

无限指标集上的择一定理及其在向量优化中的应用*

陈 磊, 高 英

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】探究无限多个准则的向量优化问题解的刻画。【方法】通过建立无限指标集上的择一定理,研究了无限多个准则的向量优化问题的弱有效解、有效解和 G -真有效解的标量化刻画。【结果】首先,在不需要任何凸性条件下建立了无限指标集上的择一定理。随后,将择一定理应用到无限多个准则的向量优化问题中,给出了弱有效解、有效解和 G -真有效解的标量化结果。【结论】所得结果对处理无限多个准则的向量优化问题具有实际意义。

关键词:无限指标集; 择一定理; 向量优化; 标量化方法

中图分类号:O221.6

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2021)03-0001-05

在实际生活中,大量的问题需要对多个目标进行优化决策,这类问题的数学模型为在一定约束条件下极小化或极大化一个向量值映射,这类问题称为多目标优化问题。多目标优化问题的起源可以追溯到经济学中,经济学家 Pareto^[1]将多个难以比较的目标归纳为多目标优化问题,随后又给出了 Pareto 有效解的朴素思想。Neuman^[2]在多目标优化领域的研究成果推动了多目标优化问题相关课题的发展。Koopmans^[3]从生产与分配的活动分析中,再次提出了多目标优化问题,并同时引进了 Pareto 有效解的概念。后来,众多学者的研究发现,非劣意义下的有效解概念过于宽泛,导致在某些向量优化问题中,一些有效解会出现异常。例如:它们不能以标量化形式给出,需对有效解的定义再稍加限制,这就导致真有效解概念的产生。例如:Geoffrion 真有效解^[4]、Borwein 真有效解^[5]等。提出这些解的概念后,如何求解成为了主要问题。最初解决多目标优化问题的方法为将它等价转化为对应的数值优化问题处理,此方法称为标量化方法。标量化方法分为线性标量化和非线性标量化方法。线性标量化基于凸集分离定理或择一定理,在凸性或广义凸性条件下,建立多目标优化问题与线性标量化问题最优解集的等价性^[6-7]。非线性标量化为非凸条件下,可通过建立非凸分离定理或非凸择一定理,得到多目标优化问题的标量化刻画^[8-9]。特别地,Kaliszewski^[10]给出了有限指标集上的非凸择一定理,并应用到多目标优化问题中,给出了弱有效解、有效解和 Geoffrion 真有效解的非线性标量化结果。Engau^[11]针对无限多个准则的向量优化问题,在 Geoffrion 真有效解的基础上提出了改进的 Geoffrion 真有效解,并给出了凸性条件下的线性标量化结果和非凸条件下的切比雪夫标量化结果。

本文在文献[10]的基础上,通过建立无限指标集上的择一定理,研究了无限多个准则的向量优化问题的弱有效解、有效解和 G -真有效解的标量化刻画,给出了在没有任何凸性条件下,针对无限指标集的择一定理,并将择一定理应用到无限多个准则的向量优化问题中,给出在弱有效解、有效解和 G -真有效解的条件下相应的标量化结果。

1 预备知识

设 I 为有限或可数无限指标集, V 是与 I 对应的实线性向量或 l^∞ -空间,且范数定义为 $\|v\|_\infty := \sup_{i \in I} |v_i| < \infty$, $\forall v \in V$ 。若 I 是有限集,该范数等价于 ∞ -范数。当 I 是可数无限集,将相应的非负或严格正向量集记为 $V_{\geq} :=$

* 收稿日期:2020-12-07 修回日期:2021-01-22 网络出版时间:2021-05-19 17:27

资助项目:国家自然科学基金(No. 1771064; No. 1991024);重庆市科学技术研究重点项目(No. KJZDK202001104);重庆市高校创新研究群体项目(No. CXQT20014);重庆市留学人员回国创业创新支持计划(No. CX2020096)

第一作者简介:陈磊,男,研究方向为多目标规划,E-mail:295022337@qq.com;通信作者:高英,女,教授,博士,E-mail:gaoyingimu@163.com

网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20210519.1457.008.html

$\{v \in V: v_i \geq 0, \forall i \in I\}; V_{>} := \{v \in V: v_i > 0, \forall i \in I\}$, 且引进符号 $\Delta := \{\lambda \in V: \sum_{i \in I} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, \forall i \in I\}; \Delta^\circ := \{\lambda \in V: \sum_{i \in I} \lambda_i = 1, \lambda_i > 0, \forall i \in I\}$.

设 $x, y \in V$, 定义序关系: $x \geq y \Leftrightarrow x_i \geq y_i, \forall i \in I; x \gg y \Leftrightarrow x_i > y_i, \forall i \in I, x \neq y; x > y \Leftrightarrow x_i > y_i, \forall i \in I$.

考虑如下无限多个目标函数的向量优化问题(VOP):

$$\begin{aligned} \min & f(x), \\ \text{s. t. } & x \in C. \end{aligned}$$

其中: $\emptyset \neq C \subseteq \mathbf{R}^n, f_i: C \rightarrow \mathbf{R}$ 为凸函数, $i \in I$.

定义 1^[11,13] 设 $\bar{x} \in C$, 则:

1) 若不存在 $x \in C$ 使得 $f_i(x) < f_i(\bar{x}), \forall i \in I$, 则称 $\bar{x}$ 是(VOP)的弱有效解。

2) 若不存在 $x \in C$ 使得 $f_i(x) \leq f_i(\bar{x}), \forall i \in I$, 则称 $\bar{x}$ 是(VOP)的有效解。

3) 若 $\bar{x}$ 是问题(VOP)的有效解且存在实数 $M_i > 0 (i \in I)$ 使得对任意满足 $f_i(x) < f_i(\bar{x})$ 的 $x \in C$ 和 $i (i \in I)$ 都存在满足 $f_j(\bar{x}) < f_j(x)$ 的 $j, j \in I$ 使得 $\frac{f_i(\bar{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\bar{x})} \leq M_i$, 则称 $\bar{x}$ 是(VOP)的 G -真有效解。

对于无限多个目标函数的向量优化问题, 文献[12-14]给出了无限指标集下的择一定理。

引理 1^[12] 设 $C \subseteq \mathbf{R}^n$ 是非空闭凸集, $f_i(x) (i \in I)$ 是 C 上的凸函数, 则下列说法有且仅有一个成立: 1) 存在 $x \in C$ 使得 $f_i(x) < 0, \forall i \in I$; 2) 存在 $\lambda \in \Delta$ 使得 $f(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(x) \geq 0, \forall x \in C$.

引理 2^[14] 设 $C \subseteq \mathbf{R}^n$ 是非空闭凸集, $f_i(x) (i \in I)$ 是 C 上的凸函数, 则下列说法有且仅有一个成立: 1) 存在 $x \in C$ 使得 $f_i(x) \leq 0, \forall i \in I$; 2) 存在至多有 $n+1$ 个非零元素 λ 和 $\varepsilon > 0$ 使得 $f(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(x) \geq \varepsilon, \forall x \in C$.

利用以上两个择一定理, 可建立凸性条件下, 无限多个准则的向量优化问题的线性标量化结果。如: 文献[12]利用引理 1 给出了(VOP)弱有效解的线性标量化结果。文献[14]利用引理 2 给出了(VOP)有效解的线性标量化结果。

2 无限指标集上的择一定理

为了给出非凸条件下(VOP)问题各种解的非线性标量化刻画, 首先将文献[10]中, 有限多个指标集的择一定理推广到无限多个指标集的择一定理。

定理 1 设 $C \subseteq \mathbf{R}^n, f_i: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, i \in I$, 则下列说法有且仅有一个成立: 1) 存在 $x \in C$ 使得 $f_i(x) < 0, \forall i \in I$; 2) 对于任意负数 ε_i , 存在正数 $\lambda_i = \left(-\frac{1}{\varepsilon_i}\right) (i \in I)$ 使得 $\sup_{i \in I} \lambda_i (f_i(x) - \varepsilon_i) \geq 1, \forall x \in C$.

证明 假设结论 1) 成立, 下面证明结论 2) 不成立。

当结论 1) 成立时, 存在 $x \in C$, 使得 $f_i(x) < 0, \forall i \in I$. 取 $\varepsilon_i \in (f_i(x), 0)$ 时 $f_i(x) - \varepsilon_i < 0, \forall i \in I$. 此时, 对于 $\lambda_i = \left(-\frac{1}{\varepsilon_i}\right), i \in I$ 都有 $\sup_{i \in I} \lambda_i (f_i(x) - \varepsilon_i) < 0$. 这表明结论 2) 不成立。

下面证明结论 1) 不成立时, 结论 2) 成立。

假设结论 1) 不成立, 则对任意的 $x \in C$, 存在指标 $j \in I$ 使得 $f_j(x) \geq 0$. 从而有 $\sup_{i \in I} f_i(x) \geq 0, \forall x \in C$. 任取 $\varepsilon_i < 0, i \in I$, 由 $\lambda_i = \left(-\frac{1}{\varepsilon_i}\right), i \in I$, 且 $\sup_{i \in I} \lambda_i f_i(x) \geq 0, \forall x \in C$. 从而有 $\sup_{i \in I} \lambda_i (f_i(x) - \varepsilon_i + \varepsilon_i) \geq 0$. 也即 $\sup_{i \in I} \lambda_i (f_i(x) - \varepsilon_i) \geq 1$. 这表明结论 2) 成立。证毕

定理 2 设 $C \subseteq \mathbf{R}^n, f_i: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, i \in I$, 则下列说法有且仅有一个成立:

1) 存在 $x \in C$ 使得 $f_i(x) \leq 0, \forall i \in I$;

2) 对于任意负数 ε_i 和正数 ε , 存在正数 $\lambda_i = \left(-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_i}\right) (i \in I)$ 使得 $\sup_{i \in I} \lambda_i (f_i(x) - \varepsilon_i) > \varepsilon, \forall x \in C$.

证明 假设结论 1) 成立, 则存在 $x \in C$, 使得 $f_i(x) \leq 0, \forall i \in I$. 任取 $\varepsilon_i \in (-\infty, 0)$ 和 $\varepsilon \in (0, +\infty)$ 时 $f_i(x) - \varepsilon_i \leq -\varepsilon_i, \forall i \in I$. 这时, 对于 $\lambda_i = \left(-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_i}\right) (i \in I)$ 都有 $\sup_{i \in I} \lambda_i (f_i(x) - \varepsilon_i) \leq \varepsilon$. 这表明结论 2) 不成立。

下面证明结论 1) 不成立时结论 2) 成立。

假设结论 1) 不成立, 则对任意的 $x \in C$, 存在指标 $j \in I$ 使得 $f_j(x) > 0$ 。从而有 $\sup_{i \in I} f_i(x) > 0, \forall x \in C$ 。

任取 $\varepsilon_i < 0, i \in I$ 和 $\varepsilon > 0$, 令 $\lambda_i = \left(-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_i}\right), i \in I$, 且 $\sup_{i \in I} \lambda_i f_i(x) > 0, \forall x \in C$ 。从而有 $\sup_{i \in I} \lambda_i (f_i(x) - \varepsilon_i + \varepsilon_i) > 0$ 。

即 $\sup_{i \in I} \lambda_i (f_i(x) - \varepsilon_i) > \varepsilon$ 。这表明结论 2) 成立。

证毕

3 向量优化问题的标量化刻画

定理 3 若 $\bar{x} \in C$ 为 (VOP) 的弱有效解, 则 $\bar{x}$ 是如下标量化问题 $\min_{x \in C} \sup_{i \in I} \lambda_i (f_i(x) - y_i^*)$ 的解, 其中:

$$y_i^* < f_i(\bar{x}), \lambda_i = (f_i(\bar{x}) - y_i^*)^{-1}, i \in I.$$

证明 假设 $\bar{x} \in C$ 是弱有效解, 则系统 $f_i(x) < f_i(\bar{x}) (\forall i \in I)$ 在 $x \in C$ 中没有解。由定理 1 可知, 对于任意负数 ε_i , 存在正数 $\lambda_i = (-\varepsilon_i)^{-1}, i \in I$ 使得:

$$\sup_{i \in I} \lambda_i (f_i(x) - f_i(\bar{x}) - \varepsilon_i) \geq 1, \forall x \in C. \quad (1)$$

令 $\varepsilon_i = y_i^* - f_i(\bar{x}) < 0, i \in I$, 则 $\lambda_i = (f_i(\bar{x}) - y_i^*)^{-1} > 0$, 且由 (1) 式可知: $\sup_{i \in I} \lambda_i (f_i(x) - y_i^*) \geq 1, \forall x \in C$ 。

又由于 $1 = \lambda_i (f_i(\bar{x}) - y_i^*), i \in I$, 故有 $\sup_{i \in I} \lambda_i (f_i(x) - y_i^*) \geq \sup_{i \in I} \lambda_i (f_i(\bar{x}) - y_i^*), \forall x \in C$ 。这表明结论成立。

证毕

例 1 在 (VOP) 问题中, 设 $I = \{0, 1, 2, \dots\}, i \in I$ 。其中: 当 $i = 0$ 时, 有线性函数 $f_0(x) = x$; 当 $i \geq 1$ 时, 则有 $f_i(x) = 1 - 2^i x$ 。再令 $C = [0, 1]$, 不难看出 $x \in C$ 是有效解集, 也为弱有效解集。现令 $\bar{x} = 0$, 任取 $y_i^* < f_i(\bar{x}), y_i \neq 0, i \in I$ 。令 $\lambda_i = (f_i(\bar{x}) - y_i^*)^{-1}, i \in I$, 则对于任意 $x \in C$, 当 $i = 0$ 时有:

$$\sup_{i \in I} \lambda_i (f_i(x) - y_i^*) \geq \lambda_0 (f_0(\bar{x}) - y_0^*) = \frac{\bar{x} - y_0^*}{-y_0^*} \geq 1 = \sup_{i \in I} \lambda_i (f_i(0) - y_i^*),$$

这表明 $\bar{x} = 0$ 为 $\min_{x \in C} \sup_{i \in I} \lambda_i (f_i(x) - y_i^*)$ 的最优解。

定理 4 若 $\bar{x} \in C$ 为 (VOP) 的有效解, 则 $\bar{x}$ 是标量化问题 $\min_{x \in C} \sup_{i \in I} \lambda_i (f_i(x) - y_i^*)$ 的严格解, 其中: $\varepsilon > 0$,

$$\lambda_i = \frac{\varepsilon}{f_i(\bar{x}) - y_i^*}, y_i^* < f_i(\bar{x}), i \in I.$$

证明 假设 $\bar{x} \in C$ 是有效解, 则系统 $f_i(x) \leq f_i(\bar{x}), \forall i \in I$ 在 $x \in C$ 中没有解。由定理 2 可知, 对于任意负数 ε_i 和正数 ε , 存在正数 $\lambda_i = \left(-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_i}\right), i \in I$ 使得:

$$\sup_{i \in I} \lambda_i (f_i(x) - f_i(\bar{x}) - \varepsilon_i) > \varepsilon, \forall x \in C. \quad (2)$$

令 $\varepsilon_i = y_i^* - f_i(\bar{x}) < 0, i \in I$, 则对于任意正数 ε 有 $\lambda_i = \left(\frac{\varepsilon}{f_i(\bar{x}) - y_i^*}\right) > 0$, 且由 (2) 式可知:

$$\sup_{i \in I} \lambda_i (f_i(x) - y_i^*) > \varepsilon, \forall x \in C.$$

又由于 $\varepsilon = \lambda_i (f_i(\bar{x}) - y_i^*), i \in I$, 故有 $\sup_{i \in I} \lambda_i (f_i(x) - y_i^*) > \sup_{i \in I} \lambda_i (f_i(\bar{x}) - y_i^*), \forall x \in C$ 。结论成立。

证毕

下面为了给出真有效解的非线性标量化结果, 首先给出如下引理。

引理 3 若 $\bar{x} \in C$ 为 (VOP) 的 G -真有效解, 对任意 $\alpha_j > 0, j \in I, \alpha > 0$ 和 $\lambda \in \Lambda^\circ$, 系统 $\alpha_j f_j(x) + \alpha \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(x) < \alpha_j f_j(\bar{x}) + \alpha \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(\bar{x})$ 在 C 上没有解。

证明 设 $\bar{x}$ 是 G -真有效解, 则 $\bar{x}$ 是弱有效解, 故系统 $f_j(x) < f_j(\bar{x}), \forall j \in I$ 在 $x \in C$ 上没有解。从而对任意的 $\alpha_j > 0$, 系统

$$\alpha_j f_j(x) < \alpha_j f_j(\bar{x}), \forall j \in I \quad (3)$$

在 $x \in C$ 上没有解。下面针对 $C \setminus \{\bar{x}\}$ 中点分为两种情况进行证明。

1) 假设 $\hat{x} \in C \setminus \{\bar{x}\}$ 满足 $\sum_{i \in I} \lambda_i f_i(\bar{x}) \leq \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(\hat{x})$, 则由 (3) 式可知对任意的 $\alpha > 0$, 使得 $\alpha_j f_j(\hat{x}) + \alpha \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(\hat{x}) < \alpha_j f_j(\bar{x}) + \alpha \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(\bar{x})$ 不成立。

2) 假设 $\hat{x} \in C \setminus \{\bar{x}\}$ 满足 $\sum_{i \in I} \lambda_i f_i(\bar{x}) > \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(\hat{x})$ 。

不妨令 $u_i = \tau + \sup_{x \in C} \{f_i(x)\}$, $i \in I$, 其中 $\sup\{f_i(x) : i \in I, \forall x \in C\} < +\infty, \tau > 0$ 。设 $\mu_i = \frac{1}{(u_i - f_i(\bar{x}))}$, 则 $0 < \mu_i \leq \frac{1}{\tau} < +\infty$, 且 $\mu_i(u_i - f_i(\bar{x})) = 1, i \in I$ 。

令 $\delta(\hat{x}) = \sup_{i \in I} \{u_i - f_i(\hat{x})\} \geq \tau > 0$, $\gamma = \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i(f_i(\bar{x}) - f_i(\hat{x}))}{\delta(\hat{x})} > 0$, 则至少存在一个指标 $i \in I$ 使得:

$$f_i(\bar{x}) - f_i(\hat{x}) \geq \gamma \delta(\hat{x}) > 0。$$

从而由 G -真有效解的定义, 存在另一个指标 $j \in I$ 使得 $f_j(\hat{x}) > f_j(\bar{x})$, 并且 $f_i(\bar{x}) - f_i(\hat{x}) \leq M_i(f_j(\hat{x}) - f_j(\bar{x}))$ 。

令 $\epsilon = (M_i \delta(\hat{x}))^{-1} > 0$, 则有 $\frac{u_j - f_j(\bar{x})}{u_j - f_j(\hat{x})} \geq 1 + \frac{f_i(\bar{x}) - f_i(\hat{x})}{M_i(u_j - f_j(\hat{x}))} \geq 1 + \epsilon \gamma \delta(\hat{x})$, 由此式可得:

$$\frac{u_j - f_j(\bar{x})}{u_j - f_j(\hat{x})} - \epsilon \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(\bar{x}) \geq 1 + \epsilon \gamma \delta - \epsilon \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(\bar{x}) = 1 + \epsilon(\gamma \delta(\hat{x}) - \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(\bar{x})) = 1 - \epsilon \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(\hat{x})。$$

根据 μ_i 的定义, 从而有 $\frac{f_j(\hat{x}) - f_j(\bar{x})}{u_j - f_j(\hat{x})} \geq \epsilon(\sum_{i \in I} \lambda_i f_i(\bar{x}) - \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(\hat{x}))$, 现令 $\delta_1(\hat{x}) = u_j - f_j(\hat{x}) > 0$,

$\beta = \delta_1(\hat{x})\epsilon$, 则 $f_j(\hat{x}) + \beta \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(\hat{x}) \geq f_i(\bar{x}) + \beta \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(\bar{x})$ 。从而对于任意 $\alpha_j > 0$, 令 $\alpha = \beta \alpha_j$, 两边同时乘以 α_j ,

则有 $\alpha_j f_j(\hat{x}) + \alpha \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(\hat{x}) \geq \alpha_j f_j(\bar{x}) + \alpha \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(\bar{x})$ 。

因此, 对任意 $\alpha_j > 0, j \in I, \alpha > 0$ 和 $\lambda \in \Delta^\circ$ 使得 $\alpha_j f_j(\hat{x}) + \alpha \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(\hat{x}) < \alpha_j f_j(\bar{x}) + \alpha \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(\bar{x})$ 在 C 上无解。

证毕

定理 5 若 $\bar{x} \in C$ 为 (VOP) 的 G -真有效解, 则对任意 $\alpha > 0, \bar{x}$ 是标量化问题

$$\min_{x \in C} \sup_{j \in I} \lambda_j((f_j(x) - y_j^*) + \alpha \sum_{i \in I} \lambda_i(f_i(x) - y^*))$$

的解, 其中 $\lambda_j = ((f_j(\bar{x}) - y_j^*) + \alpha \sum_{i \in I} \lambda_i(f_i(\bar{x}) - y^*))^{-1}$, y^* 是任意数使得 $\lambda_j > 0$ 。

证明 假设 $\bar{x} \in C$ 是 G -真有效解, 由引理 3 可知, 令 $\alpha_j = 1 (j \in I)$ 对于任意 $\alpha > 0$, 则 $f_j(x) + \alpha \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(x) < f_j(\bar{x}) + \alpha \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(\bar{x}) (j \in I)$, 在 C 上没有解, 再由定理 3 的证明可知, 对于任意负数 ϵ_j , 存在正数 $\lambda_j = (-\epsilon_j)^{-1} (j \in I)$ 使得:

$$\sup_{j \in I} \lambda_j((f_j(x) - f_j(\bar{x})) + \alpha \sum_{i \in I} \lambda_i(f_i(x) - f_i(\bar{x})) - \epsilon_j) \geq 1, \forall x \in C。 \quad (4)$$

令 $\epsilon_j = (y_j^* - f_j(\bar{x})) + \alpha \sum_{i \in I} \lambda_i(y^* - f_i(\bar{x})) < 0, j \in I$, 故:

$$\lambda_j = (-\epsilon_j)^{-1} = ((f_j(\bar{x}) - y_j^*) + \alpha \sum_{i \in I} \lambda_i(f_i(\bar{x}) - y^*))^{-1}, j \in I。$$

从而由 (4) 式可知 $\sup_{j \in I} \lambda_j((f_j(x) - y_j^*) + \alpha \sum_{i \in I} \lambda_i(f_i(x) - y^*)) \geq 1, \forall x \in C$ 。又由于:

$$1 = \lambda_j((f_j(\bar{x}) - y_j^*) + \alpha \sum_{i \in I} \lambda_i(f_i(\bar{x}) - y^*)), j \in I,$$

故对于任意的 $x \in C$, 有:

$$\sup_{i \in I} \lambda_j((f_j(x) - y_j^*) + \alpha \sum_{i \in I} \lambda_i(f_i(x) - y^*)) \geq \lambda_j((f_j(\bar{x}) - y_j^*) + \alpha \sum_{i \in I} \lambda_i(f_i(\bar{x}) - y^*))。 \quad \text{证毕}$$

定理 6 若 $\bar{x} \in C$ 为 (VOP) 的 G -真有效解, 则对任意 $\alpha > 0, \bar{x}$ 是标量化问题

$$\min_{x \in C} \sup_{j \in I} (\lambda_j(f_j(x) - y_j^*) + \alpha \sum_{i \in I} \lambda_i(f_i(x) - y^*))$$

的解, 其中: $\lambda_j = (f_j(\bar{x}) - y_j^*)^{-1}, y_j^*$ 是任意数使得 $\lambda_j > 0$ 。

证明 假设 $\bar{x} \in C$ 是 G -真有效解, 令 $\alpha_j = (f_j(\bar{x}) - y_j^*)^{-1}$, 由引理 3 证明结果可知, 对任意 $x \in C, \alpha_j > 0, j \in I, \alpha > 0$ 和 $\lambda \in \Delta^\circ$ 有 $\alpha_j f_j(x) + \alpha \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(x) \geq \alpha_j f_j(\bar{x}) + \alpha \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(\bar{x}), j \in I$ 。

同理, 对于任意的 $x \in C$ 有:

$$\sup_{j \in I} (\alpha_j (f_j(\mathbf{x}) - y_j^*) + \alpha \sum_{i \in I} \lambda_i (f_i(\mathbf{x}) - y^*)) \geq \sup_{j \in I} (\alpha_j (f_j(\bar{\mathbf{x}}) - y_j^*) + \alpha \sum_{i \in I} \lambda_i (f_i(\bar{\mathbf{x}}) - y^*)),$$

再令 $\alpha_j = \lambda_j, j \in I$, 则该结论成立。

证毕

参考文献:

- [1] PARETO V. Manuale di economic politica[M]. Milano:Societ a Editrice Linraria,1906.
- [2] von NEUMANN J,MORGENSTERN O. Theory of games and economic behavior[M]. Princeton:Princeton University Press, 1944.
- [3] KOOPMANS T C. Analysis of production as an efficient combination of activities[C]//KOOPMANS T C. Activity analysis of production and allocation. New York:John Wiley and Sons,1951,13:33-97.
- [4] GEOFFRION A M. Proper efficiency and the theory of vector maximization[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1968,22(3):618-630.
- [5] BORWEIN J M. Proper efficient points for maximizations with respect to cones[J]. SIAM Journal on Control And Optimization, 1977,15(1):57-63.
- [6] 何爱华,张晓青,赵克全. 多目标优化问题近似解的组合标量化[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2019,36(3):7-10.
HE A H,ZHANG X Q,ZHAO K Q. Combined scalarizations of approximate solutions for multi-objective optimization problems [J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2019,36(3):7-10.
- [7] 唐莉萍,杨新民. 向量优化问题的线性标量化和近似解的刻画[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2015,32(3):1-6.
TANG L P,YANG X M. Linear scalarization for vector optimization problem and characterizations of approximate solutions[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2015,32(3):1-6.
- [8] 唐莉萍,杨新民,高英. 多目标优化问题的 Pascoletti-Serafini 标量化方法[J]. 中国科学:数学,2020,50(9):1249-1270.
TANG L P,YANG XM,GAO Y. The pascoletti-Serafini scalarization scheme for multiobjective optimization problems[J]. Scientia Sinica (Mathematica),2020,50(9):1249-1270.
- [9] 李小燕,李美术,高英. 多目标优化问题近似解的非线性标量化刻画[J]. 数学杂志,2018,38(3):563-570.
LI X Y,LI M S,GAO Y. Nonlinear scalarizations of approximate solutions for multiobjective programming problems[J]. Journal of Mathematics,2018,38(3):563-570.
- [10] KALISZEWSKI I. A theorem on nonconvex functions and its application to vector optimization[J]. European Journal of Operational Research,1995,80(2):439-445.
- [11] ENGAU A. Definition and characterization of Geoffrion proper efficiency for real vector optimization with infinitely many criteria[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2015,165(2):439-457.
- [12] ROSEN J B,MANGASARIAN O L,RITTER K. Nonlinear programming[M]. New York:Academic Press,1970.
- [13] SAWARAGI Y,NAKAYAM H,TANINO T. Theory of multiobjective optimization[M]. New York:Academic Press,1985.
- [14] ROCKAFELLAR T. Convex analysis[M]. Princeton:Princeton University Press,1970.

Operations Research and Cybernetics

Alternative Theorem on Infinite Index Set and Its Application in Vector Optimization

CHEN Lei, GAO Ying

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [Purposes] Exploring the characterization description of the solution to the vector optimization problem with infinite multiple criteria. [Methods] Establishing an alternative theorem on an infinite index set, studying the characterization of weak efficient solution, efficient solution and G -proper efficient solution of the vector optimization problem with infinite multiple criteria. [Findings] First of all, the alternative theorem on the infinite index set is established without any convexity. Subsequently, the alternative theorem is applied to the vector optimization problem of infinite multiple criteria, and the scalarized results for the weak efficient solution, the efficient solution and G -proper efficient solution are given. [Conclusions] It has practical significance for dealing with vector optimization problems with infinite multiple criteria.

Keywords: infinite indicator set; alternative theorems; vector optimization; scalarization method

(责任编辑 黄 颖)