

一类差分方程的动力学性质*

李明山¹, 徐江明², 周效良²

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 211106; 2. 岭南师范学院 数学与统计学院, 广东 湛江 524048)

摘要:【目的】研究一类差分方程的动力学性质。【方法】通过讨论系数参数与特征值的关系得到了双曲不动点的类型与稳定性,利用中心流形定理和分支理论研究了非双曲不动点的稳定性与 flip 分支,通过正规形理论与嵌入连续流等方法研究了特征值为±1的退化不动点的稳定性。【结果】得到了2-周期轨的稳定性、非双曲不动点的拓扑结构和退化不动点的稳定性。【结论】得到了一类差分方程的动力学性质。

关键词:差分方程; flip 分支; 中心流形定理; 退化不动点; 稳定性

中图分类号: O175.7

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2021)03-0062-06

近些年来,对差分方程的研究进展迅速,在理论和应用方面均涌现出很多漂亮的结果^[1-7]。目前差分方程理论在种群生物学建模与分析^[1-3]、不变曲线^[4]等方面的研究中发挥着重要作用。Sedaghat^[5]考虑了差分方程:

$$x_{n+1} = \frac{ax_{n-1}}{x_n x_{n-1} + b}, a, b > 0, x_0, x_{-1} \in \mathbf{R} \quad (1)$$

解的收敛性和奇偶子列的无界性。Zhao^[4]考虑了差分方程(1)不变曲线的解析性质。关于差分方程的其他研究结果参见文献[6-7]。对于差分方程而言,不仅要研究它们的稳定性与吸引性,而且还要研究它们的分支性质^[3]。因为稳定性与吸引性仅考虑了差分方程的解随时间变化的情况^[5],没有考虑差分方程在参数发生微小扰动时解的形态变化,而通过研究差分方程的分支性质可得到拓扑结构变化与参数扰动的关系。

研究二阶差分方程特征值为±1的退化不动点稳定性的主要工具是正规形理论^[8]、Picard 迭代^[9]和嵌入流^[8-10]。将离散流嵌入微分方程的流,然后应用 blow-up 方法^[11]去研究对应向量场的定性性质。最后通过共轭关系^[12]得到差分方程在退化不动点的稳定性和定性性质。例如,Zhong 等人^[13]利用上述理论与方法研究了一类离散 Logistic 竞争模型的退化不动点的稳定性。

本文主要研究差分方程(1)的动力学性质,具体安排为:在第1节考虑差分方程(1)不动点的性质;在第2节考虑非双曲不动点的 flip 分支以及2-周期轨的稳定性;在第3节利用 Picard 迭代和嵌入流来研究差分方程(1)退化不动点的稳定性。

1 差分方程(1)的不动点

本节主要考查差分方程(1)不动点的双曲性、稳定性及相应的类型。现将差分方程(1)写成映射:

$$T: (x, y) \mapsto \left(y, \frac{ax}{xy+b} \right). \quad (2)$$

当 $a > b$ 时,映射(2)有3个不动点 $E_0(0, 0)$, $E_1(m, m)$ 和 $E_2(-m, -m)$, 其中 $m = \sqrt{a-b}$ 。当 $a \leq b$ 时,映射(2)只有1个不动点 E_0 , 此时映射(2)在 E_0 处的雅可比矩阵为:

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^{-1} & 0 \end{bmatrix},$$

* 收稿日期:2020-01-03 修回日期:2020-09-14 网络出版时间:2021-05-19 17:32

资助项目:国家自然科学基金(No. 11961021);广东省大学生科技创新培育专项资金(No. pdjh2021b0309);广东省高校重点项目(No. 2019KZDXM032)

第一作者简介:李明山,男,博士研究生,研究方向为微分方程与动力系统,E-mail:lmsmath@163.com;通信作者:周效良,男,教授,E-mail:zxlmath@163.com

网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20210519.1457.010.html

该矩阵特征值分别为: $\lambda_1 = \sqrt{\alpha^{-1}}, \lambda_2 = -\sqrt{\alpha^{-1}}$, 其中 $\alpha = \frac{b}{a}$ 。显然, 不动点 E_0 当且仅当 $a=b$ 时是非双曲的。当 $a>b$ 时, 不动点 E_0 是不稳定的结点; 当 $a<b$ 时, 不动点 E_0 是稳定的结点。映射(2)在 E_1 和 E_2 处的雅可比矩阵分别为:

$$J(E_1) = J(E_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \alpha-1 \end{bmatrix},$$

相应的特征值为: $\lambda_3 = -1, \lambda_4 = \alpha$ 。容易看出: 当 $a=b$ 时, 映射(2)的3个不动点 E_0, E_1 和 E_2 将会粘结在一起形成唯一的不动点 E_0 , 此时 E_0 是具有特征值为 ± 1 的退化不动点。

2 差分方程(1)的 flip 分支

本节将选取适当的参数考察差分方程(1)在不动点 E_1 和 E_2 的 flip 分支。

定理 1 映射(2)在不动点 E_1 处将发生超临界 flip 分支, 此时将出现一个稳定的 2-周期轨道, 且非双曲不动点 E_1 是稳定的。

定理 2 映射(2)在不动点 E_2 处将发生超临界 flip 分支, 此时将出现一个稳定的 2-周期轨道, 且非双曲不动点 E_2 是稳定的。

证明 进行坐标变换 $\tilde{x} = x - m, \tilde{y} = y - m$, 将不动点 E_1 平移到原点, 利用泰勒展开与线性变换 $H: u = x + y, v = -x + \alpha y, 0 < \alpha < 1$, 可得到如下映射:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -u + a_{11}u^2 + a_{12}uv + a_{13}v^2 \\ \alpha v + a_{21}u^2 + a_{22}uv + a_{23}v^2 \end{pmatrix} + O(3), \quad (3)$$

其中: $a_{21} = -a_{11}, a_{22} = -a_{12}, a_{23} = -a_{13}$ 且 $a_{11} = -\frac{2m}{1+\alpha}, a_{12} = \frac{2m\alpha}{1+\alpha}, a_{13} = \frac{\alpha m(1+\alpha+\alpha^2)}{1+\alpha}$ 。 $O(3)$ 表示次数大于或等于 3 的项。

为强调 m 作为分支参数, 将映射(3)进行如下悬挂处理:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -u + a_{11}u^2 + a_{12}uv + a_{13}v^2 \\ \alpha v + a_{21}u^2 + a_{22}uv + a_{23}v^2 \\ m \end{pmatrix} + O(3). \quad (4)$$

由中心流形定理^[14]可得映射(4)有如下的 C^2 一维中心流形:

$$W_{\text{loc}}^c(0) = \{(u, v, m) \mid v = h(u, m), |u| < \varepsilon_1, |m - m_0| < \varepsilon_2\},$$

其中: $\{m_0 \mid h(0, m_0) = Dh(0, m_0) = 0\}$ 且 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ 充分小, 故可将它设为如下形式:

$$v = h(u, m) = d_1 u^2 + e_1 u(m - m_0) + f_1(m - m_0)^2 + O(3).$$

由中心流形的不变性质可得:

$$h(-u + a_{11}u^2 + a_{12}uv + a_{13}v^2 + O(3), m) = \alpha h(u, m) + a_{21}u^2 + a_{22}uh(u, m) + a_{23}[h(u, m)]^2 + O(3).$$

解得 $d_1 = \frac{\alpha m}{1 - \alpha^2}, e_1 = f_1 = 0$, 故有:

$$v = h(u, m) = \frac{\alpha m}{1 - \alpha^2} u^2 + O(3). \quad (5)$$

将(5)式代入映射(3)中得到约束在中心流形上的一族含参映射为:

$$u \mapsto f_1(u) = -u - \frac{2m}{1+\alpha} u^2 + \frac{2\alpha^2 m^2}{(1+\alpha)(1-\alpha^2)} u^3 + O(4).$$

可以验算如下式子成立:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial m} \frac{\partial^2 f_1}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial u \partial m} \right) \Big|_{(0, m_0)} = -\frac{4}{1+\alpha} \neq 0, \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial u^2} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 f_1}{\partial u^3} \right) \Big|_{(0, m_0)} = \frac{2m_0^2(1-\alpha+12\alpha^2)}{(1+\alpha)^2(1-\alpha)} > 0.$$

故由文献[14]的定理 3.5.1 可得: 映射(2)在不动点 E_1 处将像定理 1 描述那样发生 flip 分支。此时约束在中心流形上的离散流是稳定的, 且有映射(2)的另一个特征值 $|\lambda_4| = |\alpha| < 1$, 从而不动点 E_1 是稳定的。

显然映射 T 满足

$$RT(\mathbf{w}) = T(R\mathbf{w}), R = \text{diag}(-1, -1), \mathbf{w} = (u, v).$$

从而映射 T 关于原点对称, 且不动点 E_1 和 E_2 也是关于原点对称, 所以借助对称性和定理 1 就可以得到不动点 E_2 的 flip 分支性质与稳定性。证毕

3 差分方程(1)的退化不动点

本节通过 Picard 迭代和嵌入流方法来研究退化不动点 E_0 的稳定性, 先给出如下引理。

引理 1^[5] 当 $a=b$ 时, 存在充分大的 n_0 使得对于任意的 $n > n_0$, 差分方程(1)生成的序列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n x_{n-1} > 0$ 。

引理 2^[8] 假设

$$\tilde{H}(y) := (S + N)y + \sum_{k \geq 2} H_k(y)$$

是一个在 O 附近的形式映射, 其中 $y \in \mathbf{R}^2$, S 是半单的且具有特征值 ± 1 , N 是幂零的, H_k 是次数 k 为的齐次多项式。则在 O 附近的存在唯一的不变向量场 $\tilde{Y}$ 使得:

$$\tilde{H} = S \circ \varphi_{\tilde{Y}}(1, \cdot).$$

这里 $\varphi_{\tilde{Y}}(t, \cdot)$ 表示 $\tilde{Y}$ 的形式流。另外, 对所有 $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, $j_k(\tilde{Y})$ 仅依赖于 $j_k(\tilde{H})$, 其中 j_k 截断形式映射或者形式向量场在原点 O 处的展开式中 k 次项系数。

定义 1 若存在常数 k, σ, η 使得对任意 $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\|(x, y)\|^k \leq \eta$, 都有

$$\|Y(x, y)\| \geq \sigma \|(x, y)\|^k$$

成立, 则称 C^∞ 向量场是 Lojasiewicz 类型的, 其中 $\|\cdot\|$ 表示 $\mathbf{R}^2$ 中的欧几里得范数。

引理 3^[12] 设 H 和 Y 分别是在 O 附近的一个 C^∞ 映射和一个 C^∞ 向量场, 且它们的形式部分分别与引理 2 给出的形式映射 $\tilde{H}$ 和形式向量场 $\tilde{Y}$ 相同。假设向量场 Y 有一轨道沿着特定的方向连接 O , 向量场 Y 无椭圆扇形, 且向量场 Y 是 Lojasiewicz 类型的。假设通过去奇化后得到的向量场仅有双曲平衡点, 则存在 C^∞ 坐标变换 Ψ 满足 $j_\infty(\Psi - I) = 0$ 使得

$$\Psi^{-1} \circ H \circ \Psi = S \circ \varphi_Y(1, \cdot),$$

其中 I 表示恒同变换。

引理 1 说明当 $a=b$ 时, 存在充分大的 n_0 使得映射 T 生成的序列 $\{(x_n, y_n)\}_{n_0}^{+\infty}$ 是位于第一象限或者第三象限。当 $a=b$, $|xy| < a$ 时, 通过 Taylor 展开, 映射(2)可写为:

$$\tilde{T}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x - 2\beta_0 x^2 y \end{pmatrix} + O(4).$$

其中 $\beta_0 = (2a)^{-1}$ 。则映射 $\tilde{T}$ 可以通过可逆线性变换 $\Psi: x = u + v, y = u - v$ 对角化为:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u - \beta_0 (u+v)^2 (u-v) \\ -v + \beta_0 (u+v)^2 (u-v) \end{pmatrix} + O(4). \quad (6)$$

变换 Ψ 将 xoy 平面的第一象限和第三象限映为 uov 平面的点集 $\Omega = \{(r, \theta) \mid r > 0, \theta \in \mathcal{D}\}$, 其中:

$$u = r \cos \theta, v = r \sin \theta, \theta := \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right).$$

为了将映射(6)嵌入连续流, 需要计算它的正规形。下面对映射(6)应用近恒同变换:

$$\mathbf{w} = \Phi(\tilde{\mathbf{w}}): \begin{cases} u = \tilde{u} + \frac{1}{6} G_{30} \tilde{u}^3 + \frac{1}{2} G_{21} \tilde{u}^2 \tilde{v} + \frac{1}{2} G_{12} \tilde{u} \tilde{v}^2 + \frac{1}{6} G_{03} \tilde{v}^3 \\ v = \tilde{v} + \frac{1}{6} H_{30} \tilde{u}^3 + \frac{1}{2} H_{21} \tilde{u}^2 \tilde{v} + \frac{1}{2} H_{12} \tilde{u} \tilde{v}^2 + \frac{1}{6} H_{03} \tilde{v}^3 \end{cases},$$

得到:

$$F: \begin{cases} \tilde{u} = \tilde{u} + \frac{1}{6} g_{30} \tilde{u}^3 + \frac{1}{2} (2G_{21} + g_{21}) \tilde{u}^2 \tilde{v} + \frac{1}{2} g_{12} \tilde{u} \tilde{v}^2 + \frac{1}{6} (2G_{03} + g_{03}) \tilde{v}^3 + O(4) \\ \tilde{v} = -\tilde{v} + \frac{1}{6} (h_{30} - 2H_{30}) \tilde{u}^3 + \frac{1}{2} h_{21} \tilde{u}^2 \tilde{v} + \frac{1}{2} (h_{12} - 2H_{12}) \tilde{u} \tilde{v}^2 + \frac{1}{6} H_{03} \tilde{v}^3 + O(4) \end{cases}.$$

其中: $g_{30}=h_{03}=-\frac{3}{a}$, $g_{21}=h_{12}=-\frac{1}{a}$, $g_{03}=h_{30}=\frac{3}{a}$, $g_{12}=h_{21}=\frac{1}{a}$ 。为将离散流嵌入微分方程的流,映射 F 需满足 S -不变性,即

$$F(S\tilde{w})=SF(\tilde{w}), S=\text{diag}(1, -1),$$

解得:

$$G_{12}=G_{03}=H_{03}=H_{21}=0, G_{21}=-\frac{1}{2}g_{21}, G_{30}=-\frac{1}{2}g_{03}, H_{30}=\frac{1}{2}h_{30}, H_{12}=\frac{1}{2}h_{12}。$$

所以映射变成:

$$\tilde{F}: \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{u} + \frac{1}{6}g_{30}\tilde{u}^3 + \frac{1}{2}g_{12}\tilde{u}\tilde{v}^2 \\ -\tilde{v} + \frac{1}{2}h_{21}\tilde{u}^2\tilde{v} + \frac{1}{6}h_{03}\tilde{v}^3 \end{pmatrix} + O(4)。$$

显然映射满足引理2的条件,通过引理2和Picard迭代可得如下结论。

定理3 映射 $S \circ \tilde{F}$ 满足 $S \circ \tilde{F}(\tilde{w}) = \varphi^1(1, \tilde{w}) + O(|\tilde{w}|^4)$, 其中 φ^1 是 φ' 的单位时间流, φ' 是如下平面系统的流:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}g_{30}\tilde{u}^3 + \frac{1}{2}g_{12}\tilde{u}\tilde{v}^2 \\ -\frac{1}{2}h_{21}\tilde{u}^2\tilde{v} - \frac{1}{6}h_{03}\tilde{v}^3 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

C^∞ 向量场为:

$$X: \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}g_{30}\tilde{u}^3 + \frac{1}{2}g_{12}\tilde{u}\tilde{v}^2 \\ -\frac{1}{2}h_{21}\tilde{u}^2\tilde{v} - \frac{1}{6}h_{03}\tilde{v}^3 \end{pmatrix} + O(4)。$$

显然 C^∞ 向量场 X 是Lojasiewicz型的。对向量场 X 应用变换 $\tilde{u} = \eta_1 \eta_2^2, \tilde{v} = \eta_2$ 沿着 $\tilde{u}$ 轴进行吹胀,通过吹胀可以降低平衡点 $(0,0)$ 的退化程度,将向量场 X 转化为如下系统:

$$\begin{cases} \frac{d\eta_1}{d\tau_1} = -\beta_0 \eta_1 + \beta_0 \eta_1^3 \eta_2^2 + O(6) \\ \frac{d\eta_2}{d\tau_1} = \beta_0 \eta_2 - \beta_0 \eta_1^2 \eta_2^3 + O(6) \end{cases}, \quad (8)$$

其中 $d\tau_1 = \eta_2^2 dt$ 。系统(8)在 η_1 轴只有平衡点 $E_3(0,0)$, 平衡点 E_3 的雅可比矩阵为 $J(E_3) = \text{diag}(-\beta_0, \beta_0)$, 故平衡点 E_3 是鞍点。对向量场 X 应用变换 $\tilde{u} = w_1, \tilde{v} = w_1^2 w_2$ 沿着 $\tilde{v}$ 轴进行吹胀,将向量场 X 转化为如下系统:

$$\begin{cases} \frac{dw_1}{d\tau_2} = -\beta_0 w_1 + \beta_0 w_1^3 w_2^2 + O(6) \\ \frac{dw_2}{d\tau_2} = \beta_0 w_2 - \beta_0 w_1^2 w_2^3 + O(6) \end{cases}, \quad (9)$$

其中 $d\tau_2 = w_1^2 dt$ 。系统(9)在 w_2 轴只有平衡点 $E_4(0,0)$, 在平衡点 E_4 处的雅可比矩阵为 $J(E_4) = J(E_3)$, 故平衡点 E_4 是鞍点。

由上述过程可知 C^∞ 向量场 X 去奇化后的系统只有双曲平衡点,所以对于向量场 X ,由上述证明过程可知向量场 X 满足引理3的假设条件。由文献[8,13]可知 $F = \Phi \circ \tilde{F} \circ \Phi^{-1}$ 。由引理3可知,在原点 O 附近存在一个 C^∞ 微分同胚 $\tilde{\Psi}$ 满足 $\tilde{F} = \tilde{\Psi} \circ S \circ \varphi_X(1, \cdot) \circ \tilde{\Psi}^{-1}$, 所以有如下共轭关系:

$$\Psi \circ T = F = \tilde{\Psi} \circ S \circ \varphi_X(1, \cdot) \circ \tilde{\Psi}^{-1}, \Psi = \Phi \circ \tilde{\Psi}. \quad (10)$$

对向量场 X 实施极坐标变换: $u = r \cos \theta, v = r \sin \theta$, 可得:

$$\dot{r} = -\beta_0 r^3 \cos 2\theta, \dot{\theta} = 0。$$

当 $r > 0, \theta \in I_1$ 时,有 $\dot{r} < 0$ 且有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 0$ 。所以在 uov 平面的点集 Ω 内, C^∞ 向量场 X 的平衡点 O 是渐进稳定的。文献[9]指出“沿着平面系统(7)的轨道的单位时间移位 φ^1 与接近恒同映射的映射至少是 k 阶重合的”。

显然映射 $S \circ \tilde{F}$ 是接近恒同映射的映射, 由 C^∞ 向量场 X 的表达式可知它的单位时间流 φ^1 与映射 $S \circ \tilde{F}$ 至少是 3 阶重合的。由共轭关系(10)和向量场 X 的平衡点 O 的渐进稳定性可得如下结论。

定理 4 当 $a=b$ 时, 不动点 E_0 是渐进稳定的, 即差分方程(1)的零解是渐进稳定的。

下面是向量场和映射 T 在原点 O 附近的相图, 从图 1 和图 2 可以看出, C^∞ 向量场 X 的平衡点 O 的渐进稳定性差分方程(1)的零解是渐进稳定性之间具有对应关系, 这与可逆线性变换 Ψ 将 xoy 平面的第一象限和第三象限变为 uov 平面的点集 Ω 相吻合的。

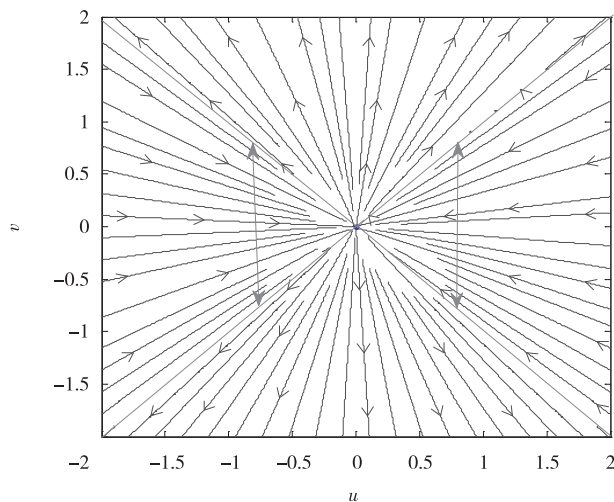


图 1 向量场 X 的相图

Fig. 1 Phase diagram of vector field X

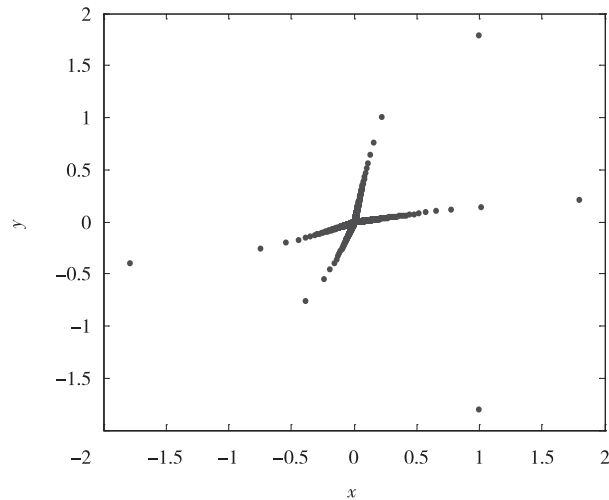


图 2 映射 T 的相图

Fig. 2 Phase diagram of mapping T

4 总结

本文通过中心流形定理和分支理论研究了 flip 分支, 给出 2-周期轨的稳定性。利用正规形理论与嵌入连续流方法得到特征值为 ± 1 的退化不动点的稳定性。文献[5]通过求解出差分方程(1)奇偶子列表式来得到了当 $a > b$ 时, 序列 $\{x_n\}$ 收敛于一个 2-周期轨, 这也说明 2-周期轨是稳定的。但是和微分方程类似, 绝大多数差分方程的显式解是很难求解的, 所以本文研究差分方程(1)的 2-周期轨所采用的方法适用范围更广一些。文献[5]通过求解差分方程(1)奇偶子列表式, 当 $a=b$ 时, 差分方程(1)产生的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 0, 这也说明不动点是 E_0 渐进稳定的。本文借助嵌入流和 Picard 迭代, 通过定性方法来研究差分方程退化不动点的稳定性, 克服了无法求解显式解的困难, 所以本文研究退化不动点稳定性的方法适用范围更广一些。

参考文献:

- [1] LI M S, ZHOU X L, XU J M. Dynamic properties of a discrete population model with diffusion[J]. Advances in Difference Equations, 2020(1): 580.
- [2] 徐昌进. 一类离散多种群合作与竞争的捕食者与食饵模型的周期解[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2015, 32(2): 57-63.
XU C J. Periodic solution in a discrete multispecies cooperation and competition predator-prey model[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2015, 32(2): 57-63.
- [3] BELGRADE J F, ROBERDS J H. Period-doubling bifurcations for systems of difference equations and applications to models in population biology[J]. Nonlinear Analysis-Theory Methods & Applications, 1997(29): 185-199.
- [4] ZHAO H Y. Small divisors problem in dynamical systems and analytic invariant curves for an iterative equation related to a rational difference equation[J]. Lithuanian Mathematical Journal, 2015, 55(4): 573-582.
- [5] SEDAGHAT H. Global behaviours of rational difference equations of orders two and three with quadratic terms[J]. Journal of Difference Equations and Applications, 2009, 15(3): 215-224.
- [6] AMLEH A M, CMOUZIS E, CMOUZIS G. On second order rational difference equations[J]. Journal of Difference Equations and Applications, 2008, 14(2): 215-228.

- [7] SEDAGHAT H. A note; all homogeneous second order difference equations of degree one have semiconjugate factorizations[J]. Journal of Difference Equations and Applications, 2007, 13(5): 453-456.
- [8] CHOW S N, LI C Z, WANG D. Normal forms and bifurcation of planar vector fields[M]. New York: Springer-Verlag, 1994.
- [9] KUZNETSOV Y A. Elements of applied bifurcation theory[M]. 3rd Edition. New York: Springer-Verlag, 1998.
- [10] GHEINER J. Codimension-two reflection and non-hyperbolic invariant lines[J]. Nonlinearity, 1994, 7(1): 109-184.
- [11] DUMORTIER F, LLIBRE J, ARTES J C. Qualitative theory of planar differential systems[M]. Berlin: Springer, 2006.
- [12] DUMORTIER F, RODRIGUES P, ROUSSARIER. Germs of diffeomorphisms in the plane[M]. New York: Springer, 1981.
- [13] ZHONG J Y, ZHANG J. The stability of a degenerate fixed point for Guzowska-Luís-Elaydi model[J]. Journal of Difference Equations and Applications, 2018, 24(3): 409-424.
- [14] GUCKENHEIMER J, HOLMES P. Nonlinear oscillations, dynamical system bifurcation of vector fields[M]. New York: Springer, 1983.

Dynamic Properties of a Class of Difference Equations

LI Mingshan¹, XU Jiangming², ZHOU Xiaoliang²

(1. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106;

2. School of Mathematics and Statistics, Lingnan Normal University, Zhanjiang Guangdong 524048, China)

Abstract: [Purposes] The dynamic properties of a class of difference equations are studied. [Methods] Firstly, the types and stability of hyperbolic fixed points are obtained by discussing the relationship between coefficient parameters and eigenvalues, and then the stability and flip bifurcation of non-hyperbolic fixed points are studied by using center manifold theorem and bifurcation theory. By means of normal form theory and embedded continuous flow method, the stability of the degenerate fixed point with eigenvalues ± 1 is obtained. [Findings] The stability of 2-periodic orbit, the topological structures of non-hyperbolic fixed points and the stability of the degenerate fixed point are given. [Conclusions] The dynamic properties of a class of difference equations are obtained.

Keywords: difference equation; flip bifurcation; center manifold theorem; degenerated fixed point; stability

(责任编辑 许 甲)