

一类耦合系统的无穷多共振解^{*}

魏其萍¹, 王 跃², 熊宗洪^{1,2}, 郝雪妍¹

(1. 贵州民族大学 数据科学与信息工程学院, 贵阳 550025; 2. 贵州大学 数学与统计学院, 贵阳 550025)

摘要:【目的】考虑含有线性项的基尔霍夫型耦合系统无穷多解的存在性。【方法】利用本征值问题相关理论和代数分析方法进行求解。【结果】获得无穷多经典解,在实际应用中它们表现出共振形态。【结论】每一个扰动函数至少对应一个共振解,系统中的参数满足不同条件时分别有1族、2族或3族解,并且通过实例验证了结果的可靠性。

关键词:基尔霍夫型问题;耦合系统;共振解;代数分析方法

中图分类号:O231;O177

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2021)02-0063-07

假定 $\Omega \subset \mathbf{R}^N (N \geq 1)$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的区域,讨论含线性项的 Kirchhoff 问题耦合系统:

$$\begin{cases} -\left(a \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx\right) \Delta v = \lambda v + u, x \in \Omega \\ -\left(b \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u = u, x \in \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, x \in \partial\Omega \end{cases}, \quad (1)$$

其中: a 和 b 都是任意正实数, λ 为正参数, ∇ 表示梯度算子, Δ 表示 Laplace 算子, $u, v \in C^2(\Omega)$ 是待求的函数, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial n}$ 分别表示函数 $u = u(x)$ 和 $v = v(x)$ 在边界 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量。注意当 $N = 1$ 时,系统(1)实际上为两点边值问题组成的耦合系统,然而在两点边值问题中,外法方向可以理解为是从区间内部指向端点的方向,此时系统(1)的边界条件表示的是单向导数在端点处的值为0,因此如果未知函数在区间端点处具有单向导数并且单向导数值为0时,为了与 $N \geq 2$ 的情形一致,仍然将这种情形的单连通区间视为一个具有光滑边界的区域。将每一对满足系统(1)的函数组 $(u, v) \in C^2(\Omega) \times C^2(\Omega)$ 称为耦合系统(1)的经典解。

Kirchhoff 方程是著名物理学家 Kirchhoff 推广达朗贝尔方程时于 1876 年首次提出^[1],它主要描述固定端点的弹性绳振动过程中横向的细小位移。而考虑外力干扰条件下驻波解的存在性时,空间变量部分具有如下形式:

$$-\left[a + b \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right] \Delta u = g(x, u), x \in \Omega. \quad (2)$$

因此这样的问题被人们称为 Kirchhoff 型问题,这里 a 和 b 都是常数, Ω 是 $\mathbf{R}^N (N \geq 1)$ 或是其中的一个有界区域,有时候也可能是不等于 $\mathbf{R}^N$ 的无界区域, $g(x, u)$ 是连续函数。由于在方程中含有全局积分 $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$,人们也称这种问题为非局部问题。

当常数 a 和 b 以及函数 $g(x, u)$ 满足不同的假设条件时,对 Kirchhoff 型方程解的存在性研究已经很广泛,但由于所利用的工具和分析技巧的不同,已出现的结果形形色色。当 a 与 b 异号时文献[2]得出 $g(x, u)$ 为关于 u

* 收稿日期:2020-07-16 修回日期:2020-10-02 网络出版时间:2021-04-09 8:46

资助项目:国家自然科学基金(No. 11661021);贵州省研究生科研基金(No. 黔教合 YJSCXJH[2020]083);贵州省科技厅科技计划联合基金(No. 黔科合 LH 字[2014]7378);贵州省教育厅青年人才项目(No. 黔教合 KY 字[2017]318;No. 黔教合 KY 字[2018]141;No. 黔教合 KY 字[2018]415)

第一作者简介:魏其萍,男,研究方向为最优控制,E-mail:1250973747@qq.com;通信作者:王跃,男,博士研究生,E-mail:yuewn@sina.cn
网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20210407.1330.004.html

的线性项时无穷多解的存在性,文献[3-4]考虑了含临界指数情形下方程(2)解的存在性,分别获得山路解、局部极小解和无穷多解,并且文献[3]指出 a 和 b 异号时为负模量 Kirchhoff 型问题;而正模量的情形下,Dirichlet 边值条件时参见文献[5-7]及相关引用文献,Neumann 边值条件时参见文献[8-12]及相关引用文献,对于无穷多解以及近共振情形问题的研究参见文献[13-17]及相关引用文献。特别地,文献[2]利用代数分析方法研究了 Dirichlet 边值条件下问题(2)的无穷多解。文献[10]利用喷泉定理获得 $g(x,u)$ 关于 u 满足超三次且次临界条件时问题(2)无穷多解的存在性。文献[12]研究了 Neumann 边值条件下 p -Laplace 算子作用的如下 Kirchhoff 型耦合系统:

$$\begin{cases} -\left[M_1\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^p dx\right)\right]^{p-1}\Delta_p u = f(u,v) + \rho_1(x), x \in \Omega \\ -\left[M_2\left(\int_{\Omega}|\nabla v|^p dx\right)\right]^{p-1}\Delta_p v = g(u,v) + \rho_2(x), x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3)$$

其中: $N \geq 1, 1 < p < N, \mathbf{n}$ 表示边界 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量, $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla|^{p-2}\nabla u)$ 为 p -Laplace 算子,且 M_1, M_2 是关于变量 $\int_{\Omega}|\nabla u|^p dx$ 的连续函数,它们具有同一个正的下界,二元函数 $F(u,v) \in C(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ 具有周期性,由 $f(u,v)$ 和 $g(u,v)$ 决定,具体表示为对任意的 $(u,v) \in \mathbf{R}^2$, 有 $F_u(u,v) = f(u,v)$ 和 $F_v(u,v) = g(u,v)$, 且存在常数 $k > 0$ 使得 $F(u+k, v+k) = F(u,v), \rho_1, \rho_2 \in L^{p/(p-1)}(\Omega), 1 < p < p^*,$ 当 $p \geq N$ 时 $p^* = +\infty$ 当 $1 < p < N$ 时 $p^* = \frac{Np}{N-p}, \rho_1(x), \rho_2(x)$ 满足条件 $\int_{\Omega}\rho_1 dx = \int_{\Omega}\rho_2 dx = 0$ 。在上述假设条件下,利用变分方法获得系统(3)存在 1 个从属于 $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$ 的弱解。而文献[13]介绍了 $g(x,u)$ 为含有关于 u 的 3 次项情形下在 $-\Delta u = \lambda u^3$ 主特征值处至少有 3 个近共振解,主要技术工具为 Ekeland 变分原理和三解定理。

受文献[12]启发,本文考虑耦合系统(1),从形式上看系统(1)是系统(3)的一种特殊情况,但文献[12]利用变分方法仅仅获得系统(3)至少存在 1 个弱解。尽管文献[2,13]涉及到特征值的近共振,但没有考虑 Neumann 边值条件;文献[10,12]考虑了 Neumann 边值条件,但共振或近共振与否无直接关系。另外,文献[2,10,13]研究的问题并非区域内部的耦合系统。本文创新点在于,类似于文献[2]的思想,利用本征值问题结合代数分析的方法考虑系统(1)无穷多共振经典解的存在性,不仅获得了多重解,还利用恰当的例子佐证所得的结论,所采用的方法和获得的结论与文献[12]均不同。

定理 1 设 a, b, λ 是任意正数(常数参数均可),则系统(1)存在无穷多共振经典解,此外还有:

- 1) 当 $0 < \lambda < \frac{3}{2}\left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$ 时,系统(1)存在至少一族非平凡的经典解;
- 2) 当 $\lambda = \frac{3}{2}\left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$ 时,系统(1)存在至少两族非平凡的经典解;
- 3) 当 $\lambda > \frac{3}{2}\left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$ 时,系统(1)存在至少三族非平凡的经典解;
- 4) 对任意的 $\lambda > 0$, 系统(1)都存在无穷多经典解。

1 主要结果及证明

第 1 步,证明系统(1)中的第二个方程存在无穷多经典解并给出抽象的表达式,它们将在定理 1 的证明中产生重要作用。

引理 1 考虑耦合系统(1)中的第二个方程,即:

$$\begin{cases} -\left(b\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = u, x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4)$$

那么,问题(4)存在无穷多经典解。

证明 为了获得问题(4)的无穷多经典解,现考虑如下经典二阶椭圆本征值问题:

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu u, x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (5)$$

根据文献[18]对本征值问题相关描述可知,存在特征序列 $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbf{R}$, 满足:

$$0 = \mu_1 < \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n \leq \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = +\infty,$$

且存在函数序列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 与上述本征值对应, 其中 $\varphi_1 \equiv C$, C 为任意常数, 使得:

$$-\Delta(t\varphi_n) = t\mu_n\varphi_n, x \in \Omega \text{ 且 } \mathbf{n}(x) \cdot \nabla(t\varphi_n) = 0, x \in \partial\Omega. \quad (6)$$

对所有的 $t \in \mathbf{R}$ 都成立并满足:

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi_n|^2 dx = \mu_n \int_{\Omega} \varphi_n^2 dx, \mu_1 = 0, \mu_2 = \inf_{\varphi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), \varphi \neq C} \frac{\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx}{\int_{\Omega} \varphi^2 dx} > 0.$$

而当 $\mu_i < \mu < \mu_{i+1}$ ($i \in \mathbf{N}$) 时问题(5)没有解, 因此 $t\varphi_n$ 是方程(5)满足 $\mu = \mu_n$ 时的经典解。

$$\mu = \mu_n (n \geq 2) \text{ 时, 设 } t_n = \pm \left[b\mu_n \int_{\Omega} |\nabla \varphi_n|^2 dx \right]^{-\frac{1}{2}}, \text{ 则 } b \int_{\Omega} |\nabla(t_n \varphi_n)|^2 dx = \mu_n^{-1}, \text{ 此式的等号两边同乘以(5)}$$

式的等号两边并令 $t = t_n$ 便得到 $-b \left(\int_{\Omega} |\nabla(t_n \varphi_n)|^2 dx \right) \Delta(t_n \varphi_n) = t_n \varphi_n$ 。即 $u_n := t_n \varphi_n$ 是问题(4)的解。特别地,

对于任意的 $t \in \mathbf{R}$, 如果 $n=1$, 那么由于 $\varphi_1 \equiv C$, 可知上式左端必然为 0, 于是右端必然也要满足 $t\varphi_1 = 0$, 因此根据 $t \in \mathbf{R}$ 的任意性知 $u_1 \equiv 0$ 。另外, 因 φ_n ($n=2, 3, \dots, \infty$) 是带下标的本征函数, 它有无穷多个, 从而由 $n=2, 3, \dots, \infty$ 对应 $u_n = t_n \varphi_n$ 也自然有无穷多个并且 $u_n \neq C$ ($n \geq 2$), C 为任意常数, 因此问题(4)有无穷多个解。注意到 φ_n 满足二阶连续可导可以推出 u_n 也满足二阶连续可导, 因此 u_n 是古典解。证毕

第2步, 记上述对应于 $n=1, 2, \dots, \infty$ 的 u_n 构成如下集合:

$$U_{\text{total}} := \left\{ u_n \mid u_1 \equiv 0; u_n = \pm \left[b\mu_n \int_{\Omega} |\nabla \varphi_n|^2 dx \right]^{-\frac{1}{2}} \varphi_n, n \geq 2 \right\}.$$

于是集合 U_{total} 中的每一个函数都是问题(4)的经典解, 需要进一步说明问题(4)的所有经典解构成的集合也是 U_{total} 。下面将利用反证法证明该结论。假设 u_n 是问题(4)的经典解, $u_n(x) \equiv 0$ 显然是一个经典解。下设 $u_n \not\equiv 0$, 如果 $\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \equiv 0$, 则(4)式中第一个式子等号右端必然为 0, 从而 $u_n(x) \equiv 0$; 如果 $u_n(x) \equiv C$, 则由 $\Delta u_n \equiv 0$ 推出(4)式中第一个式子等号右端必然为 0, 从而 $u_n(x) \equiv 0$ 。因此 $u_n \not\equiv 0$ 时根据方程(5)的形式可知 $\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \neq 0$ 且 u_n 不恒为常数, 因此有:

$$\begin{cases} -\Delta u = \left(b \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{-1} u, x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, x \in \partial\Omega \end{cases}.$$

对比方程(5)并考虑到当 $\mu = \mu_i$ ($i \in \mathbf{N}$) 时方程(4)有经典解并且 $\mu_i < \mu < \mu_{i+1}$ ($i \in \mathbf{N}$) 时没有解, 于是得出存在某一个 μ_i , 使得 $\mu = \mu_i = \left[b \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right]^{-1}$, 而此时必然存在某一个 $t \in \mathbf{R}$ 使得对应方程(4)的解为 $u = t\varphi_i$, 因此 $t = \pm \left[b\mu_i \int_{\Omega} |\nabla \varphi_i|^2 dx \right]^{-\frac{1}{2}}$ 。即此时 $u = t\varphi_i = \pm \left[b\mu_i \int_{\Omega} |\nabla \varphi_i|^2 dx \right]^{-\frac{1}{2}} \varphi_i$ 。注意到 U_{total} 中函数的形式, 即可得出问题(4)的经典解都在 U_{total} 中。

第3步, 为了结合分析技巧和代数方法证明系统(1)在来自 U_{total} 的扰动作用下总存在解, 给出代数方法证明中需要用到的一个基本不等关系, 此处描述为如下的引理。

引理 2 考虑关于 c 的代数方程 $\frac{ac^3}{\lambda c + 1} = b$, 那么该方程在实数域 $\mathbf{R}$ 上至少有 1 个实数根; 更进一步, 当 $b >$

$\frac{27a}{4\lambda^3}$ 时有 3 个实根; 当 $b = \frac{27a}{4\lambda^3}$ 时有 2 个实根; 当 $0 < b < \frac{27a}{4\lambda^3}$ 时只有 1 个实根。

证明 令 $f(c) = ac^3 - b\lambda c - b$, 由于当 $c \rightarrow -\lambda^{-1}$ 时 $\frac{ac^3}{\lambda c + 1} \rightarrow \infty \neq b$, 从而代数方程 $\frac{ac^3}{\lambda c + 1} = b$ 的根不可能为 $-\lambda^{-1}$, 却等价于函数 $f(c)$ 的零点, 注意到 $a, b, \lambda > 0$, 则有 $f(-\infty) = -\infty, f(0) = -b < 0, f(+\infty) = +\infty$ 。令 $f'(c) = 3ac^2 - b\lambda = 0$ 即可得出 $c = \pm \sqrt{\frac{b\lambda}{3a}}$ 为函数 $f(c)$ 的极值点。 $c_M = -\sqrt{\frac{b\lambda}{3a}}$ 为极大值点, $c_m = \sqrt{\frac{b\lambda}{3a}}$ 为极小值点, 此时极大值 f_M 与极小值 f_m 分别为:

$$\begin{cases} f_M = f\left(-\sqrt{\frac{b\lambda}{3a}}\right) = -\frac{b\lambda}{3}\sqrt{\frac{b\lambda}{3a}} + b\lambda\sqrt{\frac{b\lambda}{3a}} - b = \frac{2b\lambda}{3}\sqrt{\frac{b\lambda}{3a}} - b = b\left(\frac{2\lambda}{3}\sqrt{\frac{b\lambda}{3a}} - 1\right) \\ f_m = f\left(\sqrt{\frac{b\lambda}{3a}}\right) = \frac{b\lambda}{3}\sqrt{\frac{b\lambda}{3a}} - b\lambda\sqrt{\frac{b\lambda}{3a}} - b = -\frac{2b\lambda}{3}\sqrt{\frac{b\lambda}{3a}} - b = -b\left(\frac{2\lambda}{3}\sqrt{\frac{b\lambda}{3a}} + 1\right) < 0 \end{cases}$$

由连续函数的零点存在定理, $f(c)$ 在 $[0, +\infty)$ 有零点, 从而 $\frac{ac^3}{\lambda c + 1} = b$ 在 $[0, +\infty)$ 有一个实根; 下面证明 $\frac{ac^3}{\lambda c + 1} = b$ 在 $(-\infty, 0)$ 实根的存在情况, 在 $(-\infty, 0)$ 。此时仅须考虑 $\frac{2\lambda}{3}\sqrt{\frac{b\lambda}{3a}} - 1$ 值的符号关系, 于是直接可以计算出 $b > \frac{27a}{4\lambda^3}$ 时, $\frac{ac^3}{\lambda c + 1} = b$ 在 $(-\infty, 0)$ 有两个实根分居于 $c_M = -\sqrt{\frac{b\lambda}{3a}}$ 的两边; 当 $b = \frac{27a}{4\lambda^3}$ 时, $\frac{ac^3}{\lambda c + 1} = b$ 在 $(-\infty, 0)$ 只有实根 $c = c_M = -\sqrt{\frac{b\lambda}{3a}}$; 当 $0 < b < \frac{27a}{4\lambda^3}$ 时 $\frac{ac^3}{\lambda c + 1} = b$ 在 $(-\infty, 0)$ 没有实根。

综上所述, 对于关于 c 的代数方程 $\frac{ac^3}{\lambda c + 1} = b$ 而言, 当 $b > \frac{27a}{4\lambda^3}$ 时有 3 个实根; 当 $b = \frac{27a}{4\lambda^3}$ 时有两个实根; 当 $0 < b < \frac{27a}{4\lambda^3}$ 时只有一个实根。证毕

第 4 步, 断言: 对于问题(4)的每一个解函数 $u_n \in U_{\text{total}}$, 系统(1)中第一个方程存在对应于 u_n 的解 $v_n = cu_n$, 其中 c 是一个常数。特别地, c 可以是代数方程 $\frac{ac^3}{\lambda c + 1} = b$ 的根。称满足这种情形的解为耦合系统的共振解。

假设 $v_n = cu_n$ 是系统(1)中第一个方程的解, 其中 c 是一个常数, 那么:

$$\begin{cases} -\left(a \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 dx\right) \Delta v_n = \lambda v_n + u_n, x \in \Omega \\ \frac{\partial v_n}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u_n}{\partial \mathbf{n}} = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (7)$$

在此情况下, 显然有:

$$\begin{cases} -\left(a \int_{\Omega} |\nabla(cu_n)|^2 dx\right) \Delta(cu_n) = \lambda(cu_n) + u_n, x \in \Omega \\ \frac{\partial v_n}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial(cu_n)}{\partial \mathbf{n}} = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (8)$$

下面要证明的是, 总存在常数 c 使得(8)式成立。由于 u_n 是方程(4)的解, 从而(8)式的第 2 个式子显然成立; 而第 1 个式子可以写成:

$$-\left(ac^3 \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx\right) \Delta u_n = (\lambda c + 1)u_n. \quad (9)$$

当 $c = -\lambda^{-1}$ 时根据(9)式可知等式右端为 0, 从而左端必然为 0, 由于 a, c 均不为 0, 从而 $\nabla u_n = 0$ 或 $\Delta u_n = 0$ 。考虑到 $u_n \in U_{\text{total}}$, 因此此时系统(1)只有常数解并且任意常数都是系统(1)的解, 由于此时方程(7)的解满足 $v_n = cu_n$, 因此存在函数 $u_n \equiv C$, 而当 $u_n \equiv C$ 时根据扰动函数知 $C = 0$, 此时 $n = 1$, 从而方程(7)受 $u_1 \equiv 0$ 扰动时 $v_1 \equiv 0$, 因为此时相当于没有扰动, 从而不能错误地认为 $v_n \equiv 0$, 但是可以认为, 此时可以用 u_n 表出的解只有零解。当 $c \neq -\lambda^{-1}$ 时只要存在常数 c 使得代数方程 $\frac{ac^3}{\lambda c + 1} = b$, 那么方程(7)存在可以用问题(4)的解 u_n 线性表出的解。事实上,

根据引理 2 可知当 $a, b, \lambda > 0$ 时代数方程 $\frac{ac^3}{\lambda c + 1} = b$ 至少存在一个根 c_1 。而且当 $\lambda > \frac{3}{2} \left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$ 时有 3 个不同的实根

c_1, c_2, c_3 ; 当 $\lambda = \frac{3}{2} \left(\frac{2a}{b} \right)^{\frac{1}{3}}$ 时有两个不同的实根 $c_1 = \frac{3}{\lambda}$ 和 $c_2 = c_3 = -\frac{3}{2\lambda}$; 当 $0 < \lambda < \frac{3}{2} \left(\frac{2a}{b} \right)^{\frac{1}{3}}$ 时只有一个实根 c_1 。因此, 对于每一个 $u_n \in U_{\text{total}}$, 方程(7)至少存在一个解 $c_1 u_n$ 。更进一步, 当 $\lambda > \frac{3}{2} \left(\frac{2a}{b} \right)^{\frac{1}{3}}$ 时 $(u_n, c_1 u_n), (u_n, c_2 u_n)$ 和 $(u_n, c_3 u_n)$, 当 $\lambda = \frac{3}{2} \left(\frac{2a}{b} \right)^{\frac{1}{3}}$ 时 $(u_n, \frac{3}{\lambda} u_n)$ 和 $(u_n, -\frac{3}{2\lambda} u_n)$ 以及当 $0 < \lambda < \frac{3}{2} \left(\frac{2a}{b} \right)^{\frac{1}{3}}$ 时 $(u_n, c_1 u_n)$ 都是系统(1)的解。

第5步, 将根据(4)、(5)、(7)式证明系统(1)不受 u 扰动的情况下存在无穷多解, 此时相当于在方程(7)中 $u(x) \equiv 0$ 。如上一步所述, 方程(7)中能用 $u(x) \equiv 0$ 线性表出的解只有零解。 $\mu = \mu_n (n \geq 2)$ 时, 设 $\tau_n = \pm \left[\frac{a}{\lambda} \mu_n \int_{\Omega} |\nabla \varphi_n|^2 dx \right]^{-\frac{1}{2}}$, 则 $a \int_{\Omega} |\nabla(\tau_n \varphi_n)|^2 dx = \lambda \mu_n^{-1}$, 在方程(4)的等号两边同乘此式有:

$$-a \left(\int_{\Omega} |\nabla(\tau_n \varphi_n)|^2 dx \right) \Delta(\tau_n \varphi_n) = \lambda(\tau_n \varphi_n)。$$

即 $v_n := \tau_n \varphi_n$ 是方程(7)的解, 即系统(1)当 $u \equiv 0$ 时的解。同理可得 $v_1 \equiv 0$ 。注意到 $\varphi_n (n = 2, 3, \dots, \infty)$ 有无穷多个, 从而 $n = 2, 3, \dots, \infty$ 时 $v_n = \tau_n \varphi_n$ 共计也有无穷多个, 类似第2步知, $u \equiv 0$ 时系统(1)的解集为:

$$V_{\text{total}} := \left\{ (u_n, v_n) \mid u_n \equiv 0, v_1 \equiv 0; v_n = \pm \left[\frac{a}{\lambda} \mu_n \int_{\Omega} |\nabla \varphi_n|^2 dx \right]^{-\frac{1}{2}} \varphi_n, n \geq 2 \right\}。$$

证明 (定理1) 根据第1步, 方程(4)存在零解 $u(x) \equiv 0$ 和非零解 $u \neq 0$ 。而由第4步, $u \neq 0$ 固定时, 系统(1)至少存在一个对应 u 的经典解。特别地, 对任给的非零函数 $u_n \in U_{\text{total}}$, 当 $0 < \lambda < \frac{3}{2} \left(\frac{2a}{b} \right)^{\frac{1}{3}}$ 时系统(1)至少存在一个经典解, 当 $\lambda = \frac{3}{2} \left(\frac{2a}{b} \right)^{\frac{1}{3}}$ 时系统(1)至少存在2个经典解, 当 $\lambda > \frac{3}{2} \left(\frac{2a}{b} \right)^{\frac{1}{3}}$ 时系统(1)至少存在3个经典解, 这些解都可以表示为 $(u_n, c u_n)$, 其中 c 是代数方程 $\frac{ac^3}{\lambda c + 1} = b$ 的实数根。再由第5步可知, $u(x) \equiv 0$ 时系统(1)总有无穷多解, 解集为 V_{total} 。于是, 根据 U_{total} 所含函数的无穷多可知, 当 $0 < \lambda < \frac{3}{2} \left(\frac{2a}{b} \right)^{\frac{1}{3}}$ 时系统(1)存在无穷多个经典解 $(u_n, c_1 u_n)$, 当 $\lambda = \frac{3}{2} \left(\frac{2a}{b} \right)^{\frac{1}{3}}$ 时系统(1)存在无穷多对经典解 $(u_n, c_1 u_n), (u_n, c_2 u_n)$, 当 $\lambda > \frac{3}{2} \left(\frac{2a}{b} \right)^{\frac{1}{3}}$ 时系统(1)存在无穷多组经典解 $(u_n, c_1 u_n), (u_n, c_2 u_n), (u_n, c_3 u_n)$, 这些解均可表示为 $(u_n, c_i u_n)$, 其中 c_i 是代数方程 $\frac{ac^3}{\lambda c + 1} = b$ 的第 i 个实数根。根据第5步, 对任意的 $\lambda > 0, (0, v_n) \in V_{\text{total}}$ 是系统(1)的无穷多解。证毕

2 实例与结论分析

例1 当 Ω 取开区间 $(0, 1)$ 时, 考虑耦合系统(1)的一维情形, 此时问题(4)的解函数集 U_{total} 自然也是一维函数。根据前文分析可知, 此时耦合系统(1)可以重述如下:

$$\begin{cases} - \left(a \int_0^1 |v'|^2 dx \right) v'' = \lambda v + u, x \in (0, 1) \\ - \left(b \int_0^1 |u'|^2 dx \right) u'' = u, x \in (0, 1) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} v'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} v'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} u'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} u'(x) = 0 \end{cases}。 \quad (10)$$

现考虑同一区间 Ω 上的一维本征值问题(5), 那么它的本征值为 $\mu_n = (n-1)^2 \pi^2$, 本征值对应的本征函数 $\varphi_1 \equiv C$ 为任意常数, $n \geq 2$ 时 $\varphi_n = \cos[(n-1)\pi x]$ 。按照定理1的证明过程, 当 $n=1$ 时总可以令 $t_1=0$, 当 $n \geq 2$ 时

令 $t_n = \pm \left[b \mu_n \int_0^1 |\varphi_n'|^2 dx \right]^{-\frac{1}{2}}$, 可算出:

$$t_n = \pm \left[b (n-1)^2 \pi^2 \int_0^1 |n\pi \sin[(n-1)\pi x]|^2 dx \right]^{-\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2b}}{b (n-1)^2 \pi^2}, n \geq 2。$$

于是, 此时对应于问题(4)的解 $u_n = t_n \varphi_n$ 可以更明确地表示为:

$$u_n = t_n \varphi_n = \begin{cases} 0, n=1 \\ \pm \frac{\sqrt{2b}}{b(n-1)^2 \pi^2} \cos[(n-1)\pi x], n \geq 2 \end{cases} \quad (11)$$

所有的函数 u_n 构成的集合便为 U_{total} 。

如前面第 4 步所述,当 $\lambda c + 1 = 0$ 时可以用 u_n 表出的解只有零解。而 $\lambda c + 1 \neq 0$ 时关于 c 的代数方程 $\frac{ac^3}{\lambda c + 1} = b$ 可以描述为 $c^3 - \frac{b\lambda}{a}c - \frac{b}{a} = 0$ 。当 $b = \frac{27a}{4\lambda^3}$ 时有 2 个不同的实根:

$$c_1 = \frac{3}{\lambda} = \left(\frac{4b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}, c_2 = c_3 = -\sqrt{\frac{b\lambda}{3a}} = -\frac{3}{2\lambda} = -\left(\frac{b}{2a}\right)^{\frac{1}{3}}。$$

当 $0 < \lambda < \frac{3}{2} \left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$ 时有一个实根 c_1 , 当 $\lambda > \frac{3}{2} \left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$ 时有 3 个实根 c_1, c_2, c_3 , 根据 Cardano 公式得:

$$\begin{aligned} c_1 &= \left[\frac{b}{2a} + \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^3\lambda^3}{27a^3} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[\frac{b}{2a} - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^3\lambda^3}{27a^3} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}, \\ c_2 &= \omega \left[\frac{b}{2a} + \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^3\lambda^3}{27a^3} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} + \omega^2 \left[\frac{b}{2a} - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^3\lambda^3}{27a^3} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}, \\ c_3 &= \omega^2 \left[\frac{b}{2a} + \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^3\lambda^3}{27a^3} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} + \omega \left[\frac{b}{2a} - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^3\lambda^3}{27a^3} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}。 \end{aligned}$$

其中: $\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $\omega^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$, $i^2 = -1$ 。因此耦合系统(10)至少存在一组共振解 $(u_n, c_1 u_n)$ 。并且 $\lambda > \frac{3}{2} \left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$ 时 $(u_n, c_1 u_n)$, $(u_n, c_2 u_n)$ 和 $(u_n, c_3 u_n)$, $\lambda = \frac{3}{2} \left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$ 时 $(u_n, c_1 u_n)$ 和 $\left(u_n, -\sqrt{\frac{b\lambda}{3a}} u_n\right)$ 以及 $0 < \lambda < \frac{3}{2} \left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$ 时 $(u_n, c_1 u_n)$ 都是系统(10)的经典解,它们有无穷多个,其中 u_n 由(11)式决定。

如前面第 5 步所述,当 $n=1$ 时,令 $\tau_1 = 0$; 当 $n \geq 2$ 时,令 $\tau_n = \pm \left[\frac{a}{\lambda} \mu_n \int_{\Omega} |\nabla \varphi_n|^2 dx \right]^{-\frac{1}{2}}$, 可得:

$$\tau_n = \pm \left[\frac{a}{\lambda} (n-1)^2 \pi^2 \int_0^1 |n\pi \sin[(n-1)\pi x]|^2 dx \right]^{-\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2a\lambda}}{a(n-1)^2 \pi^2}, n \geq 2。$$

于是, $u \equiv 0$ 时系统(10)的解可以表示为 $(0, v_n)$, 其中:

$$v_n = \tau_n \varphi_n = \begin{cases} 0, n=1 \\ \pm \frac{\sqrt{2a\lambda}}{a(n-1)^2 \pi^2} \cos[(n-1)\pi x], n \geq 2 \end{cases} \quad (12)$$

即耦合系统(10)的一组解集为 $V_{\text{total}} := \{(0, v_n)\}_{n=1}^{\infty}$, 其中 v_n 由(12)式决定。

综上所述,获得耦合系统(10)经典解的存在性及其表示,通过实例来提高了耦合系统(1)中结论的可靠性。另外,作为本文的结论,通过本征值问题以及代数分析的方法,获得耦合系统(1)的无穷多经典解,本文所得到的解,主要用来描述系统振动在横向上形成的共振现象,它可以视为 Kirchhoff 型问题的混合作用模型中,两种流体弹性材料混合在一起时,如果一种弹性材料受力横向振动用 $v = v(x)$ 表示,另一种弹性材料与之附着受力横向振动用 $u = u(x)$ 表示,则本文的解描述了具有相同振动频率时另一种振动对一种振动的促进或者牵制。对于由(8)式决定的系统(1)的解 $(u_n, c_i u_n)$, 当 c_i 为正时表示系统形成强烈的共振,当 $c_i \in [-1, 0)$ 时表示系统对振幅形成最大的削弱,当 $c_i \leq -1$ 时表示系统对振动方向进行强制反向并对振幅形成最大的削弱,其中 c_i 是代数方程 $\frac{ac^3}{\lambda c + 1} = b$ 的第 i 个实数根。因此耦合系统(1)的研究在生活中具有实际意义。

参考文献:

- [1] KIRCHHOFF G R. Vorlesungen über mathematische physik; mechanik[M]. Leipzig: Druck und von Teubner B G, 1876.
- [2] 王跃, 叶红艳, 雷俊, 等. 带线性项 Kirchhoff 型问题的无穷多古典解[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2020, 38(6): 65-73.
WANG Y, YE H Y, LEI J, et al. Infinitely many classical solutions for Kirchhoff type problem with linear term[J]. Journal of Guangxi Normal University (Natural Science Edition), 2020, 38(6): 65-73.

- [3] WANG Y, SUO H M, LEI C Y. Multiple positive solutions for a nonlocal problem involving critical exponent[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2017, 2017(275): 1-11.
- [4] 王跃, 周炎, 索洪敏, 等. 关于一类临界 Kirchhoff 问题的解[J]. 成都理工大学学报(自然科学版), 2020, 47(2): 245-248.
WANG Y, ZHOU Y, SUO H M, et al. The solutions for a kind of critical Kirchhoff problem[J]. Journal of Chengdu University of Technology (Science & Technology Edition), 2020, 47(2): 245-248.
- [5] LEI C Y, LIU G S, GUO L T. Multiple positive solutions for a Kirchhoff type problem with a critical nonlinearity[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2016, 31: 343-355.
- [6] FARACI F, FARKAS C. On a critical Kirchhoff-type problem[J]. Nonlinear Analysis, 2020, 192, 111679: 1-13.
- [7] SUN Y J, TAN Y X. Kirchhoff type equations with strong singularities[J]. Communications on Pure & Applied Analysis, 2019, 18(1): 181-193.
- [8] AN Y C, SUO H M. Existence of solutions for the Neumann boundary problem of Kirchhoff type equations[J]. Journal of Spectral Theory, 2019, 9(2): 547-568.
- [9] 王守财, 赵仕海, 熊宗洪, 等. 一类 Neumann 边界条件的 Kirchhoff 型方程解的多重性[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2019, 44(4): 11-15.
WANG S C, ZHAO S H, XIONG Z H, et al. Multiple solutions for a class of Kirchhoff type equation involving Neumann boundary condition[J]. Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition), 2019, 44(4): 11-15.
- [10] 胡爱莲. Kirchhoff 方程 Neumann 问题的无穷多解[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2019, 33(9): 223-228.
HU A L. Infinitely many solutions for Neumann problem of Kirchhoff equation[J]. Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science), 2019, 33(9): 223-228.
- [11] ZHANG J. The critical Neumann problem of Kirchhoff type[J]. Applied Mathematics & Computation, 2016, 274: 519-530.
- [12] CORRÊA F J S A, NASCIMENTO R G. On a nonlocal elliptic system of p -Kirchhoff-type under Neumann boundary condition [J]. Mathematical & Computer Modelling, 2009, 49(3): 598-604.
- [13] 王跃, 梁金平, 索洪敏. 一类非局部近共振问题多重解的存在性[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(4): 53-58.
WANG Y, LIANG J P, SUO H M. Existence of multiple solutions for a class of nonlocal near resonance problems[J]. Journal of Southwest University (Natural Science Edition), 2018, 40(4): 53-58.
- [14] 王跃, 索洪敏, 韦维. 无边界约束的一类新 Kirchhoff 型问题的古典解[J]. 数学物理学报, 2020, 40A(4): 857-868.
WANG Y, SUO H M, WEI W. Classical solutions for a kind of new Kirchhoff-type problems without boundary constraint[J]. Acta Mathematica Scientia, 2020, 40A(4): 857-868.
- [15] LEI C Y, SUO H M, CHU C M. Three solutions of a Kirchhoff type problem involving critical growth and near resonance [J]. Indian Journal of Pure & Applied Mathematics, 2018, 49(1): 99-112.
- [16] SUO H M, TANG C L. Multiplicity results for some elliptic systems near resonance with a nonprincipal eigenvalue[J]. Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications, 2010, 73(7): 1909-1920.
- [17] WANG Y, YANG X. Infinitely many solutions for a new Kirchhoff type equation with subcritical exponent[J/OL]. Applicable Analysis, 2020, 1767288: 1-14 (2020-05-25) [2020-07-05]. <http://doi.org/10.1080/100036811.2020.1767288>.
- [18] STRAUSS W A. Partial differential equations: an introduction[M]. 2nd Edition. Hoboken: John Wiley & Sons, 2007.

Infinitely Many Resonant Solutions for a Class of System

WEI Qiping¹, WANG Yue², XIONG Zonghong^{1,2}, HAO Xueyan¹

(1. School of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang 550025;

2. School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang 550025, China)

Abstract: [Purposes] Consider the existence of infinitely many solutions for a Kirchhoff-type coupled system with linear terms. [Methods] It is discussed by using the theories of eigenvalue problem and the method of algebraic analysis. [Findings] It obtains that there are infinitely many classical solutions, which show resonance in practical applications. [Conclusions] It is shown that the system has at least a class of resonant solutions. By the way, there are one, two or three classes of solutions when the parameters satisfy different conditions in the system. Moreover, an example is given to supplement the conclusions drawn.

Keywords: Kirchhoff-type problem; coupled system; resonant solution; method of algebra analysis

(责任编辑 黄 颖)