Y. Continuity selection and fixed-point theorems on T-convex spaces[J]. Journal of Natural Science of Hunan University, 2017, 40(5): 84-87.

[18] 陈治友. 局部 T-凸空间中的不动点定理[J]. 福州大学学报(自然科学版),2019,47(2):157-160.
CHEN Z Y. Fixed point theorems on locally T-convex spaces[J]. Journal of Fuzhou University (Natural Science Edition), 2019,47(2):157-160.

[19] 王彬. FC-空间中的 KKM 型定理和截口定理[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2008,25(2):25-28.
WANG B. KKM type theorem and section theorem in FC-spaces[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2008,25(2):25-28.

Operations Research and Cybernetics

KKM Theorems under Generalized H_0-condition in T-Convex Spaces

WANG Changchun[1], CHEN Zhiyou[2], XIA Shunyou[3], ZHANG Zhuanzhou[1], XU Guangjun[1]

(1. Department of Mathematics, Zunyi Normal College, Zunyi Guizhou 563006;
2. College of Mathematics and Information Science, Guiyang University, Guiyang 550005;
3. School of Mathematics and BigData, Guizhou EducationUniversity, Guiyang 550018, China)

Abstract: [**Purposes**]To derive the KKM lemma in T-convex spaces without linearity structure under GH_0-condition weakened with H_0-condition. [**Methods**]Composition functions are constructed based on the characteristics of GH_0-condition, and by utilizing constructed auxiliary functions with respect to metric and subjecting to unit decomposition about finite covering of compact set. [**Findings**]The KKM lemma in T-convex metric spaces and T-covex topology spaces are constructed under GH_0-condition weakened with H_0-condition. [**Conclusions**]Generalized KKM lemmas are delivered under more weak condition of structures for space and convexity.

Keywords: T-convex spaces; H_0-condition; GH_0-condition; KKM theorems

(责任编辑 黄 颖)