

具有时变时滞的离散 T-S 模糊随机系统的耗散性分析^{*}

余莉, 罗洪林

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】研究具有时变时滞的离散 T-S 模糊随机系统的耗散性分析问题, 获得具有更低保守性的条件。【方法】构造新的模糊 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 并且利用离散的 Jensen 不等式。【结果】得到了该系统随机耗散的条件。【结论】通过 Matlab 求解, 验证了此方法的有效性, 并且与已有文献相比, 此方法有更低的保守性, 且计算复杂度有所降低。

关键词: T-S 模糊系统; 耗散性; 时变时滞; 随机扰动

中图分类号: O231.2; O231.3

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2021)02-0007-07

耗散系统是 Willems^[1]在 1972 年提出来的, 由于耗散理论提供了一个基于能量相关考虑的输入输出描述的控制系统设计和分析框架, 所以该理论在系统理论、电路设计、网络综合和控制理论等领域有广泛的应用, 引起了众多研究者的关注。近些年来, 对于不同系统的耗散性分析研究已有很多的成果, 如随机时滞模糊系统^[2]、T-S 模糊随机系统^[3]、离散广义系统^[4]及切换 T-S 模糊系统^[5]。然而对于离散 T-S 模糊随机系统的耗散性分析仍有待研究。

目前, T-S 模糊系统由于可以为非线性系统的建模提供有效手段而受到广泛关注。基于 T-S 模糊模型的常用方法有: T-S 模糊模型用于描述或逼近非线性系统。模糊模型由一系列模糊 IF-THEN 规则描述, 这些规则表示系统的局部线性输入输出关系。利用隶属度函数对这些局部线性模型进行平滑综合, 得到系统的整体模糊模型。然后, 将已有的线性系统理论应用到非线性系统中。有关 T-S 模糊系统的研究取得了丰硕的成果。例如, 文献[6-8]进行了稳定性分析, 文献[9-10]研究了故障检测, 文献[11]对无源性分析进行了研究。

实际上在大多数系统中, 时滞通常都会造成系统性能的不稳定, 因此与时滞有关系统的研究受到了广泛地关注, 现有成果可以分为两类: 与时滞无关的文献^[12-13], 与时滞有关的文献^[14-15]。前者与延迟的大小无关, 后者与延迟的大小有关。另外, 由于大多数工业设备都暴露在含有各种电波的复杂环境中, 这些设备都有可能受到随机噪声的影响。有关随机系统的研究也取得了丰硕的成果^[16-18]。

本文针对具有时变时滞的离散 T-S 模糊随机系统, 构造了新的模糊 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 并且利用离散的 Jensen 不等式来研究它的耗散性分析问题, 首先得到参数化线性矩阵不等式, 然后将它转化为可直接求解的严格线性矩阵不等式^[19], 从而得到该系统随机耗散的条件。

1 预备知识

符号说明: $\mathbf{X}^T$ 表示矩阵 $\mathbf{X}$ 的转置; $\mathbf{X}^{-1}$ 表示矩阵 $\mathbf{X}$ 的逆; $\mathbf{R}^n$ 表示 n 维实欧氏空间; $\mathbf{R}^{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 矩阵集合; $\mathbf{I}_{m \times n}$ 和 $\mathbf{0}_{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 维单位矩阵和 $m \times n$ 维零矩阵; $\mathbf{P} > 0$ (≥ 0) 表示 $\mathbf{P}$ 是对称正定矩阵 (对称半正定矩阵); $\text{diag}\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n\}$ 表示由 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ 组成的块对角矩阵; $E\{n\}$ 表示 n 取数学期望; 矩阵中的 $*$ 表示对应块的矩阵, 如 $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ * & \mathbf{C} \end{bmatrix}$ 中的 $*$ 表示 $\mathbf{B}^T$ 。

^{*} 收稿日期: 2020-08-14 修回日期: 2020-12-08 网络出版时间: 2021-04-07 15:42

资助项目: 国家自然科学基金 (No. 11601050; No. 11771064); 重庆市科学技术局自然科学基金 (No. cstc2016jcyjA0116)

第一作者简介: 余莉, 女, 研究方向为最优控制, E-mail: 1194564324@qq.com; 通信作者: 罗洪林, 男, 教授, 博士, E-mail: luohonglin@cqnu.edu.cn

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20210407.1534.020.html>

考虑如下具有时变时滞的离散 T-S 模糊随机系统:

被控对象规则. 规则 i : 如果 $\theta_1(k)$ 是 μ_{i1} , 且 $\theta_2(k)$ 是 $\mu_{i2}, \dots, \theta_p(k)$ 是 μ_{ip} , 则:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(k) + \mathbf{A}_{di} \mathbf{x}(k-h(k)) + \mathbf{U}_i \boldsymbol{\omega}(k) + [\mathbf{E}_i \mathbf{x}(k) + \mathbf{E}_{di} \mathbf{x}(k-h(k))] \boldsymbol{\varpi}(k) \\ \mathbf{z}(k) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}(k) + \mathbf{C}_{di} \mathbf{x}(k-h(k)) + \mathbf{V}_i \boldsymbol{\omega}(k) \\ \mathbf{x}(l) = \boldsymbol{\phi}(l), l = -h_2, -h_2+1, \dots, 0, i \in S \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^n$ 是状态向量; $\boldsymbol{\omega}(k) \in \mathbf{R}^q$ 是确定性的外部输入; $\boldsymbol{\varpi}(k)$ 是一个均方为 0 的 1 维高斯白噪声序列, 概率分布空间为 $(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ 且满足 $E\{\boldsymbol{\varpi}(k)\} = 0, E\{\boldsymbol{\varpi}^2(k)\} = 1, E\{\boldsymbol{\varpi}(l)\boldsymbol{\varpi}(k)\} = 0, l \neq k; \mathbf{z}(k) \in \mathbf{R}^q$ 是可测量输出向量; $h(k)$ 是时滞变量, 满足 $1 \leq h_1 \leq h(k) \leq h_2$ 且为正整数, 这里的 h_1 和 h_2 分别表示时滞的下限和上限. $\{\boldsymbol{\phi}(l), l = -h_2, -h_2+1, \dots, 0\}$ 为初始条件; μ_{ij} 为模糊集; $S = \{1, 2, \dots, r\}$, r 为模糊规则数; $\boldsymbol{\theta}(k) = (\theta_1(k), \theta_2(k), \dots, \theta_p(k))$ 为前提向量. $\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_{di}, \mathbf{C}_i, \mathbf{C}_{di}, \mathbf{E}_i, \mathbf{E}_{di}, \mathbf{U}_i, \mathbf{V}_i$ 为已知的常数矩阵. 模糊基底函数 $\lambda_i(\boldsymbol{\theta}(k)) =$

$$\frac{\prod_{j=1}^p \mu_{ij}(\theta_j(k))}{\sum_{i=1}^r \prod_{j=1}^p \mu_{ij}(\theta_j(k))}, i \in S, \text{ 其中: } \mu_{ij}(\theta_j(k)) \text{ 表示 } \theta_j(k) \text{ 在 } \mu_{ij} \text{ 中的隶属度. 为简化书写过程, 在后面的描述中将省略变量后面的符号“}(\cdot)\text{” (例如, } \lambda_i \text{ 表示 } \lambda_i(\boldsymbol{\theta}(k))\text{). 对任意的 } i \in S \text{ 及整数 } k, \lambda_i(\boldsymbol{\theta}(k)) \geq 0, \sum_{i=1}^r \lambda_i(\boldsymbol{\theta}(k)) = 1.$$

将系统(1)去模糊化后可表示为:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \sum_{i=1}^r \lambda_i [\mathbf{A}_i \mathbf{x}(k) + \mathbf{A}_{di} \mathbf{x}(k-h(k)) + \mathbf{U}_i \boldsymbol{\omega}(k)] + \sum_{i=1}^r \lambda_i [\mathbf{E}_i \mathbf{x}(k) + \mathbf{E}_{di} \mathbf{x}(k-h(k))] \boldsymbol{\varpi}(k) \\ \mathbf{z}(k) = \sum_{i=1}^r \lambda_i [\mathbf{C}_i \mathbf{x}(k) + \mathbf{C}_{di} \mathbf{x}(k-h(k)) + \mathbf{V}_i \boldsymbol{\omega}(k)] \end{cases} \quad (2)$$

以上系统可以简写为:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}(k) \mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{A}}_d(k) \mathbf{x}(k-h(k)) + \bar{\mathbf{U}}(k) \boldsymbol{\omega}(k) + [\bar{\mathbf{E}}(k) \mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{E}}_d(k) \mathbf{x}(k-h(k))] \boldsymbol{\varpi}(k) \\ \mathbf{z}(k) = \bar{\mathbf{C}}(k) \mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{C}}_d(k) \mathbf{x}(k-h(k)) + \bar{\mathbf{V}}(k) \boldsymbol{\omega}(k) \end{cases} \quad (2)$$

其中: $\bar{\mathbf{A}}(k) := \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{A}_i, \bar{\mathbf{A}}_d(k) := \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{A}_{di}, \bar{\mathbf{E}}(k) := \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{E}_i, \bar{\mathbf{E}}_d(k) := \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{E}_{di}, \bar{\mathbf{C}}(k) := \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{C}_i, \bar{\mathbf{C}}_d(k) := \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{C}_{di}, \bar{\mathbf{U}}(k) := \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{U}_i, \bar{\mathbf{V}}(k) := \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{V}_i$.

以下定义和引理在本文的耗散性分析中有至关重要的作用.

定义 1^[3] 系统(2)的能量贮存函数定义为 $J(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{z}, T) = \langle \mathbf{z}, \mathbf{X} \mathbf{z} \rangle_T + 2 \langle \mathbf{z}, \mathbf{Y} \boldsymbol{\omega} \rangle_T + \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{Z} \boldsymbol{\omega} \rangle_T, \forall T \geq 0$, 其中: $\mathbf{X},$

$\mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ 分别为适当维数的实矩阵, $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Z}$ 为对称矩阵, 且 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_T = \sum_{k=0}^T \mathbf{u}^T(k) \mathbf{v}(k)$.

定义 2^[3] 在零初始条件下, 如果对任意的 $\boldsymbol{\omega}(k) \in \ell_2[0, \infty]$, 能量贮存函数满足 $E\{J(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{z}, T)\} \geq 0, \forall T \geq 0$, 则系统(2)称为是随机 $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ -耗散. 进一步, 如果对一个足够小的标量 $\alpha > 0$, 能量贮存函数满足 $E\{J(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{z}, T)\} \geq \alpha \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle_T, \forall T \geq 0$, 则系统(2)称为是严格随机 $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ - α -耗散.

注 1 有关耗散性的定义最初是应用于确定性系统的, 由于本文中所讨论的系统具有随机性, 所以采用取期望的方法将它推广到随机耗散性.

引理 1^[3] (Jensen 不等式) 给定正定矩阵 $\mathbf{M} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 整数 r_1 与 r_2 满足 $r_2 > r_1$, 以及任意的向量函数 $\mathbf{x}(k) \in$

$\mathbf{R}^n$, 则有 $\left(\sum_{i=r_1}^{r_2} \mathbf{x}^T(i) \right) \mathbf{M} \left(\sum_{i=r_1}^{r_2} \mathbf{x}(i) \right) \leq (r_2 - r_1 + 1) \left(\sum_{i=r_1}^{r_2} \mathbf{x}^T(i) \mathbf{M} \mathbf{x}(i) \right)$.

引理 2^[8] (Schur 补引理) 给定一个对称矩阵 $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} \\ * & \mathbf{X}_{22} \end{bmatrix}$, 如下 3 个条件是等价的: 1) $\mathbf{X} < 0$;

2) $\mathbf{X}_{11} < 0, \mathbf{X}_{22} - \mathbf{X}_{12}^T \mathbf{X}_{11}^{-1} \mathbf{X}_{12} < 0$; 3) $\mathbf{X}_{22} < 0, \mathbf{X}_{11} - \mathbf{X}_{12} \mathbf{X}_{22}^{-1} \mathbf{X}_{12}^T < 0$.

2 耗散性分析

在本节中,详细分析了系统(2)的耗散性问题。为了使得分析更加简洁,给出如下定义:

$$\begin{aligned} e_1 &:= [\mathbf{I}_n \quad \mathbf{0}_{n \times 3n} \quad \mathbf{0}_{n \times n}]; e_2 := [\mathbf{0}_{n \times n} \quad \mathbf{I}_n \quad \mathbf{0}_{n \times 3n}]; e_3 := [\mathbf{0}_{n \times 2n} \quad \mathbf{I}_n \quad \mathbf{0}_{n \times 2n}]; e_4 := [\mathbf{0}_{n \times 3n} \quad \mathbf{I}_n \quad \mathbf{0}_{n \times n}]; \\ e_5 &:= [\mathbf{0}_{n \times 3n} \quad \mathbf{0}_{n \times n} \quad \mathbf{I}_n] \rho_1(k) := \bar{\mathbf{A}}(k)e_1 + \bar{\mathbf{A}}_d(k)e_3 + \bar{\mathbf{U}}(k)e_5 + \bar{\mathbf{E}}(k)e_1 + \bar{\mathbf{E}}_d(k)e_3; \\ \rho_2(k) &:= [\bar{\mathbf{A}}(k) - \mathbf{I}]e_1 + \bar{\mathbf{A}}_d(k)e_3 + \bar{\mathbf{U}}(k)e_5 + \bar{\mathbf{E}}(k)e_1 + \bar{\mathbf{E}}_d(k)e_3; \rho_3(k) := \bar{\mathbf{C}}(k)e_1 + \bar{\mathbf{C}}_d(k)e_3 + \bar{\mathbf{V}}(k)e_5; \\ \xi(k) &:= [\mathbf{x}^T(k) \quad \mathbf{x}^T(k-h_1) \quad \mathbf{x}^T(k-h(k)) \quad \mathbf{x}^T(k-h_2) \quad \boldsymbol{\omega}^T(k)]^T; \boldsymbol{\delta}(k) := \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k). \end{aligned}$$

定理 1 给定正整数 h_1, h_2 , 标量 $\alpha > 0$, 如果存在矩阵 $\mathbf{P} > 0, \mathbf{Q}_1 > 0, \mathbf{Q}_2 > 0, \mathbf{Q}_3 > 0, \mathbf{R}_1 > 0, \mathbf{R}_2 > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}(k) & \boldsymbol{\Gamma}(k) \\ * & -\mathbf{A} \end{bmatrix} < 0. \quad (3)$$

成立, 则系统(2)是严格随机 $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ - α -耗散。其中:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}(k) &:= [\rho_1^T(k)\mathbf{P} \quad h_1\rho_2^T(k)\mathbf{R}_1 \quad h_{12}\rho_2^T(k)\mathbf{R}_2 \quad \rho_3^T(k)]; \mathbf{A} := \text{diag}\{\mathbf{P}, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, -\mathbf{X}^{-1}\}; h_{12} := h_2 - h_1; \\ \boldsymbol{\Phi}(k) &:= -e_1^T\mathbf{P}e_1 + e_1^T[\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + (1 + h_{12})\mathbf{Q}_3]e_1 - e_2^T\mathbf{Q}_1e_2 - e_3^T\mathbf{Q}_3e_3 - e_4^T\mathbf{Q}_2e_4 - (e_1 - e_2)^T\mathbf{R}_1(e_1 - e_2) - \\ &\quad (e_2 - e_4)^T\mathbf{R}_2(e_2 - e_4) - 2e_5^T\mathbf{Y}\rho_3(k) - e_5^T(\mathbf{Z} - \alpha\mathbf{I})e_5. \end{aligned}$$

证明 对于系统(2), 构造一个 Lyapunov-Krasovskii 泛函 $\mathbf{V}(k) := \mathbf{V}_1(k) + \mathbf{V}_2(k) + \mathbf{V}_3(k) + \mathbf{V}_4(k)$, 其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1(k) &:= \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k); \mathbf{V}_2(k) := \sum_{i=k-h_1}^{k-1} \mathbf{x}^T(i)\mathbf{Q}_1\mathbf{x}(i) + \sum_{i=k-h_2}^{k-1} \mathbf{x}^T(i)\mathbf{Q}_2\mathbf{x}(i); \\ \mathbf{V}_3(k) &:= \sum_{i=k-h(k)}^{k-1} \mathbf{x}^T(i)\mathbf{Q}_3\mathbf{x}(i) + \sum_{j=-h_2+1}^{-h_1} \sum_{i=k+j}^{k-1} \mathbf{x}^T(i)\mathbf{Q}_3\mathbf{x}(i); \\ \mathbf{V}_4(k) &:= \sum_{j=-h_1}^{-1} \sum_{i=k+j}^{k-1} h_{12}\boldsymbol{\delta}^T(i)\mathbf{R}_1\boldsymbol{\delta}(i) + \sum_{j=-h_2}^{-h_1-1} \sum_{i=k+j}^{k-1} h_{12}\boldsymbol{\delta}^T(i)\mathbf{R}_2\boldsymbol{\delta}(i). \end{aligned}$$

计算 $\mathbf{V}(k)$ 沿系统(2)的增量, 并求取期望, 则可得到 $E\{\Delta\mathbf{V}(k)\} = \sum_{i=1}^4 E\{\mathbf{V}_i(k)\}$, 其中:

$$\begin{aligned} E\{\Delta\mathbf{V}_1(k)\} &= E\{\mathbf{V}_1(k+1) - \mathbf{V}_1(k)\} = \\ &= E\{[\bar{\mathbf{A}}(k)\mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{A}}_d(k)\mathbf{x}(k-h(k)) + \bar{\mathbf{U}}(k)\boldsymbol{\omega}(k) + [\bar{\mathbf{E}}(k)\mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{E}}_d(k)\mathbf{x}(k-h(k))]\boldsymbol{\omega}(k)]^T \times \\ &\quad \mathbf{P}[\bar{\mathbf{A}}(k)\mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{A}}_d(k)\mathbf{x}(k-h(k)) + \bar{\mathbf{U}}(k)\boldsymbol{\omega}(k) + [\bar{\mathbf{E}}(k)\mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{E}}_d(k)\mathbf{x}(k-h(k))]\boldsymbol{\omega}(k)] - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k)\} = \\ &= \xi^T(k)[\rho_1^T(k)\mathbf{P}\rho_1(k) - e_1^T\mathbf{P}e_1]\xi(k), \\ E\{\Delta\mathbf{V}_2(k)\} &= E\{\mathbf{V}_2(k+1) - \mathbf{V}_2(k)\} = \\ &= E\{\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}_1\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^T(k-h_1)\mathbf{Q}_1\mathbf{x}(k-h_1) + \mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}_2\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^T(k-h_2)\mathbf{Q}_2\mathbf{x}(k-h_2)\} = \\ &= \xi^T(k)[e_1^T\mathbf{Q}_1e_1 - e_2^T\mathbf{Q}_1e_2 + e_1^T\mathbf{Q}_2e_1 - e_4^T\mathbf{Q}_2e_4]\xi(k), \\ E\{\Delta\mathbf{V}_3(k)\} &= E\{\mathbf{V}_3(k+1) - \mathbf{V}_3(k)\} = \\ &= E\{\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}_3\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^T(k-h(k))\mathbf{Q}_3\mathbf{x}(k-h(k)) + \sum_{i=k+1-h(k+1)}^{k-1} \mathbf{x}^T(i)\mathbf{Q}_3\mathbf{x}(i) - \\ &\quad \sum_{i=k+1-h(k)}^{k-1} \mathbf{x}^T(i)\mathbf{Q}_3\mathbf{x}(i) + h_{12}\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}_3\mathbf{x}(k) - \sum_{i=k-h_2+1}^{k-h_1} \mathbf{x}^T(i)\mathbf{Q}_3\mathbf{x}(i)\} \leq \\ &= E\{\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}_3\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^T(k-h(k))\mathbf{Q}_3\mathbf{x}(k-h(k)) + \sum_{i=k-h_2+1}^{k-h_1} \mathbf{x}^T(i)\mathbf{Q}_3\mathbf{x}(i) + h_{12}\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}_3\mathbf{x}(k) - \sum_{i=k-h_2+1}^{k-h_1} \mathbf{x}^T(i)\mathbf{Q}_3\mathbf{x}(i)\} = \\ &= E\{\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}_3\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^T(k-h(k))\mathbf{Q}_3\mathbf{x}(k-h(k)) + h_{12}\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}_3\mathbf{x}(k)\} = \\ &= \xi^T(k)[e_1^T\mathbf{Q}_3e_1 - e_3^T\mathbf{Q}_3e_3 + h_{12}e_1^T\mathbf{Q}_3e_1]\xi(k), \\ E\{\Delta\mathbf{V}_4(k)\} &= E\{\mathbf{V}_4(k+1) - \mathbf{V}_4(k)\} = \end{aligned}$$

$$E\{h_1^2 \delta^T(k) \mathbf{R}_1 \delta(k) - \sum_{i=k-h_1}^{k-1} h_1 \delta^T(i) \mathbf{R}_1 \delta(i) + h_{12}^2 \delta^T(k) \mathbf{R}_2 \delta(k) - \sum_{i=k-h_2}^{k-h_1-1} h_{12} \delta^T(i) \mathbf{R}_2 \delta(i)\}.$$

利用引理 1,可以得到:

$$\begin{aligned} - \sum_{i=k-h_1}^{k-1} h_1 \delta^T(i) \mathbf{R}_1 \delta(i) &\leq - \left[\sum_{i=k-h_1}^{k-1} \delta(i) \right]^T \mathbf{R}_1 \left[\sum_{i=k-h_1}^{k-1} \delta(i) \right] = - [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k-h_1)]^T \mathbf{R}_1 [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k-h_1)], \\ - \sum_{i=k-h_2}^{k-h_1-1} h_{12} \delta^T(i) \mathbf{R}_2 \delta(i) &\leq - \left[\sum_{i=k-h_2}^{k-h_1-1} \delta(i) \right]^T \mathbf{R}_2 \left[\sum_{i=k-h_2}^{k-h_1-1} \delta(i) \right] = \\ &= - [\mathbf{x}(k-h_1) - \mathbf{x}(k-h_2)]^T \mathbf{R}_2 [\mathbf{x}(k-h_1) - \mathbf{x}(k-h_2)]. \end{aligned}$$

所以有:

$$\begin{aligned} E\{\Delta \mathbf{V}_4(k)\} &\leq E\{h_1^2 \delta^T(k) \mathbf{R}_1 \delta(k) + h_{12}^2 \delta^T(k) \mathbf{R}_2 \delta(k) - [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k-h_1)]^T \mathbf{R}_1 [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k-h_1)] - \\ &\quad [\mathbf{x}(k-h_1) - \mathbf{x}(k-h_2)]^T \mathbf{R}_2 [\mathbf{x}(k-h_1) - \mathbf{x}(k-h_2)]\} = \\ &= \xi^T(k) [\rho_1^T(k) (h_1^2 \mathbf{R}_1 + h_{12}^2 \mathbf{R}_2) \rho_2(k) - (e_1 - e_2)^T \mathbf{R}_1 (e_1 - e_2) - (e_2 - e_4)^T \mathbf{R}_2 (e_2 - e_4)] \xi(k). \end{aligned}$$

故 $E\{\Delta \mathbf{V}(k)\} \leq \xi^T(k) \Omega(k) \xi(k)$, 其中:

$$\begin{aligned} \Omega(k) &= \rho_1^T(k) \mathbf{P} \rho_1(k) - e_1^T \mathbf{P} e_1 + e_1^T [\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + (1 + h_{12}) \mathbf{Q}_3] e_1 - e_2^T \mathbf{Q}_1 e_2 - e_3^T \mathbf{Q}_3 e_3 - e_4^T \mathbf{Q}_2 e_4 + \\ &\quad \rho_2^T(k) (h_1^2 \mathbf{R}_1 + h_{12}^2 \mathbf{R}_2) \rho_2(k) - (e_1 - e_2)^T \mathbf{R}_1 (e_1 - e_2) - (e_2 - e_4)^T \mathbf{R}_2 (e_2 - e_4). \end{aligned}$$

现在考虑如下的不等式:

$$\begin{aligned} E\{\Delta \mathbf{V}(k)\} - E\{\mathbf{z}^T(k) \mathbf{X} \mathbf{z}(k) + 2 \omega^T(k) \mathbf{Y} \mathbf{z}(k) + \omega^T(k) \mathbf{Z} \omega(k)\} + \alpha E\{\omega^T(k) \omega(k)\} &\leq \\ \xi^T(k) \Omega(k) \xi(k) - \xi^T(k) [\rho_3^T(k) \mathbf{X} \rho_3(k) + 2 e_5^T \mathbf{Y} \rho_3(k) + e_5^T (\mathbf{Z} - \alpha \mathbf{I}) e_5] \xi(k) &= \xi^T(k) \bar{\Omega}(k) \xi(k). \end{aligned} \quad (4)$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}(k) &= \rho_1^T(k) \mathbf{P} \rho_1(k) - e_1^T \mathbf{P} e_1 + e_1^T [\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + (1 + h_{12}) \mathbf{Q}_3] e_1 - e_2^T \mathbf{Q}_1 e_2 - e_3^T \mathbf{Q}_3 e_3 - e_4^T \mathbf{Q}_2 e_4 + \\ &\quad \rho_2^T(k) (h_1^2 \mathbf{R}_1 + h_{12}^2 \mathbf{R}_2) \rho_2(k) - (e_1 - e_2)^T \mathbf{R}_1 (e_1 - e_2) - (e_2 - e_4)^T \mathbf{R}_2 (e_2 - e_4) - \\ &\quad \rho_3^T(k) \mathbf{X} \rho_3(k) - 2 e_5^T \mathbf{Y} \rho_3(k) - e_5^T (\mathbf{Z} - \alpha \mathbf{I}) e_5. \end{aligned}$$

由(3)式和引理 2 可知 $\bar{\Omega}(k) = \Phi(k) - \Gamma(k)(-\Lambda)^{-1} \Gamma^T(k) < 0$, 那么对于不等式(4), 则有:

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{z}^T(k) \mathbf{X} \mathbf{z}(k) + 2 \omega^T(k) \mathbf{Y} \mathbf{z}(k) + \omega^T(k) \mathbf{Z} \omega(k)\} - \alpha E\{\omega^T(k) \omega(k)\} - E\{\mathbf{V}(k+1)\} + E\{\mathbf{V}(k)\} &> 0, \\ E\{\mathbf{V}(k)\} + E\{J(\omega, \mathbf{z}, T)\} &> \alpha E\{\langle \omega, \omega \rangle_T\} + E\{\mathbf{V}(k+1)\}. \end{aligned} \quad (5)$$

因此对于任意的正整数 T , 将(5)式左右两端从 $k=0$ 到 $k=T-1$ 相加, 可得到:

$$E\{\mathbf{V}(0)\} + E\{J(\omega, \mathbf{z}, T)\} > \alpha E\{\langle \omega, \omega \rangle_T\} + E\{\mathbf{V}(T)\}.$$

在零初始条件下, 有 $E\{J(\omega, \mathbf{z}, T)\} > \alpha \langle \omega, \omega \rangle_T$.

故由定义 2 可知系统(2)是严格随机 $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ - α -耗散。

证毕

注 2 注意到, 对比文献[3]中所用的方法, 本文所构造的 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 在减少了计算复杂度的同时也降低了保守性。

文章得到了系统耗散性的充分条件, 但不能够直接用来分析模糊系统, 因为定理 1 的不等式中含有时变参数, 只能在系统实际运行时获得。所以需要将参数化线性矩阵不等式转化为严格线性矩阵不等式^[19]。

定理 2 给定正整数 h_1, h_2 , 标量 $\alpha > 0$, 如果存在矩阵 $\mathbf{P} > 0, \mathbf{Q}_1 > 0, \mathbf{Q}_2 > 0, \mathbf{Q}_3 > 0, \mathbf{R}_1 > 0, \mathbf{R}_2 > 0$, 使得不等式

$$\begin{bmatrix} \Phi_i & \Gamma_i \\ * & -\Lambda \end{bmatrix} < 0, i \in S \text{ 成立, 则系统(2)是严格随机 } (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})\text{-}\alpha\text{-耗散。其中:}$$

$$\begin{aligned} \rho_{1i} &:= \mathbf{A}_i e_1 + \mathbf{A}_{di} e_3 + \mathbf{U}_i e_5 + \mathbf{E}_i e_1 + \mathbf{E}_{di} e_3; \rho_{2i} := [\mathbf{A}_i - \mathbf{I}] e_1 + \mathbf{A}_{di} e_3 + \mathbf{U}_i e_5 + \mathbf{E}_i e_1 + \mathbf{E}_{di} e_3, \\ \rho_{3i} &:= \mathbf{C}_i e_1 + \mathbf{C}_{di} e_3 + \mathbf{V}_i e_5; \Gamma_i := [\rho_{1i}^T \mathbf{P} \quad h_1 \rho_{2i}^T \mathbf{R}_1 \quad h_{12} \rho_{2i}^T \mathbf{R}_2 \quad \rho_{3i}^T]; \Lambda := \text{diag}\{\mathbf{P}, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, -\mathbf{X}^{-1}\}, \\ \Phi_i &:= -e_1^T \mathbf{P} e_1 + e_1^T [\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + (1 + h_{12}) \mathbf{Q}_3] e_1 - e_2^T \mathbf{Q}_1 e_2 - e_3^T \mathbf{Q}_3 e_3 - e_4^T \mathbf{Q}_2 e_4 - (e_1 - e_2)^T \mathbf{R}_1 (e_1 - e_2) - \\ &\quad (e_2 - e_4)^T \mathbf{R}_2 (e_2 - e_4) - 2 e_5^T \mathbf{Y} \rho_{3i} - e_5^T (\mathbf{Z} - \alpha \mathbf{I}) e_5. \end{aligned}$$

证明 定理1中(3)式可转化为 $\begin{bmatrix} \Phi(k) & \Gamma(k) \\ * & -\Lambda \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(k)) \begin{bmatrix} \Phi_i & \Gamma_i \\ * & -\Lambda \end{bmatrix}$, 所以, 如果定理2的线性矩阵不等式成立, 那么定理1条件就一定满足, 故系统(2)是严格随机 (X, Y, Z) - α -耗散。证毕

注3 定理2所得到的系统耗散性条件已被转化为严格线性矩阵不等式, 即对于任意的 $\theta(k)$, 满足定理2条件的系统必定是耗散的。

对于一个无随机噪声的系统, 结果将会有所简化, 那么相对应的系统表示为:

$$\begin{cases} x(k+1) = \bar{A}(k)x(k) + \bar{A}_d(k)x(k-h(k)) + \bar{U}(k)\omega(k) \\ z(k) = \bar{C}(k)x(k) + \bar{C}_d(k)x(k-h(k)) + \bar{V}(k)\omega(k) \end{cases} \quad (6)$$

则可以得到以下推论:

推论1 给定正整数 h_1, h_2 , 标量 $\alpha > 0$, 如果存在矩阵 $P > 0, Q_1 > 0, Q_2 > 0, Q_3 > 0, R_1 > 0, R_2 > 0$, 使得不等式 $\begin{bmatrix} \Phi_i & \Gamma_i \\ * & -\Lambda \end{bmatrix} < 0, i \in S$ 成立, 则系统(6)是严格 (X, Y, Z) - α -耗散。其中: $\rho_{1i} := A_i e_1 + A_{di} e_3 + U_i e_5; \rho_{2i} := [A_i - I] e_1 + A_{di} e_3 + U_i e_5; \psi_i := [\rho_{1i}^T P \quad h_1 \rho_{2i}^T R_1 \quad h_{12} \rho_{2i}^T R_2 \quad \rho_{3i}^T]$ 。

此推论是定理2无随机扰动情况下的一个特例, 证明方法相同, 此处省略。

3 数值实验

本节对定理2和推论1进行数值实验, 数值实验均在 Matlab R2016a 环境中执行。针对文献[3]中的测试数据, 对比分析。

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -0.21 & 0 \\ 0.1 & -0.13 \end{bmatrix}, A_{d1} = \begin{bmatrix} 0.047 & -0.01 \\ 0 & 0.012 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} -0.17 & 0.13 \\ 0.012 & -0.36 \end{bmatrix}, C_{d1} = \begin{bmatrix} 0.14 & 0.07 \\ 0.09 & -0.04 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -0.23 & 0 \\ 0.05 & -0.15 \end{bmatrix}, A_{d2} = \begin{bmatrix} -0.033 & 0.01 \\ -0.01 & 0.062 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} -0.25 & 0.16 \\ 0.05 & -0.28 \end{bmatrix}, C_{d2} = \begin{bmatrix} 0.10 & -0.011 \\ 0.017 & -0.04 \end{bmatrix}, \\ U_1 &= \begin{bmatrix} -0.02 & -0.1 \\ 0.1 & -0.2 \end{bmatrix}, V_1 = \begin{bmatrix} -0.12 & 0.1 \\ 0 & 0.23 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0.13 & 0.01 \end{bmatrix}, E_{d1} = \begin{bmatrix} 0.01 & -0.06 \\ 0.09 & 0 \end{bmatrix}, \\ U_2 &= \begin{bmatrix} -0.2 & -0.1 \\ 0.18 & -0.23 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} -0.14 & 0 \\ 0.11 & 0.32 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0.11 & 0.13 \\ 0 & -0.01 \end{bmatrix}, E_{d2} = \begin{bmatrix} 0.03 & 0 \\ 0 & -0.07 \end{bmatrix}, \\ X &= \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

分别利用定理2和推论1中的结论来分析以上给定的数值例子, 当然在利用推论1时, 需要假定 $E_i = E_{di} = 0_{n \times n} (i \in S)$, 就可得到, 若定理2和推论1中的线性矩阵不等式是可行的, 则系统(2)是严格随机 (X, Y, Z) - α -耗散, 系统(6)是严格 (X, Y, Z) - α -耗散, 其中 α 表示耗散水平。图1描绘了给定 $h_1 = 1$ 时, α 随 h_2 的变化, 图2描绘了给定 $h_2 = 15$, α 随 h_1 的变化。并且将获得的数据与文献[3]进行对比分析, 记录在表1中。

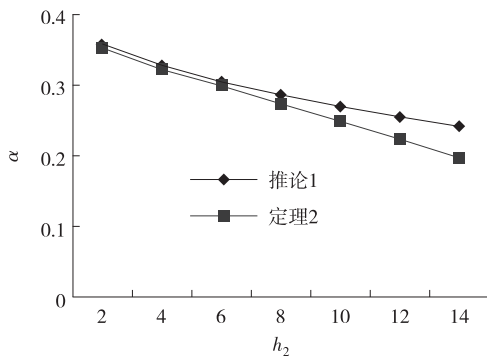


图1 α 随 h_2 的变化

Fig. 1 The change of α with h_2

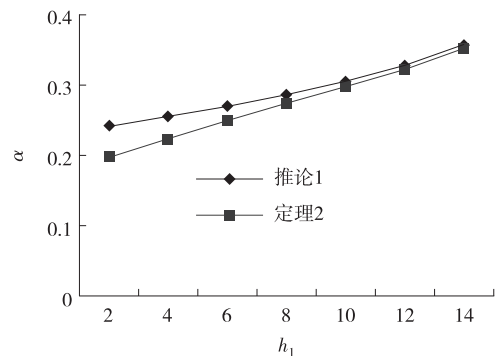


图2 α 随 h_1 的变化

Fig. 2 The change of α with h_1

从曲线图可以得:1) 给定 $h_1=1$ 时,随着 h_2 增大, α 逐渐减小;2) 给定 $h_2=15$ 时,随着 h_1 增大, α 逐渐增大;3) 对于每一组 h_1, h_2 , 定理 2 比推论 1 中 α 要小,说明随机噪声会降低系统的性能。

从表格可以得到:对于每一组 h_1, h_2 , 文献[3]比定理 2 中的 α 要小,当 $h_2 \geq 8$ 时甚至是不可行的,说明本文的方法有效降低了保守性。

表 1 α 随 h_2 的变化Tab. 1 The change of α with h_2

h_2	6	7	8	9	10
推论 1	0.305 0	0.295 2	0.286 2	0.277 8	0.269 8
定理 2	0.298 0	0.285 9	0.273 7	0.261 4	0.248 9
文献[3]	0.198 4	0.038 2	不可行	不可行	不可行

4 结论

本文针对具有时变时滞的离散 T-S 模糊随机系统,构造了新的模糊 Lyapunov-Krasovskii 泛函,且利用离散的 Jensen 不等式来研究它的耗散性分析问题,给出了该系统是严格随机 (X, Y, Z) - α -耗散的充分条件。最后通过数值实验验证了此方法的有效性,并且与已有文献进行对比后发现,本文的方法有更低的保守性。

参考文献:

- [1] WILLEMS J C. Dissipative dynamical systems Part I. General theory[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1972, 45 (5): 321-351.
- [2] LIANG J, WANG Z, LIU X. On passivity and passification of stochastic fuzzy systems with delays: the discrete-time case[J]. IEEE Transaction on Systems Man & Cybernetics Part B Cybernetics, 2010, 40(3): 964-969.
- [3] WU L, YANG X, LAM H K. Dissipativity analysis and synthesis for discrete-time T-S fuzzy stochastic systems with time-varying delay[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2014, 22(2): 380-394.
- [4] FENG Z, LI W, LAM J. Dissipativity analysis for discrete singular systems with time-varying delay[J]. Isa Transactions, 2016, 27(4): 86-91.
- [5] SANG H, ZHAO J. Passivity and passification for switched T-S fuzzy systems with sampled-data implementation[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2020, 28(7): 1219-1229.
- [6] BENZAOUIA A, HAJJAJI A E. Delay-dependent stabilization conditions of controlled positive T-S fuzzy systems with time varying delay[J]. International Journal of Innovative Computing, Information & Control: IJICIC, 2011, 7(4): 1533-1548.
- [7] ZHAO Y, GAO H, LAM J. Stability and stabilization of delayed T-S fuzzy systems: a delay partitioning approach[J]. IEEE Transaction on Fuzzy Systems, 2009, 17(4): 750-762.
- [8] YANG X Z, WU L G, LAM H K. Stability and stabilization of discrete-time FS fuzzy systems with stochastic perturbation and time-varying delay[J]. IEEE Transaction on Fuzzy Systems, 2014, 22(1): 124-138.
- [9] NGUANG S K, SHI P, DING S. Fault detection for uncertain fuzzy systems: an LMI approach[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2007, 15(6): 1251-1262.
- [10] ZHANG X, ZHANG Z, LU G. Fault detection for state-delay fuzzy systems subject to random communication delay[J]. International Journal of Innovative Computing, Information & Control, 2012, 8(4): 2439-2451.
- [11] LIANG J, WANG Z, LIU X. Robust passivity and passification of stochastic fuzzy time-delay systems[J]. International Journal of Innovative Computing, Information & Control, 2010, 180(9): 1725-1737.
- [12] LAM H K, LEUNG F H F. Stability analysis of discrete-time fuzzy-model-based control systems with time delay: time delay-independent approach[J]. Fuzzy Sets & Systems, 2008, 159(8): 990-1000.
- [13] XU S, LAM J, ZOU Y. Novel global asymptotic stability criteria for delayed cellular neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2005, 52(6): 349-353.
- [14] SU X, SHI P, WU L, SONG Y D. A novel approach to filter design for T-S fuzzy discrete-time systems with time-varying delay[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2012, 20(6): 1114-1129.
- [15] WU L, SU X, SHI P, QIU J. Model approximation for discrete-time state-delay systems in the T-S fuzzy framework[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2011, 19(2): 366-378.
- [16] QIU J, FENG G, GAO H. Asynchronous output-feedback control of networks nonlinear systems with multiple packet

- dropouts; T-S fuzzy affine model-based approach[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2011, 19(6): 1014-1030.
- [17] WANG Z, LAM J, WEI G. Filtering for nonlinear genetic regulatory networks with stochastic disturbances[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(10): 2448-2457.
- [18] WANG Z, GAO H. Robust finite-horizon control for a class of stochastic nonlinear time-varying systems subject to sensor and actuator saturations[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(7): 1716-1722.
- [19] TUAN H D, APKARIAN P, NARIKIYO T. Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2001, 9(2): 324-332.

Operations Research and Cybernetics

Dissipativity Analysis for Discrete T-S Fuzzy Stochastic Systems with Time-Varying Delay

YU Li, LUO Honglin

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [Purposes] To study the dissipativity analysis of discrete T-S fuzzy stochastic systems with time-varying delays, and obtain conditions with lower conservatism. [Methods] A new fuzzy Lyapunov-Krasovskii function is constructed and the discrete Jensen inequality is used. [Findings] The condition of stochastic dissipation is obtained. [Conclusions] The effectiveness of this method is verified by Matlab, and compared with the existing literature, this method has lower conservatism and lower computational complexity.

Keywords: T-S fuzzy system; dissipativity; time-varying delay; stochastic disturbance

(责任编辑 陈 乔)