

路的 3 类积图的邻点扩展和可区别全染色*

李永艳

(北京交通大学 海滨学院, 河北 黄骅 061199)

摘要:【目的】为了得到两条路的积图的邻点扩展和可区别全染色数。【方法】直接构造了两路的笛卡尔积、直积、半强积的邻点扩展和可区别全染色。【结果】得到这 3 类积图的邻点扩展和可区别全染色数。【结论】证明了 NESDTC 猜想对于两路的笛卡尔积、直积、半强积成立。

关键词:积图;邻点扩展和可区别全染色数;邻点扩展和可区别全染色

中图分类号:O157.5

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2021)01-0060-04

关于图染色,文献[1]给出了图的邻和可区别一般边染色的概念。文献[2]得到,若图 G 是不含孤立边的图,则图 G 的邻和可区别一般边染色数不超过 5。文献[3]进一步提出邻和可区别一般全染色的概念。文献[4-6]提出了 NSDTC 猜想,并验证了该猜想对一些特殊图均成立。文献[7]在此基础上提出邻点扩展和可区别全染色概念,且研究了路、圈、完全图、树等图的邻点扩展和可区别全染色,并提出一个猜想。文献[8]研究了 3 类联图的邻点扩展和可区别全染色。文献[9]研究了轮、扇、星和双星的邻点扩展和可区别全染色。本文讨论两条路的笛卡尔积、直积、半强积图的邻点扩展和可区别全染色。

1 预备知识

定义 1^[8] 图 G 的一个全 k -染色是色集合 $\{1, 2, \dots, k\}$ 对图 G 的全体顶点及边的一个分配。设 f 是图 G 的一个全 k -染色,任意的 $x \in V(G)$,称 $\omega(x) = \sum_{x \in e} f(e) + \sum_{y \in N(x)} f(y)$ 为点 x 的扩展和,其中 $N(x) = \{y \in V(G) \mid xy \in E(G)\}$ 。如果对任意 $xy \in E(G)$,有 $\omega(x) \neq \omega(y)$,则称图 G 的全 k -染色 f 为邻点扩展和可区别全染色(Neighbor expanded sum distinguishing, NESD)。图 G 的 NESD 全 k -染色的最小值 k 称为图 G 的邻点扩展和可区别全染色数,简记为 $\text{egndi}_{\Sigma}(G)$ 。

定义 2^[10] 简单图 G 与 H 的笛卡尔积 $G \times H$ 是具有顶点集 $V(G) \times V(H)$ 的简单图,其中两个顶点 (u_1, v_1) 与 (u_2, v_2) 相邻当且仅当 $u_1 = u_2$ 且 $v_1 v_2 \in E(H)$,或者 $v_1 = v_2$ 且 $u_1 u_2 \in E(G)$ 。

定义 3^[10] 简单图 G 与 H 的直积 $G \wedge H$ 是具有顶点集 $V(G) \times V(H)$ 的简单图,其中两个顶点 (u_1, v_1) 与 (u_2, v_2) 相邻当且仅当 $u_1 u_2 \in E(G)$ 且 $v_1 v_2 \in E(H)$ 。

显然, $\Delta(G \wedge H) = \Delta(G) \cdot \Delta(H)$, $G \wedge H \cong H \wedge G$ 。

定义 4^[10] 简单图 G 与 H 的半强积 $G \cdot H$ 是具有顶点集 $V(G) \times V(H)$ 的简单图,其中两个顶点 (u_1, v_1) 与 (u_2, v_2) 相邻当且仅当 $u_1 u_2 \in E(G)$ 且 $v_1 v_2 \in E(H)$,或者 $u_1 = u_2$ 且 $v_1 v_2 \in E(H)$ 。

显然, $\Delta(G \cdot H) = \Delta(G) \cdot \Delta(H) + \Delta(H)$, $G \cdot H = (G \wedge H) \cup (N \times H)$,其中 $N \times H$ 表示 N 与 H 的笛卡尔积, N 是具有顶点集 $V(G)$ 的空图。

命题 1^[7] 设 $P_m (m \geq 2)$ 是 m 阶的路,则 $\text{egndi}_{\Sigma}(P_m) = \begin{cases} 2, m = 2 \\ 1, m = 3 \\ 2, m \geq 4 \end{cases}$ 。

命题 2^[7] 设 $C_m (m \geq 3)$ 是 m 阶的圈,则 $\text{egndi}_{\Sigma}(C_m) = 2$ 。

* 收稿日期:2020-07-26 修回日期:2020-08-25 网络出版时间:2021-03-10 16:11

资助项目:北京交通大学海滨学院重点科研项目(No. HBJY18004);北京交通大学海滨学院校级教改项目(No. HBJY19013)

第一作者简介:李永艳,女,副教授,研究方向为组合与图论,E-mail:liyongyan0@163.com.cn

网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20210310.1135.008.html

命题 3^[7] 设 $K_n (n \geq 2)$ 是 n 阶的完全图, 则 $\text{egndi}_\Sigma(K_n) = 2$ 。

命题 4^[7] 设 T 是 $n (n \geq 2)$ 阶的树, 则 $\text{egndi}_\Sigma(T) \leq 2$ 。

猜想 1^[7] (NESD 猜想) 设 G 为简单图, 则 $\text{egndi}_\Sigma(G) \leq 2$ 。

2 主要结果

设 P_m 与 P_n 分别为 m 阶和 n 阶的路, 其中 $m, n \geq 2$, 并设 $V(P_m) = \{0, 1, \dots, m-1\}$, $V(P_n) = \{0, 1, \dots, n-1\}$, 其中 $V(P_m)$ (或 $V(P_n)$) 中任意不同顶点 i 与 j 相邻当且仅当 $|i-j|=1$ 。

定理 1 设 $n \geq m \geq 2$, 则 $\text{egndi}_\Sigma(P_m \times P_n) = \begin{cases} 1, & m=n=3 \\ 2, & n \geq m \geq 2 (m=n=3 \text{ 除外}) \end{cases}$ 。

证明 设 f 是 $P_m \times P_n$ 的一个全 k -染色, 显然 $P_m \times P_n$ 没有 NESD 全 1-染色 (除非 $m=n=3$), 下面给出 $P_m \times P_n$ 的一个 NESD 全 2-染色。

情形 1, $n=m=2$ 。此时 $P_2 \times P_2 \cong C_4$, 由命题 2 得, $\text{egndi}_\Sigma(P_2 \times P_2) = \text{egndi}_\Sigma(C_4) = 2$ 。

情形 2, $n > m = 2$ 。此时所有边染颜色 1, 令 $f(u_i v_j) = \begin{cases} 1, & i+j \equiv 1 \pmod{2} \\ 2, & i+j \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}, i=0, 1, j=0, 1, \dots, n-1$, 则

$$\omega(u_i v_j) = \begin{cases} 9, & i+j \equiv 1 \pmod{2} \\ 6, & i+j \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}, i=0, 1, j=1, 2, \dots, n-2。$$

n 为奇数时, 将 $f(u_1 v_0) = f(u_1 v_{n-1}) = 1$ 改为 $f(u_1 v_0) = f(u_1 v_{n-1}) = 2$, 则 $\omega(u_0 v_0) = 5, \omega(u_1 v_0) = 6, \omega(u_0 v_{n-1}) = 4, \omega(u_1 v_{n-1}) = 6$ 。将 $\omega(u_1 v_1) = \omega(u_1 v_{n-2}) = 6$ 改为 $\omega(u_1 v_1) = \omega(u_1 v_{n-2}) = 7$;

n 为偶数时, 将 $f(u_1 v_0) = f(u_0 v_{n-1}) = 1$ 改为 $f(u_1 v_0) = f(u_0 v_{n-1}) = 2$, 则 $\omega(u_0 v_0) = 5, \omega(u_1 v_0) = 6, \omega(u_0 v_{n-1}) = 6, \omega(u_1 v_{n-1}) = 5$ 。将 $\omega(u_1 v_1) = \omega(u_0 v_{n-2}) = 6$ 改为 $\omega(u_1 v_1) = \omega(u_0 v_{n-2}) = 7$ 。

显然, f 是 $P_2 \times P_n$ 的一个 NESD 全 2-染色。

情形 3, $n=m=3$ 。此时所有点、所有边染颜色 1, 则 $\omega(u_0 v_0) = \omega(u_0 v_2) = \omega(u_2 v_0) = \omega(u_2 v_2) = 4, \omega(u_0 v_1) = \omega(u_1 v_0) = \omega(u_2 v_1) = \omega(u_1 v_2) = 6, \omega(u_1 v_1) = 8$ 。

显然, f 是 $P_3 \times P_3$ 的一个 NESD 全 1-染色。

情形 4, $n \geq m \geq 3 (n=m=3 \text{ 除外})$ 。此时所有边染颜色 1, 令 $f(u_i v_j) = \begin{cases} 1, & i+j \equiv 1 \pmod{2} \\ 2, & i+j \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}, i=0, 1, \dots, m-1, j=0, 1, \dots, n-1$, 则:

$$\begin{aligned} \omega(u_0 v_0) &= \omega(u_{m-1} v_0) = \omega(u_0 v_{n-1}) = \omega(u_{m-1} v_{n-1}) = 4; \\ \omega(u_0 v_j) &= \begin{cases} 9, & j \equiv 1 \pmod{2} \\ 6, & j \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}, j=1, 2, \dots, n-2; \\ \omega(u_{m-1} v_j) &= \begin{cases} 9, & m+j \equiv 0 \pmod{2} \\ 6, & m+j \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}, j=1, 2, \dots, n-2; \\ \omega(u_i v_j) &= \begin{cases} 8, & i+j \equiv 0 \pmod{2} \\ 12, & i+j \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}, i=1, 2, \dots, m-2, j=1, 2, \dots, n-2; \\ \omega(u_i v_0) &= \begin{cases} 9, & i \equiv 1 \pmod{2} \\ 6, & i \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}, i=1, 2, \dots, m-2; \\ \omega(u_i v_{n-1}) &= \begin{cases} 6, & i+n \equiv 1 \pmod{2} \\ 9, & i+n \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}, i=1, 2, \dots, m-2; \end{aligned}$$

m 为奇数且 n 为偶数时, 将 $f(u_0 v_{n-1}) = f(u_{m-1} v_{n-1}) = 1$ 改为 $f(u_0 v_{n-1}) = f(u_{m-1} v_{n-1}) = 2$; 将 $\omega(u_0 v_{n-1}) = \omega(u_{m-1} v_{n-1}) = 4$ 改为 $\omega(u_0 v_{n-1}) = \omega(u_{m-1} v_{n-1}) = 6$; 将 $\omega(u_0 v_{n-2}) = \omega(u_1 v_{n-1}) = \omega(u_{m-2} v_{n-1}) = \omega(u_{m-1} v_{n-2}) = 6$ 改为 $\omega(u_0 v_{n-2}) = \omega(u_1 v_{n-1}) = \omega(u_{m-2} v_{n-1}) = \omega(u_{m-1} v_{n-2}) = 7$ 。

m 为偶数且 n 为奇数时, 将 $f(u_{m-1} v_0) = f(u_{m-1} v_{n-1}) = 1$ 改为 $f(u_{m-1} v_0) = f(u_{m-1} v_{n-1}) = 2$; 将 $\omega(u_{m-1} v_0) = \omega(u_{m-1} v_{n-1}) = 4$ 改为 $\omega(u_{m-1} v_0) = \omega(u_{m-1} v_{n-1}) = 6$; 将 $\omega(u_{m-2} v_0) = \omega(u_{m-1} v_1) = \omega(u_{m-1} v_{n-2}) = \omega(u_{m-2} v_{n-1}) = 6$ 改为 $\omega(u_{m-2} v_0) = \omega(u_{m-1} v_1) = \omega(u_{m-1} v_{n-2}) = \omega(u_{m-2} v_{n-1}) = 7$ 。

m 为偶数且 n 为偶数时, 将 $f(u_0 v_{n-1}) = f(u_{m-1} v_0) = 1$ 改为 $f(u_0 v_{n-1}) = f(u_{m-1} v_0) = 2$; 将 $\omega(u_{m-1} v_0) =$

$\omega(u_0 v_{n-1})=4$ 改为 $\omega(u_{m-1} v_0)=\omega(u_0 v_{n-1})=6$; 将 $\omega(u_{m-2} v_0)=\omega(u_{m-1} v_1)=\omega(u_0 v_{n-2})=\omega(u_1 v_{n-1})=6$ 改为 $\omega(u_{m-2} v_0)=\omega(u_{m-1} v_1)=\omega(u_0 v_{n-2})=\omega(u_1 v_{n-1})=7$ 。

显然, f 是 $P_m \times P_n$ 的一个 NESD 全 2-染色。

证毕

定理 2 设 $n \geq m \geq 2$, 则 $\text{egndi}_\Sigma(P_m \wedge P_n) = 2$ 。

证明 设 f 是 $P_m \wedge P_n$ 的一个全 k -染色, 显然 $P_m \wedge P_n$ 没有 NESD 全 1-染色, 下面给出 $P_m \wedge P_n$ 的一个 NESD 全 2-染色。

情形 1, $n \geq m = 2$ 。此时 $P_2 \wedge P_n$ 为两条不相交的路, 所有边染颜色 1, 令 $f(u_i v_j) = \begin{cases} 1, i=0 \\ 2, i=1 \end{cases}, j=0, 1, \dots, n-1$,

则 $\omega(u_0 v_0)=\omega(u_0 v_{n-1})=3, \omega(u_1 v_0)=\omega(u_1 v_{n-1})=2, \omega(u_0 v_j)=6, j=1, 2, \dots, n-2, \omega(u_1 v_j)=4, j=1, 2, \dots, n-2$ 。

显然, f 是 $P_2 \wedge P_n$ 的一个 NESD 全 2-染色。

情形 2, $n \geq m \geq 3$ 。此时所有边染颜色 1, 令 $f(u_i v_j) = \begin{cases} 1, i \equiv 0 \pmod{2} \\ 2, i \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}, j=0, 1, \dots, n-1$, 则 $\omega(u_0 v_0) =$

$\omega(u_0 v_{n-1})=3, \omega(u_0 v_j)=6, j=1, 2, \dots, n-2, \omega(u_i v_0)=\omega(u_i v_{n-1}) = \begin{cases} 4, i \equiv 1 \pmod{2} \\ 6, i \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}, i=1, 2, \dots, m-1; \omega(u_i v_j) =$

$\begin{cases} 8, i \equiv 1 \pmod{2} \\ 12, i \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}, i=1, 2, \dots, m-2, j=1, 2, \dots, n-2$ 。

m 为奇数时, $\omega(u_{m-1} v_0)=\omega(u_{m-1} v_{n-1})=3, \omega(u_{m-1} v_j)=6, j=1, 2, \dots, n-2$;

m 为偶数时, $\omega(u_{m-1} v_0)=\omega(u_{m-1} v_{n-1})=2, \omega(u_{m-1} v_j)=4, j=1, 2, \dots, n-2$ 。

显然, f 是 $P_m \wedge P_n (n \geq m \geq 3)$ 的一个 NESD 全 2-染色。

证毕

定理 3 设 $n \geq m \geq 2$, 则 $\text{egndi}_\Sigma(P_m \cdot P_n) = 2$ 。

证明 设 f 是 $P_m \cdot P_n$ 的一个全 k -染色, 显然 $P_m \cdot P_n$ 没有 NESD 全 1-染色, 下面给出 $P_m \cdot P_n$ 的一个 NESD 全 2-染色。

所有边染颜色 1, 令 $f(u_i v_j) = \begin{cases} 1, j \equiv 0 \pmod{2} \\ 2, j \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}, i=0, 1, \dots, m-1, j=0, 1, \dots, n-1$, 则 $\omega(u_0 v_0) =$

$\omega(u_{m-1} v_0)=6, \omega(u_i v_0)=9, i=1, 2, \dots, m-2, \omega(u_i v_j) = \begin{cases} 8, j \equiv 1 \pmod{2} \\ 12, j \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}, i=0, 1, \dots, m-2, j=1, 2, \dots, n-2$ 。

m 为奇数时, $\omega(u_0 v_{n-1})=\omega(u_{m-1} v_{n-1})=6, \omega(u_i v_{n-1})=9, i=1, 2, \dots, m-2$;

m 为偶数时, $\omega(u_0 v_{n-1})=\omega(u_{m-1} v_{n-1})=4, \omega(u_i v_{n-1})=6, i=1, 2, \dots, m-2$ 。

显然, f 是 $P_m \cdot P_n$ 的一个 NESD 全 2-染色。

证毕

综上所述, NESD 猜想对于两路的笛卡尔积、直积、半强积图是成立的。

参考文献:

- [1] KARONSKI M, LUCZAK T, THOMASON A. Edge weights and vertex colours[J]. Journal of Combinatorial Theory Series B, 2004, 91(1): 151-157.
- [2] KALKOWSKI M, KARONSKI M, PFENDER F. Vertex-coloring edge-weightings: towards the 1-2-3-conjecture[J]. Journal of Combinatorial Theory Series B, 2010, 100(3): 347-349.
- [3] PRZYBYLO J, WOZNICK M. On a 1, 2 conjecture[J]. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 2010, 12(1): 101-108.
- [4] PILSNIAK M, WOZNIAK M. On the total-neighbor-distinguishing index by sums[J]. Graphs and Combinatorics, 2015, 31(3): 771-782.
- [5] LI H L, LIU B Q, WANG G H. Neighbor Sum distinguishing total colorings of K_4 -minor free graph[J]. Frontiers of Mathematics in China, 2013, 8(6): 1351-1366.
- [6] DONG A J, WANG G H. Neighbor sum distinguishing total colorings of graphs with bounded maximum average degree[J]. Acta Mathematica Sinica(English Series), 2014, 30(4): 703-709.
- [7] FLANDRIN E, LI H, MARCZYK A, et al. A note on neighbor expanded sun distinguishing index[J]. Discussiones Graph Mathematicae, 2017, 37(1): 29-37.

- [8] 张辉,陈祥恩,王治文. 两圈之联、路与圈的联及两路之联的邻点被扩展和可区别全染色[J]. 吉林大学学报(理学版),2018,56(6):1402-1408.
ZHANG H,CHEN X E,WANG Z W. Neighbor expanded sum distinguishing total coloring of joins of two cycles,one path and one cycle and two paths[J]. Journal of Jilin University (Science Edition),2018,56(6):1402-1408.
- [9] 张辉,陈祥恩,王治文. 轮,扇,星和双星的邻点扩展和可区别全染色[J]. 汕头大学学报(自然科学版),2018,33(4):23-26.
ZHANG H,CHEN X E,WANG Z W. Neighbor expanded sum distinguishing total coloring of wheels, fans, stars and double stars[J]. Journal of Shantou University (Natural Science),2018,33(4):23-26.
- [10] BONDY J A,MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. New York:Mac Millan Press Ltd,1976.

Operations Research and Cybernetics

Neighbor Expanded Sum and Distinguishing Total Coloring of Three Kinds of the Product Graphs of Paths

LI Yongyan

(Department of Mathematics, Haibin College, Beijing Jiaotong University, Huanghua Hebei 061199, China)

Abstract: [Purposes]To obtain the neighbor expanded sum and distinguishing total chromatic number of product graph of two paths.

[Methods] The neighbor expanded sum and distinguishing total coloring of product graphs are constructed, such as the Cartesian product, direct product and semi-strong product. [Findings]The neighbor expanded sum and distinguishing total chromatic number of two paths are given. [Conclusions]NESDTC conjecture is true for the product graphs of paths.

Keywords: product graph; neighbor expanded sum and distinguishing total chromatic number; neighbor expanded sum and distinguishing total coloring

(责任编辑 黄 颖)