

各向异性 Hardy 空间上具有 Besov 正则性的乘子^{*}

贺玉, 陈焦

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】研究了关于各向异性 Hardy 空间 $H^p(\mathbf{R}^n; \mathbf{A})$ ($0 < p < 1$) 上的乘子定理, 其中 $\mathbf{A}$ 为伸缩矩阵。【方法】利用 Littlewood-Paley-Stein 平方函数分解。【结果】在各向异性 Hardy 空间上建立带有 Besov 正则性的 Fourier 乘子, 相应给出了乘子有界的最佳光滑性指标, 改进了已有文献中乘子的光滑性的结果。【结论】在各向异性的 Hardy 空间上建立了临界光滑的 Hörmander 乘子定理。

关键词: Hörmander 乘子; Littlewood-Paley 平方函数; 各向异性 Hardy 空间; 各向异性 Besov 空间

中图分类号: O174.2

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2021)02-0057-06

1 研究背景

各向异性 Hardy 空间推广了 Fefferman 和 Stein 的经典 Hardy 空间以及 Calderón 和 Torchinsky 的抛物线 Hardy 空间, 带有伸缩矩阵 $\mathbf{A}$ 诱导的几何学和拟范数。Bownik 在文献[1-2]中对此进行了广泛研究。本文的主要目的是利用 Littlewood-Paley-Stein 平方函数理论, 在各向异性 Hardy 空间上建立 Calderón 和 Torchinsky 型 Hörmander-Mihlin 乘子定理^[3]。Littlewood-Paley-Stein 理论是建立多参数 Hardy 空间 Fourier 乘子和奇异积分算子有界性的有力工具, 如 Huang 等人^[4], Ding 等人^[5] 和 Han 等人^[6] 的工作, 但是在这些工作中, 乘子核的最优光滑性没有处理。因此, 要建立 Hörmander-Mihlin 型乘子定理以及乘子的最优光滑性的工作, 实质上需要更精细的分析。本文借鉴 Calderón 和 Torchinsky 在经典 Hardy 空间上的工作精神, 在各向异性 Hardy 空间上建立一个 Hörmander-Mihlin 型乘子定理。许多作者已经对乘子进行了研究, 可参见文献[7-18]。

为了更好地解释乘子定理, 下面将会给出相关的定义说明。

设 $\mathbf{A}$ 为 $n \times n$ 阶实矩阵, 且 $|\mathbf{A}| = b$ 。如果 $\mathbf{A}$ 的所有特征值 λ 满足 $|\lambda| > 1$, 则称 $\mathbf{A}$ 为伸缩矩阵。如果 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值, 按范数从小到大排序, 定义 λ_- 和 λ_+ , 满足 $1 < \lambda_- < |\lambda_1|$ 和 $|\lambda_n| < \lambda_+$ 。记 $\zeta_{\pm} = \frac{\ln \lambda_{\pm}}{\ln b}$ 。与 $\mathbf{A}$ 相关联的是一系列嵌套椭球 $\{B_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ 使 $B_{j+1} = \mathbf{A} \cdot B_j$ 且 $|B_0| = 1$ 。如果 $\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的转置矩阵, 那么 $\mathbf{A}^*$ 也是一个与 $\mathbf{A}$ 具有相同行列式 b 和特征值的伸缩矩阵, 并且具有自己的嵌套椭球 $\{B_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ 。对于伸缩矩阵 $\mathbf{A}$, 结合 $D_{\mathbf{A}}f(x) = f(\mathbf{A}x)$ 定义伸缩算子。使用 ρ 和 ρ^* 分别表示伸缩矩阵 $\mathbf{A}^*$ 和 $\mathbf{A}$ 诱导的正则范数。

设 $S(\mathbf{R}^n)$ 和 $S'(\mathbf{R}^n)$ 分别是 Schwartz 函数和缓增分布, 如果 $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$ 和 $j \in \mathbf{Z}$, 利用 $\varphi_j(x) = b^j \varphi(\mathbf{A}^j x)$ 表示各向异性的伸缩变换。运用文献[1]的方法, 结合 $S_{\infty}(\mathbf{R}^n) \doteq \{\varphi \in S(\mathbf{R}^n) : \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) x^{\alpha} dx = 0, \alpha \in \mathbf{Z}_+^n\}$ 。且设 $S'_{\infty}(\mathbf{R}^n)$ 是 $S_{\infty}(\mathbf{R}^n)$ 的拓扑对偶空间具有弱- $*$ 拓扑。下面将定义 $f \in S(\mathbf{R}^n)$ 的 Fourier 变换 Ff 和 Fourier 逆变换 $F^{-1}f$, 其中: $Ff(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx$ 与 $F^{-1}f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} f(\xi) d\xi$ 。对于 $m \in L^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ 和 $f \in S(\mathbf{R}^n)$, 线性 Fourier 乘子算子 $m(D)$ 被定义为 $m(D)f(x) = F^{-1}[m \hat{f}](x) = \int_{\mathbf{R}^n} m(\xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$ 。对 $k \in \mathbf{Z}$, 记 $f_k(x) = b^{\frac{k}{p}} f(\mathbf{A}^k x)$ 。那么, 这个伸缩在 $H_{\mathbf{A}}^p$ 和 L^p 范数下是不变的: $\|f_k\|_{H_{\mathbf{A}}^p} = \|f\|_{H_{\mathbf{A}}^p}$ 和 $\|f_k\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$ 。在 Fourier 变换

* 收稿日期: 2020-11-21 修回日期: 2021-01-15 网络出版时间: 2021-04-07 16:01

资助项目: 重庆市教育委员会科学技术研究项目 (No. KJQN201800514)

第一作者简介: 贺玉, 女, 研究方向为调和分析, E-mail: heyu10007@163.com; 通信作者: 陈焦, 男, 副教授, 博士, E-mail: chenjiaobnu@163.com

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20210407.1418.008.html>

下,有 $\hat{f}_k(\xi)=b^k(\frac{1}{p}-1)\hat{f}((A^*)^{-k}\xi)$ 。对 $s\in\mathbf{R}$ 定义:

$$(D_s f)(\xi)=(1+\rho^*(\xi))^s \hat{f}(\xi)=\langle \rho^*(\xi) \rangle^s \hat{f}(\xi)。$$

则各向异性 Sobolev 空间 $W^s(A^*)$ 由所有 $f\in S'(\mathbf{R}^n)$ 组成,且满足 $\|f\|_{W^s(A^*)}=\|D_s f\|_{L^2}<\infty$ 。

固定 $\varphi\in S$, φ 的支集包含于 $B_1^*\setminus B_{-1}^*$, 并且对所有的 $\xi\neq 0$, $\sum_{j\in\mathbf{Z}}\varphi(A^{*j}\xi)=1$ 。设 $m_j(\xi)=m(A^{*j}\xi)\varphi(\xi)$ 。

定义 1^[2] $\epsilon_\infty(\mathbf{R}^n)$ 表示所有的函数 $\psi\in S(\mathbf{R}^n)$, 且满足: 1) $\text{supp } \psi\subset B_1^*\setminus B_{-1}^*$; 2) $\sup_{j\in\mathbf{Z}}|\psi((A^*)^j\xi)|>0$ 。对任意的 $\xi\in\mathbf{R}^n\setminus\{0_n\}$, 其中 A^* 表示 A 的转置。

定义 2^[4] 设 $p\in(0,\infty)$ 和 $\psi\in\epsilon_\infty(\mathbf{R}^n)$ 。各向异性 Hardy 空间 $H^p(\mathbf{R}^n;A)$ 通过 Littlewood-Paley g -函数定义为 $\|f\|_{H^p(\mathbf{R}^n;A)}=\left\|\left\{\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\psi_j*f|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}<\infty$, 其中 $f\in S'(\mathbf{R}^n)$ 。

记 $\zeta_\pm=\frac{\ln\lambda_\pm}{\ln b}$ 。在文献[3]里作者建立了如下乘子定理。

定理 1^[3] 假设 $m(\xi)$ 是一个在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数, 满足:

$$\sup_{j\in\mathbf{Z}}\|m_j\|_{W^s(A^*)}<\infty。 \quad (1)$$

其中: $s>\zeta^{-1}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)$ 。那么 T_m 是从 $H^p(\mathbf{R}^n;A)$ 到 $H^p(\mathbf{R}^n;A)$ 有界的, 对任意的 $0<p\leq 1$ 有:

$$\|T_m\|_{H_A^p\rightarrow H_A^p}\leq C\sup_{j\in\mathbf{Z}}\|m_j\|_{W^s(A^*)}。 \quad (2)$$

其中: $T_m f(x)=\int_{\mathbf{R}^n}m(\xi)\hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi$ 。

注 1 对应经典的 Hardy 空间。此时, 伸缩矩阵 $A=2I_n$, 其中 I_n 为 $n\times n$ 单位矩阵。所以 $\lambda_-=\lambda_+=2$ 。那么, $\rho^*(x)=|x|^n$ 且有 $\log_{\lambda_-}^b=n$ 。在这种情况下, $s>n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)$, 从而回到 Calderón 和 Toechinsky 建立的经典结果(2)式^[3]。

固定 $\varphi\in S$, φ 支集包含于 $B_1^*\setminus B_{-1}^*$ 上, 对任意的 $\xi\neq 0$, 有 $\sum_{j\in\mathbf{Z}}\varphi(A^{*-j}\xi)=1$ 。设 $\varphi_0(\xi)=1-\sum_{j=1}^{\infty}\varphi(A^{*-j}\xi)$ 。

对于 $1\leq p, q\leq\infty$ 及 $s\in\mathbf{R}$, 各向异性 Besov 空间 $B_{p,q}^s(A^*; \mathbf{R}^n)$ 包含所有的 $f\in S'(\mathbf{R}^n)$ 且满足: $\|f\|_{B_{p,q}^s(A^*; \mathbf{R}^n)}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}b^{\zeta_{-}ksq}\|\varphi_k(D)f\|_{L^p}^q\right)^{\frac{1}{q}}<\infty$ 。对于 $m(\xi)$, 设 $m_j(\xi)=m(A^{*j}\xi)\varphi(\xi)$ 。

在本文中, 当 $0<p<1$ 时, 可以得到乘子的最佳光滑性结果, 看成是定理 1 的极限情形, 即 $s=\zeta^{-1}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)$ 。

定理 2 假设 $m(\xi)$ 是一个在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数, 满足:

$$\sup_{j\in\mathbf{Z}}\|m_j\|_{B_{2,p}^s(A^*)}<\infty。 \quad (3)$$

且 $s=\zeta^{-1}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)$ 。则 $T_m f(x)=\int_{\mathbf{R}^n}m(\xi)\hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi$ 是从 $H^p(\mathbf{R}^n;A)$ 到 $H^p(\mathbf{R}^n;A)$ 有界的, 对任意的 $0<p<1$, 有:

$$\|T_m\|_{H_A^p\rightarrow H_A^p}\leq C\sup_{j\in\mathbf{Z}}\|m_j\|_{B_{2,p}^s(A^*)}。 \quad (4)$$

定理 3 假设 $m(\xi)$ 是一个在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数, 满足:

$$\sup_{j\in\mathbf{Z}}\|m_j\|_{B_{2,p}^s(A^*)}<\infty。 \quad (5)$$

其中: $s>\frac{\zeta^{-1}}{2}$ 和 $0<q<\infty$ 。则 $T_m f(x)$ 是从 $H^1(\mathbf{R}^n;A)$ 到 $H^1(\mathbf{R}^n;A)$ 有界的。

注 2 定理 3 证明与定理 2 的类似。因此, 本文将重点研究定理 2。

2 预备知识

关于伸缩矩阵和各向异性 Hardy 空间的一些基本定义和事实参见文献[1]。对于一个伸缩矩阵 A , 可以找到一个齐次拟范数, 即一个可测映射 $\rho_A:\mathbf{R}^n\rightarrow[0,\infty)$ 且常数 $C\geq 1$ 满足:

1) $\rho_A(x)=0$, 当 $x=0$ 时;

2) $\rho_A(\mathbf{A}x) = b\rho_A(x)$, 对任意的 $x \in \mathbf{R}^n$;

3) $\rho_A(x+y) \leq C[\rho_A(x) + \rho_A(y)]$, 对任意的 $x, y \in \mathbf{R}^n$ 。

在文献[1]中, 对于给定的伸缩矩阵 $\mathbf{A}$, 存在一个对称的开椭圆 B_0 和 $r \in (1, \infty)$, 使得 $B_0 \subset rB_0 \subset \mathbf{A}B_0$, 并且可以另外假设 $|B_0| = 1$, 其中 $|B_0|$ 表示 B_0 的 n 维 Lebesgue 测度。在本文中, 当 $k \in \mathbf{Z}$ 时, $B_k = \mathbf{A}^k B_0$ 。设 α 为满足 $2B_0 \subset \mathbf{A}^\alpha B_0$ 的最小整数。则 B_k 是开的, $B_k \subset rB_k \subset \mathbf{A}B_{k+1}$ 且 $|B_k| = b^k$ 。显然, $\alpha \geq 1$ 。此外, 可以使用椭圆来定义与 $\mathbf{A}$ 相关的正则拟范数:

$$\rho_A(x) = \begin{cases} b^j, & \text{若 } x \in B_{j+1} \setminus B_j \\ 0, & \text{若 } x = 0 \end{cases}. \quad (6)$$

一旦 $\mathbf{A}$ 是固定的, 将去掉下标, ρ 是表示正则范数。转置矩阵 $\mathbf{A}^*$ 也是一个伸缩矩阵, 它的行列式和离心率与 $\mathbf{A}$ 相同, 但具有自己的嵌套椭圆体 $\{B_k^*\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 和范数 ρ^* 。此后, C 表示一个一般常数, 它可能依赖于伸缩矩阵 $\mathbf{A}$ 和任何参数 n, p, q , 并且在不同的地方可以变化, 但与 $f \in H_A^p$ 无关。本文用 $f < g$ 表示 $f \leq Cg$ 。对于 $L \in \mathbf{R}$, $[L]$ 表示不超过 L 的最大整数。

引理 1^[11] 假设 ρ_A 是与伸缩矩阵 $\mathbf{A}$ 相关的齐次拟范数, 则存在一个常数 C_A , 使得:

- 1) $C_A^{-1}\rho(x)^{\zeta_-} \leq |x| \leq C_A\rho(x)^{\zeta_+}$, 当 $\rho(x) \geq 1$ 时;
- 2) $C_A^{-1}\rho(x)^{\zeta_+} \leq |x| \leq C_A\rho(x)^{\zeta_-}$, 当 $\rho(x) \leq 1$ 时;
- 3) $C_A^{-1}b^{\zeta_-}|x| \leq |\mathbf{A}^j x| \leq C_A b^{\zeta_+}|x|$, 当 $j \geq 0$ 时;
- 4) $C_A^{-1}b^{\zeta_+}|x| \leq |\mathbf{A}^j x| \leq C_A b^{\zeta_-}|x|$, 当 $j \leq 0$ 时。

其中: C_A 仅依赖于 $\mathbf{A}$ 的离心率: $\zeta_{\pm} = \frac{\ln \lambda_{\pm}}{\ln b}$ 。

对于任何局部可积函数 f , f 的 Hardy-Littlewood 最大函数 $M(f)$ 被定义为:

$$M(f)(x) = \sup_{k \in \mathbf{Z}} \sup_{x \in y+B_k} \frac{1}{|B_k|} \int_{y+B_k} |f(z)| dz.$$

对于任意的 $x \in \mathbf{R}^n$ 。在文献[1]中, Bownik 证明了 M 在 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 上从 $L^1(\mathbf{R}^n)$ 到 $L^{1,\infty}(\mathbf{R}^n)$ 有界, 其中 $p \in (1, \infty]$ 。

本文将使用下面类似于欧氏空间二进制方体格的分解^[1,11]。

引理 2^[1] 设 $\mathbf{A}$ 是伸缩矩阵。存在一个开子集 $\Omega \doteq \{Q_\alpha^k \subset \mathbf{R}^n : k \in \mathbf{Z}, \alpha \in I_k\}$, 其中 I_k 是一些指标集, 使得:

- 1) $|\mathbf{R}^n \setminus \bigcup_\alpha Q_\alpha^k| = 0$ 对于任意的固定 k 和 $Q_\alpha^k \cap Q_\beta^k = \emptyset$ 如果 $\alpha \neq \beta$;
- 2) 对任意的 α, β, k, l 且 $k \geq l$, 有 $Q_\alpha^k \cap Q_\beta^l = \emptyset$ 或者 $Q_\alpha^l \subset Q_\beta^k$;
- 3) 对任意的 (l, β) 且 $k < l$, 存在唯一的 α , 使得 $Q_\beta^l \subset Q_\alpha^k$;
- 4) 存在一些负整数 v 和一些正整数 $u, k \in \mathbf{Z}$ 和 $\alpha \in I_k$ 使得对任意的 $x \in Q_\alpha^k$, 存在 $x_{Q_\alpha^k} \in Q_\alpha^k$ 满足: $x_{Q_\alpha^k} + B_{ik-u} \subset Q_\alpha^k \subset x + B_{ik-u}$ 。

为了方便, 称 Q_α^k 为二进制方体。

在不失一般性的前提下, 只考虑 $x_R = 0$, 然后存在一些负整数 v 和一些正整数 u , 使得 $B_{ik-u} \subset R \subset B_{ik+u}$ 。设 $R'' = B_{ik+u-v+3\sigma}$ 。对于任意的二进制方体 Q_α^k 以及 $k \in \mathbf{Z}$ 和 $\alpha \in I_k$, 把它的水平设为 $l(Q_\alpha^k) \doteq k$ 。设 $\mathbf{A}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的伸缩矩阵, 其中: $\Omega, l(Q), v, u$ 与引理 2 中对应的相同。称 R 为二进制长方体。其次需要各向异性 Hardy 空间中矩形原子的定义。

定义 3^[11] 当 $p \in (0, 1], q \in [2, \infty), s \in \mathbf{Z}^+$ 和 $s > \left[\left(\frac{q}{p} - 1\right)\zeta^{-1}\right]$ 时, 三重 (p, q, s) 被称为可容许的。对于任意的 $R \in \Omega$, 函数 a_R 被称为 (p, q, s) -原子, 当:

- 1) a_R 是 R'' 上的支集, 其中 $R'' \doteq x_R + B_{v(l(R)-1)+u+3\sigma}^*$;
- 2) $\int_{\mathbf{R}^n} a_R(x) x^\alpha dx = 0$, 任意的 $|\alpha| \leq s$;
- 3) $\|a_R\|_{L^q \mathbf{R}^n} \leq |R|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}$ 。

下面给出一些后面会用到的相关的性质和引理。

性质 1^[14] 如果 $\sup_{j \in \mathbf{Z}} \|m(\mathbf{A}^* \cdot) \varphi(\cdot)\|_{B_{2,p}^s(\mathbf{R}^n; \mathbf{A})} < \infty$, 那么 $m \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ 。

性质 2^[9] 如果 $s > 0$, 则有下面不等式成立

$$\|fg\|_{B_{2,p}^s(\mathbf{R}^n;\mathbf{A})} \leq \|f\|_{B_{2,p}^s(\mathbf{R}^n;\mathbf{A})} \|g\|_{B_{2,\infty}^s(\mathbf{R}^n;\mathbf{A})}. \quad (7)$$

引理 3^[9] 设 $s > 0, 0 < p \leq 1$, 以及 $\tilde{\varphi} \in S(\mathbf{R}^n)$, 使得 $\text{supp} \tilde{\varphi}$ 是紧的且不包含原点。假设 $\Phi \in C^\infty(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ 满足 $|D_A^{-j} \partial_{\xi}^{\beta} D_A^j \Phi(\xi)| \leq C$ 。对于多重指标 β , 所有的 $j \in \mathbf{Z}$ 和 $\xi \in B_{j+1}^* \setminus B_j^*$ 。那么存在一个常数 $C > 0$, 使得:

$$\sup_{j \in \mathbf{Z}} \|m(\mathbf{A}^{*j} \cdot) \Phi(\mathbf{A}^{*j} \cdot) \tilde{\varphi}\|_{B_{2,p}^s(\mathbf{A}^*)} \leq C \sup_{j \in \mathbf{Z}} \|m_j\|_{B_{2,p}^s(\mathbf{A}^*)}.$$

任意的 $m \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$, 满足 $\sup_{j \in \mathbf{Z}} \|m_j\|_{B_{2,p}^s(\mathbf{A}^*)} < \infty$, 其中: $m_j(\xi) = m(\mathbf{A}^{*j} \xi) \varphi(\xi)$, $\text{supp} \varphi(\xi) \subseteq \{\xi: \xi \in B_1^* \setminus B_{-1}^*\}$ 。

3 定理证明

本节着重给出定理 2 的详细证明。

证明 因为 T_m 是一个卷积算子, 根据(2)式, 有 $\|T_m\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \|m\|_{L^\infty}$ 。

根据性质 2 与(7)式, 有:

$$\|m\|_{L^\infty} \leq \sup_j \|m_j\|_{B_{2,p}^s(\mathbf{A}^*)}. \quad (8)$$

很容易验证当 $s_2 \geq s_1 > 0$ 时, 有 $B_{2,p}^{s_2}(\mathbf{R}^n; \mathbf{A}) \rightarrow B_{2,p}^{s_1}(\mathbf{R}^n; \mathbf{A})$ 。因此, 考虑下面情形就足够:

$$\zeta^{-1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) \leq s < \left[\zeta^{-1} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \right] + \frac{\zeta^{-1}}{2} + 1. \quad (9)$$

为了证明主要定理, 只需证明对所有 H_A^p -原子 a , 满足 $\|T_m(a)\|_{H_A^p} \leq \sup_{j \in \mathbf{Z}} \|m_j\|_{B_{2,p}^s(\mathbf{R}^n; \mathbf{A}^*)}$ 。其中 a 是支集在 R'' 上的一个矩形原子, R'' 的中心是原点。设 $R''_\gamma \doteq B_{v(l(R)-1)+u+5\sigma}^* \doteq B_l^*$ 。其中 R''_γ 为 R'' 扩大了 γ 倍且 $\gamma \geq 2$ 。根据 Hölder 不等式和(8)式, 有:

$$\begin{aligned} \|T_m(a)\|_{H_A^p} &= \left(\int_{R''_\gamma} \left\{ \sum_{j \in \mathbf{Z}} |\psi_j + T_m(a)|^2 \right\}^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq |R''_\gamma|^{\frac{2-p}{2p}} \left(\int_{R''_\gamma} \left\{ \sum_{j \in \mathbf{Z}} |\psi_j + T_m(a)|^2 \right\} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &C \|m_j\|_{L^\infty} |R''_\gamma|^{\frac{2-p}{2p}} \left(\int_{R''_\gamma} |a(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \sup_j \|m_j\|_{B_{2,p}^s(\mathbf{A}^*)}. \end{aligned}$$

利用(8)式, 设 $T_m^*(a)(x) = \left(\sum_j |\psi_j * T_m(a)|^2(x) \right)^{\frac{1}{2}}$ 。要证 $T_m: H^p(\mathbf{R}^n; \mathbf{A}) \rightarrow H^p(\mathbf{R}^n; \mathbf{A})$, 只需证明:

$$\|T_m(a)(x)\|_{L^p(R''_\gamma)} \leq \sup_j \|m_j\|_{B_{2,p}^s(\mathbf{A}^*)}.$$

其中: s 满足(9)式。为了方便定义 $K_j(x) \doteq F^{-1}[m(\xi)(\varphi(\mathbf{A}^*)^{-j}\xi)](x)$ 。如果设 $\tilde{K}_j \doteq F^{-1}[m_j]$, 那么可以证明 $K_j(x) = b^j \tilde{K}_j(\mathbf{A}^j x)$ 。

因此, 有:

$$\begin{aligned} T_m^*(a)(x) &= \left(\sum_j |T_{m(\cdot)\varphi(\mathbf{A}^*)^{-j}}(a)(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &\left(\sum_j \left| \int_{\mathbf{R}^n} K_j(x-x_1)a(x_1)dx_1 \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \doteq \left(\sum_j |F_j(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

利用 L^p -范数的 p -次幂可加性, $p \leq 1$ 和 Hölder 不等式, 有如下估计:

$$\begin{aligned} &\int_{R''_\gamma} |T_m^*(a)(x)|^p dx \leq \\ &\sum_j \sum_{k \geq k_0} \left(\int_{B_{k+1} \setminus B_k} \rho^*(x)^{-s_\gamma - \frac{2p}{2-p}} dx \right)^{1-\frac{p}{2}} \left(\int_{B_{k+1} \setminus B_k} \rho^*(x)^{2s_\gamma} |F_j(x)|^2 dx \right)^{\frac{p}{2}} \leq C \sum_j \sum_{k \geq k_0} \|\rho^*(x)^{-s_\gamma} F_j\|_{L^2(B_{k+1} \setminus B_k)}^p. \end{aligned}$$

其中: $k_0 = [\log_b |R''_\gamma|] - 1$ 。

注意到:

$$\begin{aligned} F_j(x) &= \int_{\mathbf{R}^n} \left(K_j(x-x_1) - \sum_{|\alpha| \leq L-1} \frac{1}{\alpha!} (-x_1)^\alpha \partial^\alpha K_j(x) \right) a(x_1) dx_1 = \\ &L \sum_{|\alpha| = L} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{0 < t < 1} \frac{(-x_1)^\alpha}{\alpha!} (1-t)^{L-1} \partial^\alpha K_j(x-tx_1) a(x_1) dt dx_1. \end{aligned}$$

其中: $0 \leq L \leq \left[\zeta^{-1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) \right]$ 是整数。因此, 有:

$$|F_j(x)| \leq \left(\int_{R''} |a(x_1)|^2 dx_1 \right)^{\frac{1}{2}} \times \sum_{|\alpha| = L} \left(\int_{R''} \int_{0 < t < 1} |(-x_1)^\alpha \partial^\alpha K_j(x-tx_1) a(x_1)|^2 dt dx_1 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$|R''|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \sum_{|a|=L} \left(\int_{R'} \int_{0 < t < 1} |(-x_1)^a \partial^a K_j(x-tx_1) a(x_1)|^2 dt dx_1 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

最后一个不等式来自引理 1。利用(6)式,有 $\rho^*(x-tx_1) \approx \rho^*(x)$ 。得到:

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq k_0} \left\| \rho^*(x)^{\zeta_-} \left(\int_{R'} \int_{0 < t < 1} |(-x_1)^a \partial^a K_j(x-tx_1)|^2 dt dx_1 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(B_{k+1} \setminus B_k)}^p = \\ & \sum_{k \geq k_0} \left(\int_{R'} \int_{0 < t < 1} \int_{B_{k+1} \setminus B_k} |\rho^*(x-tx_1)^{\zeta_-} (-x_1)^a \partial^a K_j(x-tx_1)|^2 dx dt dx_1 \right)^{\frac{p}{2}} \leq \\ & \sum_{k \geq k_0} \left(\int_{R'} \int_{0 < t < 1} \int_{B_{k+1} \setminus B_k} |\rho^*(x)^{\zeta_-} (-x_1)^a \partial^a K_j(x)|^2 dx dt dx_1 \right)^{\frac{p}{2}} \leq \\ & \sum_{k \geq k_0} |R|^{\frac{p}{2}} \left(\sup_{x_1 \in R'} \int_{0 < t < 1} \int_{B_{k+1} \setminus B_k} |\rho^*(x)^{\zeta_-} (-x_1)^a \partial^a K_j(x)|^2 dx dt \right)^{\frac{p}{2}} \end{aligned}$$

对于每个椭圆 R , 存在整数 j_0 , 使得 $|R| \approx b^{-j_0}$ 。由于 $K_j(x) = b^j \tilde{K}_j(A^j x)$ 。利用(3)式, 有:

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq k_0} \sup_{x_1 \in R'} \left(\int_{0 < t < 1} \int_{B_{k+1} \setminus B_k} |\rho^*(x)^{\zeta_-} (-x_1)^a \partial^a K_j(x)|^2 dx dt \right)^{\frac{p}{2}} = \\ & \sum_{k \geq k_0} \sup_{x_1 \in R'} b^{jp} \|\rho^*(x)^{\zeta_-} (-x_1)^a \partial^a [\tilde{K}_j(A^j x)]\|_{L^2(B_{k+1} \setminus B_k)}^p \leq \\ & b^{(j-j_0)pL\zeta_{\pm}} b^{jp(\frac{1}{2}-\zeta_-)} \sum_{k \geq 0} b^{ksp\zeta_-} \left\| \varphi((A^*)^{-k}\xi) F^{-1} \left[\left(\frac{A^{*(j-j_0)}\xi}{b^{(j-j_0)\zeta_{\pm}}} \right)^a m_j(\xi) \right] (x) \right\|_{L^2(B_{k+1} \setminus B_k)}^p = \\ & b^{(j-j_0)pL\zeta_{\pm}} b^{jp(\frac{1}{2}-\zeta_-)} \|m_j\|_{B_{2,p}^{\zeta_{\pm}}(A^*)}^p. \end{aligned}$$

其中: 离心率 $\zeta_{\pm}$ 取决于 $(j-j_0)$ 的符号, 最后一个不等式来自 $\frac{A^{*(j-j_0)}\xi}{b^{(j-j_0)\zeta_{\pm}}} \in CB_1^*$ 和引理 3。

因此, 有 $\sum_{k \geq k_0} \|\rho^*(x)^{\zeta_-} F_j\|_{L^2(B_{k+1} \setminus B_k)}^p \leq C |R''|^{p-1} b^{(j-j_0)pL\zeta_{\pm}} b^{jp(\frac{1}{2}-\zeta_-)} \|m_j\|_{B_{2,p}^{\zeta_{\pm}}(A^*)}^p$, 得到:

$$|R''|^{1-\frac{p}{2}-sp\zeta_-} \|\rho^*(x)^{\zeta_-} F_j\|_{L^2(R''^c)} \leq C |R|^{\frac{p}{2}-sp\zeta_-} b^{(j-j_0)pL\zeta_{\pm}} b^{jp(\frac{1}{2}-\zeta_-)} \|m_j\|_{B_{2,p}^{\zeta_{\pm}}(A^*)}^p.$$

最后 $\int_{R''^c} |T_m^*(a)(x)|^p dx \leq C \sum_j |R|^{\frac{p}{2}-sp\zeta_-} b^{(j-j_0)pL\zeta_{\pm}} b^{jp(\frac{1}{2}-\zeta_-)} \|m_j\|_{B_{2,p}^{\zeta_{\pm}}(A^*)}^p$ 。

情形 I: $j-j_0 \geq 0$ 。设 $L=0$, 有:

$$\sup_j \|m_j\|_{B_{2,p}^{\zeta_{\pm}}(A^*)}^p \sum_{j \geq j_0} b^{(j-j_0)p(\frac{1}{2}-\zeta_-)} \leq C \sup_j \|m_j\|_{B_{2,p}^{\zeta_{\pm}}(A^*)}^p$$

情形 II: $j-j_0 < 0$ 。设 $L = \left\lceil \zeta^{-1} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \right\rceil + 1$, 有: $\sup_j \|m_j\|_{B_{2,p}^{\zeta_{\pm}}(A^*)}^p \sum_{j < j_0} b^{(j-j_0)p(\frac{1}{2}+L\zeta-\zeta_-)} \leq C \sup_j \|m_j\|_{B_{2,p}^{\zeta_{\pm}}(A^*)}^p$ 。

因此, 有如下结论: $\|T_m^*(a)(x)\|_{L^p(R''^c)}^p \leq C \sup_j \|m_j\|_{W^s(A^*)^{b^{-\kappa}}}^p$ 。

综上所述, 定理 2 得证。

证毕

参考文献:

- [1] BOWNIK M. Anisotropic hardy spaces and wavelets[J]. Memoirs of the American Mathematical Society, 2003, 164(781): 122.
- [2] BOWNIK M, WANG L A. Fourier transform of anisotropic hardy spaces[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2013, 141(7): 2299-2308.
- [3] CALDERÓN A P, TORCHINSKY A. Parabolic maximal functions associated with a distribution II[J]. Advances in Mathematics, 1977, 24(2): 101-171.
- [4] HUANG L, CHEN J. Hormander type multiplier theorems on bi-parameter anisotropic Hardy spaces [J]. Forum Mathematicum, 2020, 32(3): 577-594.
- [5] DING Y, LAN S. Some multiplier theorems for anisotropic Hardy spaces[J]. Analysis in Theory and Application, 2006, 22(4): 339-352.
- [6] HAN Y, LU G, SAWYER E T. Flag Hardy spaces and Marcinkiewicz multipliers on the Heisenberg group[J]. Analysis & PDE, 2014, 7(7): 1465-1534.
- [7] CHEN J, HUANG L. Hormander type multipliers on anisotropic hardy spaces[J]. Acta Mathematica Sinica(English Series),

- 2019, 35(11):1841-1853.
- [8] BAERNSTEIN A, SAWYER E T. Embedding and multiplier theorems for $H^p(\mathbf{R}^n)$ [J]. Memoirs of the American Mathematical Society, 1985, 53(318):82.
- [9] CHEN L, LU G, LUO X. Boundedness of multi-parameter Fourier multiplier operators on Triebel-Lizorkin and Besov-Lipschitz spaces[J]. Nonlinear Analysis Theory, Methods & Application, 2016, 134:55-69.
- [10] CHIRST M. A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy Integral[J]. Colloquium Mathematicum, 1990, 60/61(2):601-628.
- [11] CRUZ-URIBE D, WANG L A. Variable hardy spaces[J]. Indiana University Mathematics Journal, 2014, 63(2):447-493.
- [12] DEKEL S, PETRUSHEV P, WEISSBLAT T. Hardy spaces on $\mathbf{R}^n$ with pointwise variable anisotropy[J]. The Journal of Fourier Analysis and Application, 2011, 17(5):1066-1107.
- [13] DING W, LU G. Duality of multi-parameter Triebel-Lizorkin spaces associated with the composition of two singular integral operators[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2016, 368(10):7119-7152.
- [14] FRAZIER M, JAWERTH B, WEISS G. Littlewood-Paley theory and the study of function spaces[J]. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 1991, 79:132.
- [15] MIHLIN S G. On the multipliers of fourier integrals[J]. Dokl Akad Nauk SSSR, 1956, 109:701-703.
- [16] MIYACHI A. On some fourier multipliers for $H^p(\mathbf{R}^n)$ [J]. Journal of the Faculty of Science, Section IA, Mathematics, 1980, 27(2):157-179.
- [17] MIYACHI A, TOMITA N. Minimal smoothness conditions for bilinear fourier multipliers[J]. Revista Matemática Iberoamericana, 2013, 29(2):495-530.
- [18] PERAL J C, TORCHINSKY A. Multipliers in $H^p(\mathbf{R}^n)$, $0 < p < \infty$ [J]. Arkiv for Matematik, 1979(2):225-235.

Multipliers with Besov Regularity on Anisotropic Hardy Spaces

HE Yu, CHEN Jiao

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [Purposes] The multiplier theorem on anisotropic Hardy spaces $H^p(\mathbf{R}^n; \mathbf{A})$ ($0 < p < 1$) is studied, where $\mathbf{A}$ is a dilation matrix. [Methods] By using the Littlewood-Paley-Stein square function. [Findings] Fourier multipliers with Besov regularity were established on anisotropic Hardy spaces, and the optimal smoothness index of bounded multipliers was given, which improved the result of smoothness of multipliers. [Conclusions] A critical smooth Hörmander multiplier theorem is established in anisotropic Hardy spaces.

Keywords: Hörmander multiplier; Littlewood-Paley's inequality; anisotropic Hardy space; anisotropic Besov spaces

(责任编辑 陈 乔)