

多目标优化中 ϵ -真有效解的一个注记^{*}

夏丹丹, 陈美杉, 刘学文

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】利用改进的约束标量化方法研究多目标优化 ϵ -真有效解的标量化性质。【方法】首先对在已有研究的基础上,对 ϵ -真有效解的标量化结果进行分析,通过严格的推理发现有两个条件是相互矛盾的。进一步地,引入新的条件对该结果进行修正。【结果】利用改进的约束标量化方法在新的条件下建立了多目标优化问题中 ϵ -真有效解的标量化结果。此外,也举例对主要结果进行说明。【结论】获得的标量化结果不仅对已有文献中的结论进行了修正,同时也为研究多目标优化问题中解的性质提供新的思路。

关键词:改进的约束标量化方法;多目标优化问题; ϵ -真有效解

中图分类号:O221.6

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2021)02-0001-06

向量优化问题的近似解及它的标量化性质是最优化理论领域中十分重要的研究方向。近些年来,许多学者提出了不同类型的近似解概念^[1-5]。1979年,Kutateladze^[1]首次提出了近似解的概念。1984年,Loridan^[2]将 ϵ -有效解的概念推广到多目标优化问题上,并且利用标量化方法对最优性条件进行研究。1986年,White^[3]对多目标优化问题的6种近似有效解的概念进行研究。1994年,Helbig等人^[4]提出了两种新的 ϵ -有效解概念,并给出相应的例子对主要结果进行解释。2000年,Rong等人^[5]对集值向量优化问题中的 ϵ -弱有效解概念进行研究,并在凸性假设条件下,利用相应的择一性定理建立了 ϵ -弱有效解的线性标量化定理以及拉格朗日乘子定理等。有关多目标优化问题近似解的研究成果见文献[6-7]。1998年,Li等人^[8]首次提出了 ϵ -真有效解的概念,并通过标量化方法给出 ϵ -真有效解的必要性条件。基于 Geoffrion 真有效解的思想,1999年,Liu^[9]提出了 ϵ -真有效解的概念,并在函数的凸性假设下给出了这类 ϵ -真有效解的一些线性标量化性质。基于 Benson 真有效解的思想,2000年,Rong等人^[10]提出了关于近似真有效解的概念—— ϵ -真有效解,并建立了这类近似真有效解的一些线性标量化结果、拉格朗日乘子定理以及鞍点定理等。2013年,Ghaznavi-Ghosoni等人^[11]利用不同的标量化方法,即改进的约束标量化方法、加权切比雪夫法以及线性加权和法给出 ϵ -(强,弱,真)有效的充分必要条件。2014年,夏远梅等人^[12]利用 Göpfert 等人提出的非线性标量化函数对向量优化问题中 ϵ -真有效解的非线性标量化性质进行研究,并举例对主要结果进行解释。2019年,赵克全等人^[13]通过已有的标量化方法提出了一类新的标量化优化形式,再通过调整几种参数范围得到多目标优化问题的弱有效解、有效解以及真有效解的完全标量化结果,并举例对主要的结果进行说明。2019年,Xia等人^[14]利用拟内部对一类集值映射向量优化问题建立弱有效解的线性标量化结果并举例进行说明。2020年,Xia等人^[15]利用剩余变量和广义 Tchebycheff 范数提出了新的多目标优化问题的组合标量化方法,通过调整参数范围得到了(弱、严格、真)有效解的一些等价标量化结果刻画,并利用该方法建立了近似解的一些标量化结果。

受文献[11]的启发,通过对文献[16]中建立的 ϵ -真有效解的标量化结果进行分析,发现该结论中的部分条件是相互矛盾的。因此,本文首先针对文献中 ϵ -真有效解的充分条件进行分析,并对该结论中矛盾的条件进行修正。再利用改进的约束标量化方法建立多目标优化问题中 ϵ -真有效解的标量化结果,并且针对该标量化结果给出严格的证明过程。

* 收稿日期:2020-11-27 修回日期:2021-01-26 网络出版时间:2021-04-07 14:44

资助项目:国家自然科学基金重大项目(No. 11991024)

第一作者简介:夏丹丹,女,研究方向为多目标优化理论与方法,E-mail:dandanx123@163.com;通信作者:刘学文,男,教授,E-mail:xuewenliu@cqnu.edu.cn.

网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20210407.1420.010.html

1 预备知识

令 $\mathbf{R}^m$ 为 m 维欧氏空间, 本文考虑如下多目标优化问题:

$$\begin{aligned} (\text{MOP}) \quad & \min f(\mathbf{x}), \\ & \text{s. t. } \mathbf{x} \in X \subset \mathbf{R}^n. \end{aligned}$$

其中: $X \subset \mathbf{R}^n$ 为非空子集, $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) : X \rightarrow \mathbf{R}^m$ 为有界向量值函数。对于任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$, 考虑序关系: $\mathbf{x} < \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i < y_i, \forall i = 1, 2, \dots, m; \mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \forall i = 1, 2, \dots, m; \mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ 。

上述关系可等价地写成: $\mathbf{R}_{\geq}^m = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m : \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}, \mathbf{R}_{\gg}^m = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m : \mathbf{y} > \mathbf{0}\}, \mathbf{R}_{>}^m = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m : \mathbf{y} > \mathbf{0}\}$ 。

定义 1^[3] 设 $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{R}_{\geq}^m, \hat{\mathbf{x}} \in X$ 为 (MOP) 的可行解, 称 $\hat{\mathbf{x}}$ 为 (MOP) 的 $\boldsymbol{\varepsilon}$ -有效解, 若不存在 $\mathbf{x} \in X$ 使得 $f(\mathbf{x}) \leq f(\hat{\mathbf{x}}) - \boldsymbol{\varepsilon}$ 。

定义 2^[9] 设 $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{R}_{\geq}^m$, 称可行解 $\hat{\mathbf{x}} \in X$ 为 (MOP) 的 $\boldsymbol{\varepsilon}$ -真有效解, 如果 $\hat{\mathbf{x}}$ 是有效解且存在 $M > 0$, 使得对任意满足 $f_i(\mathbf{x}) < f_i(\hat{\mathbf{x}}) - \varepsilon_i$ 的 $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ 和 $\mathbf{x} \in X$, 总存在满足 $f_j(\hat{\mathbf{x}}) - \varepsilon_j < f_j(\mathbf{x})$ 的 $j \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ 使得 $\frac{f_i(\hat{\mathbf{x}}) - f_i(\mathbf{x}) - \varepsilon_i}{f_j(\mathbf{x}) - f_j(\hat{\mathbf{x}}) + \varepsilon_j} \leq M$ 。

注 1 特别地, 若 $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$ 时, 多目标优化问题中的各类 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 型近似解就退化为相应的多目标优化问题的精确解。Kutateladze^[1] 考虑了如下数值最优化问题:

$$\begin{aligned} (P) \quad & \min g(\mathbf{x}), \\ & \text{s. t. } \mathbf{x} \in X \subset \mathbf{R}^n. \end{aligned}$$

其中: $X \subset \mathbf{R}^n$ 为非空子集, $g(\mathbf{x}) : X \rightarrow \mathbf{R}$ 为数值函数。进一步, Kutateladze 首次提出了该类问题的近似解概念—— $\boldsymbol{\varepsilon}$ -最优解。

定义 3^[1] 设 $\varepsilon \geq 0$, 称 $\hat{\mathbf{x}}$ 为 (P) 的 ε -最优解, 若 $\hat{\mathbf{x}} \in X$ 且对任意的 $\mathbf{x} \in X, g(\mathbf{x}) \geq g(\hat{\mathbf{x}}) - \varepsilon$ 。

本文考虑 Ehrgott 等人^[17] 提出的处理多目标优化问题的标量化方法, 即改进的约束法标量化问题:

$$\begin{aligned} (\text{SOP})_{\delta-k}^+ \quad & \min f_k(\mathbf{x}) - \sum_{i \neq k} \mu_i s_i, \\ & \text{s. t. } f_i(\mathbf{x}) + s_i \leq \delta_i, i \neq k, \\ & s_i \geq 0, i \neq k, \\ & \mathbf{x} \in X, i \in \{1, 2, \dots, m\}. \end{aligned}$$

其中: $\delta_{-k} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{k-1}, \delta_k, \dots, \delta_m) \in \mathbf{R}^{m-1}, \mu_i \geq 0 (\forall i \neq k)$ 为权重变量, s_i 为剩余变量。

此外, 本文将用到 Ghaznavi-Ghosoni 等人在文献[11]中建立的如下结果。

引理 1^[11] 设 $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{R}_{\geq}^m$ 且 $\varepsilon \leq \varepsilon_k + \sum_{i \neq k} \mu_i \varepsilon_i, \mu_i > 0, \forall i \neq k$ 。如果 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}})$ 是 $(\text{SOP})_{\delta-k}^+$ 的 ε -最优解, 则 $\hat{\mathbf{x}}$ 是 (MOP) 的 $\boldsymbol{\varepsilon}$ -有效解。

2 $\boldsymbol{\varepsilon}$ -真有效解的一个注记

文献[11]中给出了 $\boldsymbol{\varepsilon}$ -有效解和 $\boldsymbol{\varepsilon}$ -真有效解等的标量化结果。特别地, Ghaznavi-Ghosoni 等人利用改进的约束标量化方法为 $\boldsymbol{\varepsilon}$ -真有效解提供了充分条件, 即文献[11]中的定理 4.6:

假定 $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{R}_{\geq}^m$, 且 $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_k + \sum_{i \neq k} \varepsilon_i \mu_i$ 。若 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}})$ 是 $(\text{SOP})_{\delta-k}^+$ 满足 $\mu_i > 0, i \neq k$ 的 ε -最优解且对任意满足 $f_i(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{s}_i < \delta_i$ 的 $i \neq k$, 则 $\hat{\mathbf{x}}$ 是 (MOP) 的 $\boldsymbol{\varepsilon}$ -真有效解。

上述定理中给出的部分条件是相互矛盾的, 即 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}})$ 是 $(\text{SOP})_{\delta-k}^+$ 满足 $\mu_i > 0, i \neq k$ 的 ε -最优解与 $f_i(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{s}_i < \delta_i$ 是相互矛盾的。事实上, 这是因为, 若 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}})$ 满足 $f_i(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{s}_i < \delta_i, i \neq k$, 则存在 $\Delta s \geq 0$, 使得:

$$f_i(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{s}_i + \Delta s < \delta_i, i \neq k.$$

令 $\tilde{s}_i = \hat{s}_i + \Delta s$, 则 $\tilde{s}_i \geq 0, \tilde{\mathbf{s}} = (\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots)$, 从而得到 $(\hat{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{s}})$ 是 $(\text{SOP})_{\delta-k}^+$ 的可行解。此外, 将 $(\hat{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{s}})$ 带入 $(\text{SOP})_{\delta-k}^+$ 的目标函数可得:

$$f_k(\hat{\mathbf{x}}) - \sum_{i \neq k} \mu_i \tilde{s}_i = f_k(\hat{\mathbf{x}}) - \sum_{i \neq k} \mu_i \hat{s}_i - \Delta s \sum_{i \neq k} \mu_i. \quad (1)$$

因为 $(SOP)_{\delta-k}^+$ 中的参数 $\mu_i > 0 (i \neq k)$, 且 $\Delta s > 0$, 从而有 $\Delta s \sum_{i \neq k} \mu_i > 0$, 故由(1)式可得:

$$f_k(\hat{x}) - \sum_{i \neq k} \mu_i \tilde{s}_i > f_k(\hat{x}) - \sum_{i \neq k} \mu_i \hat{s}_i - \Delta s \sum_{i \neq k} \mu_i.$$

这与 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(SOP)_{\delta-k}^+$ 的 ϵ -最优解矛盾, 因此 $(\hat{x}, \hat{s})$ 为 $(SOP)_{\delta-k}^+$ 的 ϵ -最优解与 $f_i(\hat{x}) + \hat{s}_i < \delta_i (i \neq k)$ 在定理中的其余条件成立情况下不能同时成立, 是矛盾的。

基于上述分析, 本文探索新的条件以对文献[11]中的定理 4.6 进行修正, 并通过详细地分析和严格地证明, 在新的条件下获得了多目标优化问题 ϵ -真有效解的新的标量化结果。

定理 1 假定 $\epsilon \in \mathbf{R}_+^m, \hat{x} \in X, s_i \geq 0 (\forall i \neq k), \mu_i > 0 (\forall i \neq k)$ 且 $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_k + \sum_{i \neq k} \epsilon_i \mu_i$ 。若 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(SOP)_{\delta-k}^+$ 的 ϵ -最优解且 $\hat{s}$ 满足对任意的 $i \neq k$ 有 $\hat{s}_i > 0$, 则 $\hat{x}$ 是 (MOP) 的 ϵ -真有效解。

证明 由引理 1 可知, $\hat{x}$ 是 (MOP) 的 ϵ -有效解, 下证 $\hat{x}$ 是 ϵ -真有效解, 则只需证明存在 $M > 0$, 使得对任意满足 $f_i(x) < f_i(\hat{x}) - \epsilon_i$ 的 $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ 和 $x \in X$, 总存在满足 $f_j(\hat{x}) - \epsilon_j < f_j(x)$ 的 $j \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ 使得 $\frac{f_i(\hat{x}) - f_i(x) - \epsilon_i}{f_j(x) - f_j(\hat{x}) + \epsilon_j} \leq M$ 即可。

假设 $\hat{x}$ 不是 (MOP) 的 ϵ -真有效解, 考虑正实数序列 $\{M_\xi\}$, 满足 $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} M_\xi = +\infty, \xi$ 是常数。那么对任意的 M_ξ 总存在满足 $f_i(x_\xi) < f_i(\hat{x}) - \epsilon_i$ 的 $i \in \{1, \dots, m\}$ 和 $x_\xi \in X$, 使得对任意满足 $f_j(\hat{x}) - \epsilon_j < f_j(x_\xi)$ 的 $j \neq i$, 有:

$$\frac{f_i(\hat{x}) - f_i(x_\xi) - \epsilon_i}{f_j(x_\xi) - f_j(\hat{x}) + \epsilon_j} > M_\xi. \quad (2)$$

不失一般性, 假定 $\{M_\xi\}$ 无界且 i 适应于每一个 ξ 。此外, 设 $J = \{j : f_j(x_\xi) > f_j(\hat{x}) - \epsilon_j\}$ 。

由于 k 的取法有 3 种可能, 现考虑以下 3 种情况:

1) 当 $k \notin J \cup \{i\}$ 时, 如果 $j \notin J \cup \{k\} \cup \{i\}$, 则有 $f_j(x_\xi) \leq f_j(\hat{x}) - \epsilon_j \leq \delta_j - \hat{s}_j - \epsilon_j$, 即:

$$f_j(x_\xi) + \hat{s}_j + \epsilon_j \leq \delta_j, \forall j \notin J \cup \{k\} \cup \{i\}, \forall \xi. \quad (3)$$

如果 $j \in J$, 则 $f_j(x_\xi) > f_j(\hat{x}) - \epsilon_j$ 。令:

$$\eta = \inf_{\xi} \{f_i(\hat{x}) - f_i(x_\xi) - \epsilon_i\}, 0 < \sigma < \min \left\{ \frac{\mu_{\min}}{|J| \mu_{\max}}, \frac{\hat{s}_j + \epsilon_j}{\eta}, j \in J \right\}.$$

当 $\eta = 0$ 时, 记 $\frac{\hat{s}_j + \epsilon_j}{\eta} = +\infty (j \in J)$, 则 $0 < \sigma < 1, \hat{s}_j + \epsilon_j > \sigma \eta \geq \sigma^2 \eta (\forall j \in J)$, 且:

$$f_i(x_\xi) + \sigma \eta + \epsilon_i \leq f_i(x_\xi) + (f_i(\hat{x}) - f_i(x_\xi) - \epsilon_i) + \epsilon_i \leq \delta_i - \hat{s}_i, \forall \xi.$$

当 $\eta > 0$ 时, 结合不等式(2), 又因为 $f(X)$ 有界, 因此 $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} f_j(x_\xi) = f_j(\hat{x}) - \epsilon_j < \delta_j - \hat{s}_j - \epsilon_j + \sigma^2 \eta$ 。由极限的定义, 则存在 $\xi_0 > 0$ 使得:

$$f_j(x_\xi) + \hat{s}_j + \epsilon_j - \sigma^2 \eta < \delta_j, \forall \xi > \xi_0. \quad (4)$$

因此取 $\hat{\xi} > \xi_0$, 令 $\bar{x} = x_{\hat{\xi}}, \bar{s}_j = \begin{cases} \hat{s}_j + \epsilon_j - \sigma^2 \eta, j \in J \\ \hat{s}_j + \epsilon_j + \sigma \eta, j = i \\ \hat{s}_j + \epsilon_j, j \notin J \cup \{k\} \cup \{i\} \end{cases}$ 。由(3), (4)式可知, $(\bar{x}, \bar{s})$ 是 $(SOP)_{\delta-k}^+$ 的一个可行解。由于

$k \notin J$, 故 $f_k(\bar{x}) = f_k(x_{\hat{\xi}}) \leq f_k(\hat{x}) - \epsilon_k$ 。则有:

$$\begin{aligned} f_k(\bar{x}) - \sum_{j \neq k} \bar{s}_j \mu_j &= f_k(\bar{x}) - \sum_{j \neq k} \hat{s}_j \mu_j - \sum_{j \neq k} \epsilon_j \mu_j + \sum_{j \in J} \mu_j \sigma^2 \eta - \mu_i \sigma \eta < \\ f_k(\hat{x}) - \epsilon_k - \sum_{j \neq k} \epsilon_j \mu_j - \sum_{j \neq k} \hat{s}_j \mu_j &\leq f_k(\hat{x}) - \sum_{j \neq k} \hat{s}_j \mu_j - \epsilon. \end{aligned}$$

这与 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(SOP)_{\delta-k}^+$ 的 ϵ -最优解矛盾。

若 $\eta = 0$, 则 $\{f_i(\hat{x}) - f_i(x_\xi) - \epsilon_i, \xi \in \mathbf{N}^+\}$ 存在收敛子列。不妨设 $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} (f_i(\hat{x}) - f_i(x_\xi) - \epsilon_i) = 0$ 。此外, 由(2)式可得, 存在 $\xi_0 > 0$, 使得:

$$0 < f_i(\hat{x}) - f_i(x_\xi) - \epsilon_i < \frac{\hat{s}_j + \epsilon_j}{2}, \forall \xi > \xi_0, j \in J,$$

$$f_j(\mathbf{x}_\xi) - f_j(\hat{\mathbf{x}}) + \epsilon_j < \sigma^2(f_i(\hat{\mathbf{x}}) - f_i(\mathbf{x}_\xi) - \epsilon_i), \forall \xi > \xi_0.$$

故对任意的 $\xi > \xi_0$, 有:

$$f_j(\mathbf{x}_\xi) + \hat{s}_j - \sigma^2(f_i(\hat{\mathbf{x}}) - f_i(\mathbf{x}_\xi) - \epsilon_i) + \epsilon_j \leq \delta_j, \forall j \in J.$$

因此取 $\hat{\xi} > \xi_0$, 令 $\eta_i(\hat{\xi}) = f_i(\hat{\mathbf{x}}) - f_i(\mathbf{x}_{\hat{\xi}}) - \epsilon_i$, 且: $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{\hat{\xi}}, \bar{s}_j = \begin{cases} \hat{s}_j + \epsilon_j - \sigma^2 \eta_i(\hat{\xi}), j \in J \\ \hat{s}_j + \epsilon_j + \sigma \eta_i(\hat{\xi}), j = i \\ \hat{s}_j + \epsilon_j, j \notin J \cup \{k\} \cup \{i\} \end{cases}$, 则 $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}})$ 是 $(\text{SOP})_{\delta-k}^+$ 的一个可行解。此外,

$$\begin{aligned} f_k(\bar{\mathbf{x}}) - \sum_{j \neq k} \bar{s}_j \mu_j &= f_k(\bar{\mathbf{x}}) - \sum_{j \neq k} \hat{s}_j \mu_j - \sum_{j \neq k} \epsilon_j \mu_j + \sum_{j \in J} \mu_j \sigma^2 \eta_i(\hat{\xi}) - \mu_i \sigma \eta_i(\hat{\xi}) < \\ f_k(\hat{\mathbf{x}}) - \epsilon_k - \sum_{j \neq k} \epsilon_j \mu_j - \sum_{j \neq k} \hat{s}_j \mu_j &\leq f_k(\hat{\mathbf{x}}) - \sum_{j \neq k} \hat{s}_j \mu_j - \epsilon. \end{aligned}$$

这与 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}})$ 是 $(\text{SOP})_{\delta-k}^+$ 的 ϵ -最优解矛盾。

2) 当 $k=i$ 时, 令 σ 为情况 1) 中定义的 σ 且令 $\eta_i(\xi) = f_i(\hat{\mathbf{x}}) - f_i(\mathbf{x}_\xi) - \epsilon_i$, 则存在 $\xi_0 > 0$ 和 $\beta \geq 2$ 使得:

$$\begin{aligned} f_j(\mathbf{x}_\xi) + \hat{s}_j + \epsilon_j - \sigma^\beta \eta_i(\xi) &\leq \delta_j, \forall \xi > \xi_0, \forall j \in J. \\ f_k(\mathbf{x}_\xi) &< f_k(\hat{\mathbf{x}}) - \epsilon_k - \mu_{\max} \sigma^{\beta-1} \eta_i(\xi), \forall \xi > \xi_0. \end{aligned}$$

因此取 $\hat{\xi} > \xi_0$, 令: $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{\hat{\xi}}, \bar{s}_j = \begin{cases} \hat{s}_j + \epsilon_j - \sigma^\beta \eta_i(\hat{\xi}), j \in J \\ \hat{s}_j + \epsilon_j, j \notin J \cup \{k\} \end{cases}$, 则 $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}})$ 是 $(\text{SOP})_{\delta-k}^+$ 的一个可行解且:

$$\begin{aligned} f_k(\bar{\mathbf{x}}) - \sum_{j \neq k} \bar{s}_j \mu_j &= f_k(\bar{\mathbf{x}}) - \sum_{j \neq k} \hat{s}_j \mu_j - \sum_{j \neq k} \epsilon_j \mu_j + \sum_{j \in J} \mu_j \sigma^\beta \eta_i(\hat{\xi}) < \\ f_k(\hat{\mathbf{x}}) - \epsilon_k - \sum_{j \neq k} \epsilon_j \mu_j - \sum_{j \neq k} \hat{s}_j \mu_j - \mu_{\max} \sigma^{\beta-1} \eta_i(\hat{\xi}) &+ \sum_{j \in J} \mu_j \sigma^\beta \eta_i(\hat{\xi}) < f_k(\hat{\mathbf{x}}) - \sum_{j \neq k} \hat{s}_j \mu_j - \epsilon. \end{aligned}$$

这与 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}})$ 是 $(\text{SOP})_{\delta-k}^+$ 的 ϵ -最优解矛盾。

3) 当 $k \in J$ 时, 与情况 1) 类似, 取 $\xi > \xi_0$, 令 $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_\xi$, 当 $\eta > 0$ 时, 取 $\eta' = \eta$ 且 $\bar{s}_j = \begin{cases} \hat{s}_j + \epsilon_j - \sigma^2 \eta, j \in J \setminus \{k\} \\ \hat{s}_j + \epsilon_j + \sigma \eta, j = i \\ \hat{s}_j + \epsilon_j, j \notin J \cup \{i\} \end{cases}$.

当 $\eta = 0$ 时, 取 $\eta' = \eta_i(\xi)$ 且 $\bar{s}_j = \begin{cases} \hat{s}_j + \epsilon_j - \sigma^2 \eta_i(\xi), j \in J \setminus \{k\} \\ \hat{s}_j + \epsilon_j + \sigma \eta_i(\xi), j = i \\ \hat{s}_j + \epsilon_j, j \notin J \cup \{i\} \end{cases}$, 因此 $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}})$ 是 $(\text{SOP})_{\delta-k}^+$ 的一个可行解。由于 $k \in J$, 则

有 $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} f_k(\mathbf{x}_\xi) = f_k(\hat{\mathbf{x}}) - \epsilon_k$, 也即 $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} (f_k(\hat{\mathbf{x}}) - f_k(\mathbf{x}_\xi)) = \epsilon_k$, 故:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} (f_k(\hat{\mathbf{x}}) - f_k(\mathbf{x}_\xi)) - \epsilon + \sum_{j \neq k} \epsilon_j \mu_j - \sum_{j \in J} \mu_j \sigma^2 \eta' + \sigma \mu_i \eta' &= \\ \epsilon_k - \epsilon + \sum_{j \neq k} \epsilon_j \mu_j - \sum_{j \in J} \mu_j \sigma^2 \eta' + \sigma \mu_i \eta' &> 0. \end{aligned}$$

则存在 $\xi_1 > 0$, 使得 $f_k(\mathbf{x}_\xi) - \sum_{i \neq k} \epsilon_i \mu_i < f_k(\hat{\mathbf{x}}) - \epsilon - \sum_{j \in J} \mu_j \sigma^2 \eta' + \sigma \mu_i \eta'$, $\forall \xi > \xi_1$ 。取 $\xi^* > \max\{\xi_0, \xi_1\}$, 则 $(\mathbf{x}^* =$

$\mathbf{x}_{\xi^*}, \mathbf{s}^*)$ 是 $(\text{SOP})_{\delta-k}^+$ 的一个可行解, 其中: $\mathbf{s}_j^* = \begin{cases} \hat{s}_j + \epsilon_j - \sigma^2 \eta', j \in J \setminus \{k\} \\ \hat{s}_j + \epsilon_j + \sigma \eta', j = i \\ \hat{s}_j + \epsilon_j, j \notin J \cup \{i\} \end{cases}$ 。因此, 有:

$$\begin{aligned} f_k(\mathbf{x}^*) - \sum_{j \neq k} \mathbf{s}_j^* \mu_j &= f_k(\mathbf{x}_{\xi^*}) - \sum_{j \neq k} \hat{s}_j \mu_j - \sum_{j \neq k} \epsilon_j \mu_j + \sum_{j \in J} \mu_j \sigma^2 \eta' - \mu_i \sigma \eta' < \\ f_k(\hat{\mathbf{x}}) - \sum_{j \neq k} \hat{s}_j \mu_j - \epsilon - \sum_{j \in J} \mu_j \sigma^2 \eta' + \sigma \mu_i \eta' &+ \sum_{j \in J} \mu_j \sigma^2 \eta' - \mu_i \sigma \eta' = f_k(\hat{\mathbf{x}}) - \sum_{j \neq k} \hat{s}_j \mu_j - \epsilon. \end{aligned}$$

这与 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}})$ 是 $(\text{SOP})_{\delta-k}^+$ 的 ϵ -最优解矛盾。

综上所述, $\hat{\mathbf{x}}$ 是 (MOP) 的 ϵ -真有效解。

证毕

注 2 若定理中 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}})$ 为 $(\text{SOP})_{\delta-k}^+$ 的 ϵ -最优解, 但 $\hat{\mathbf{s}}$ 不满足对任意的 $i \neq k$ 有 $\hat{s}_i > 0$, 则 $\hat{\mathbf{x}}$ 不一定是 (MOP) 的 ϵ -

真有效解,即定理的结论不一定成立。下面举例说明。

例1 考虑如下多目标优化问题:

$$\begin{aligned} (\text{MOP}) \quad & \min f(x) = (f_1(x), f_2(x)), \\ \text{s. t.} \quad & x \in X = [-3, 5]. \end{aligned}$$

$$\text{其中: } f_1(x) = \begin{cases} 3x+1, & x \in [-3, 1) \\ \left(\frac{1}{2}x+1\right)^2 + 4, & x \in [1, 5] \end{cases}, f_2(x) = \begin{cases} (1-x)^2, & x \in [-3, 1) \\ 0, & x \in [1, 4] \\ (x-4)^2, & x \in (4, 5] \end{cases}.$$

由(MOP)的 ϵ -真有效解的定义以及图1可得,(MOP)的 ϵ -真有效解集为 $[-3, 1)$ 。此外,令:

$$k=1, \delta_2 = f_2(\hat{x}), \hat{x}=1, \mu_2=1, \hat{s}_2=0, \epsilon_1=0.1, \epsilon_2=0.$$

则 $(\text{SOP})_{\delta-k}^+$ 的可行域为 $\{(x, s) \mid f_2(x) + s_2 \leq f_2(\hat{x}), x \in [1, 4], s_2 \geq 0\}$ 。

进一步,由 $f_2(x)$ 的表达式可以知道,可行域中 x 可以取的范围为 $[1, 4]$, $\hat{s}_2$ 只能取 0。此外,可以验证 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{\delta-k}^+$ 的 ϵ -最优解。显然 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{\delta-k}^+$ 的可行解且 $\hat{s} = \hat{s}_2$ 只能取 0, $(\text{SOP})_{\delta-k}^+$ 的目标函数表达式以及 $f_1(x)$ 在 $[1, 4]$ 单调递增可知, $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{\delta-k}^+$ 的 ϵ -最优解,但值得注意的是 $\hat{x}$ 不是(MOP)的 ϵ -真有效解。

下面的例子说明:本文给出的已知条件是合理的且利用本文所建立的结果可以判断多目标优化问题的可行解是否是其 ϵ -真有效解。

例2 考虑如下多目标优化问题:

$$\begin{aligned} (\text{MOP}) \quad & \min f(x) = (f_1(x), f_2(x)), \\ \text{s. t.} \quad & x \in X = [-3, 4]. \end{aligned}$$

$$\text{其中: } f_1(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [-3, 1) \\ (x-1)^2 + 3, & x \in [1, 4] \end{cases}, f_2(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{7}{9}x\right)^2, & x \in [-3, 1) \cup (3, 4] \\ 0, & x \in [1, 3] \end{cases}.$$

由(MOP)的 ϵ -真有效解的定义以及图2可得,(MOP)的 ϵ -真有效解集为 $[-3, 1]$ 。此外,令:

$$k=1, \delta_2 = f_2(\hat{x}), \hat{x}=1, \mu_2=1, \hat{s}_2=0, \epsilon_1=0, \epsilon_2=0.1.$$

则 $(\text{SOP})_{\delta-k}^+$ 的可行域为 $\{(x, s) \mid f_2(x) + s_2 \leq f_2(\hat{x}), x \in [1, 3], s_2 \geq 0\}$ 。

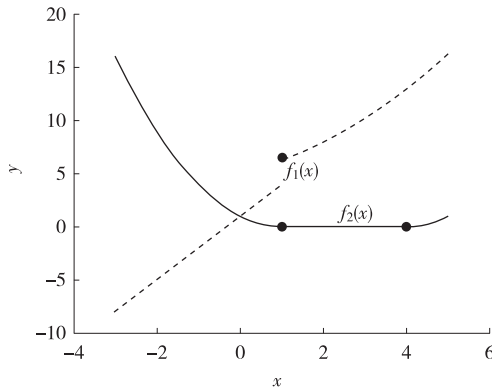


图1 (MOP)的目标函数图像

Fig. 1 Image of objective functions for (MOP)

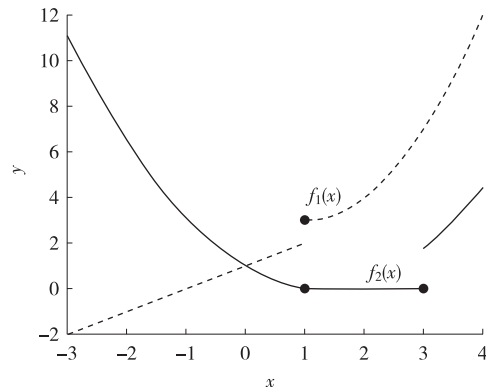


图2 (MOP)的目标函数图像

Fig. 2 Image of objective functions for (MOP)

进一步,由 $f_2(x)$ 的表达式可以知道,可行域中 x 可以取的范围为 $[1, 3]$, $\hat{s}_2$ 只能取 0。此外,可以验证 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{\delta-k}^+$ 的 ϵ -最优解。显然 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{\delta-k}^+$ 的可行解,且由 $\hat{s} = \hat{s}_2$ 只能取 0, $(\text{SOP})_{\delta-k}^+$ 的目标函数表达式以及 $f_1(x)$ 在 $[1, 3]$ 单调递增可知, $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(\text{SOP})_{\delta-k}^+$ 的 ϵ -最优解,且 $\hat{x}$ 的确是(MOP)的 ϵ -真有效解。

参考文献:

- [1] KUTATELADZE S S. Convex ϵ -programming[J]. Soviet Mathematics Doklady, 1979, 20: 391-393.
- [2] LORIDAN P. ϵ -solutions in vector minimization problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1984, 43(2): 265-276.

- [3] WHITE D J. Epsilon efficiency[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1986, 49(2): 319-337.
- [4] HELBIG S, PATEVA D. On several concepts for ϵ -efficiency[J]. Operations Research, 1994, 16(3): 179-186.
- [5] RONG W D, WU Y N. ϵ -weak minimal solutions of vector optimization problems with set-valued maps[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2000, 106(3): 569-579.
- [6] GUTIÉRREZ C, JIMÉNEZ B, NOVO V. On approximate efficiency in multiobjective programming[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2006, 64(1): 165-185.
- [7] GUTIÉRREZ C, JIMÉNEZ B, NOVO V. Optimality conditions via scalarization for a new ϵ -efficiency concept in vector optimization problems[J]. European Journal of Operational Research, 2010, 201(1): 11-22.
- [8] LI Z F, WANG S Y. ϵ -approximate solutions in multiobjective optimization[J]. Optimization, 1998, 44(2): 161-174.
- [9] LIU J C. ϵ -properly efficient solutions to nondifferentiable multiobjective programming problems[J]. Applied Mathematics Letters, 1999, 12(6): 109-113.
- [10] RONG W D, MA Y. ϵ -properly efficient solutions of vector optimization problems with set-valued maps[J]. Operational Research Transactions, 2000, 4(4): 21-32.
- [11] GHAZNAVI-GHOSONI B A, KHORRAM E, SOLEIMANI-DAMANEH M. Scalarization for characterization of approximate strong/weak/proper efficiency in multi-objective optimization[J]. Optimization, 2013, 62(6): 703-720.
- [12] 夏远梅, 赵克全. 向量优化中 ϵ -真有效解的非线性标量化性质[J]. 运筹学学报, 2014, 18(4): 58-64.
XIA Y M, ZHAO K Q. Nonlinear scalarization characterizations for ϵ -properly efficient solutions in vector optimizations[J]. Operations Research Transaction, 2014, 18(4): 58-64.
- [13] 赵克全, 杨新民, 夏远梅. 多目标优化问题的完全标量化[J]. 中国科学: 数学, 2021, 51(2): 411-424.
ZHAO K Q, YANG X M, XIA Y M. Complete scalarization of multi-objective optimization problems[J]. Scientia Sinica Mathematica, 2021, 51(2): 411-424.
- [14] XIA Y M, YANG X M, ZHAO K Q. Remarks on quasi interior in vector optimization[J]. Pacific Journal of Optimization, 2019, 15(4): 583-591.
- [15] XIA Y M, YANG X M, ZHAO K Q. A combined scalarization method for multi-objective optimization problems[J/OL]. (2020-04-01) [2020-11-25]. Journal of Industrial and Management Optimization. <http://www.aims sciences.org/article/doi/10.3934/jimo.2020088>.
- [16] GHAZNAVI-GHOSONI B A, KHORRAM E, SOLEIMANI-DAMANEH M. Scalarization for characterization of approximate strong/weak/proper efficiency in multi-objective optimization[J]. Optimization, 2013, 62(6): 703-720.
- [17] EHRGOTT M, RUZIKA S. Improved ϵ -constraint method for multiobjective programming[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2008, 138(3): 375-396.

Operations Research and Cybernetics

A Note on ϵ -Properly Efficient Solutions in Multi-Objective Optimization

XIA Dandan, CHEN Meishan, LIU Xuewen

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [Purposes] The scalarization properties of ϵ -properly efficient solutions for multi-objective optimization is studied by using the improved constraint scalarization method. [Methods] Based on the existing research, it firstly analyses the scalarization result of ϵ -properly efficient solutions, and two conditions are contradictory in the result. Furthermore, the result is modified by introducing new conditions. [Findings] Using the improved constrained scalarization method, the scalarization result of the ϵ -properly efficient solutions in the multi-objective optimization problem are established under the new conditions. In addition, some examples are given to illustrate the main results. [Conclusions] The conclusion obtained not only revise the result in existing literature, but also provide new ideas for the study of the properties of solutions in multi-objective optimization problems.

Keywords: improved constraint scalarization method; multi-objective optimization problem; ϵ -properly efficient solutions

(责任编辑 黄 颖)