

一类经典的 Boussinesq 系统解的若干问题研究^{*}

李琪琪¹, 周寿明¹, 段俊²

(1. 重庆师范大学 数学科学学院; 2. 重庆师范大学 经济与管理, 重庆 401331)

摘要:【目的】研究 Boussinesq 系统弱解的存在唯一性以及强解的爆破准则。【方法】通过拟抛正规化方法建立 Boussinesq 系统在 Sobolev 空间 $H^s(\mathbf{R}) \times H^{s-1}(\mathbf{R}) (s \geq 1)$ 中弱解的存在和唯一性, 利用能量估计、输运方程理论等方法得到系统强解精确的爆破准则。【结果】首先得到了 Boussinesq 系统在 Sobolev 空间 $H^s(\mathbf{R}) \times H^{s-1}(\mathbf{R}) (s > \frac{3}{2})$ 中强解的局部适定性, 其次得到系统弱解在 Sobolev 空间 $H^s(\mathbf{R}) \times H^{s-1}(\mathbf{R}) (s \geq 1)$ 中的存在和唯一性, 最后得到强解的爆破准则。【结论】Boussinesq 系统强解的爆破只以波裂形式发生且仅与分量 u 的空间斜率有关而与分量 ρ 无关。

关键词: Boussinesq 系统; 局部适定性; 弱解; 爆破准则

中图分类号: O175

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2021)02-0068-10

1 研究背景

在 19 世纪 70 年代, Boussinesq 推导出了描述浅水表面小振幅、长波传播的一系列模型, 这些可用于描述敏感的二维运动的方程具有一维波动方程的微扰形式, 最经典的方程如下^[1]:

$$u_t = u_{xx} + (u^2)_{xx} + u_{xxx} \quad (1)$$

显然, Boussinesq 推导出的方程(1)与 Korteweg 等人^[2]提出的著名 KdV 模型形式相似。随后, Boussinesq^[3]还从著名的二维 Euler 水波方程中导出了耦合方程组(Boussinesq 系统), 如下:

$$\begin{cases} u_t - \nu u_{xx} + \delta u u_x + \gamma \rho_x = 0, t > 0, x \in \mathbf{R} \\ \rho_t + \beta \partial_x(u\rho) + a u_x = 0, t > 0, x \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_0(x), \rho(x, 0) = \rho_0(x), t = 0, x \in \mathbf{R} \end{cases} \quad (2)$$

式中: $u(t, x)$ 代表速度, $1 + \delta \rho(t, x)$ 代表流体底部以上自由表面的高度。方程组(2)可用来描述有限深度的均匀水平通道中理想流体表面小振幅长波的双向传播。虽然对单向模型(如 Korteweg-de Vries 方程)获得了非常丰富的数学理论, 但是由于双分量相互作用, 在方程组中很难得到系统的相应结果。

Bona1 等人^[4]证明了当初值满足一定限制条件时, 系统(2)的解在 Sobolev 空间 $H^s(\mathbf{R}) \times H^{s-1}(\mathbf{R}) (s \geq 2)$ 局部适定性。下面将运用 Kato 定理得到系统(2)的强解在 Sobolev 空间 $H^s(\mathbf{R}) \times H^{s-1}(\mathbf{R}) (s > \frac{3}{2})$ 中的局部适定性, 该结果改进了 Bona1 等人^[4]的结果: 将 Sobolev 指数从 $s \geq 2$ 降到 $s > \frac{3}{2}$, 且不需要对初值的假设 $\inf_{x \in \mathbf{R}} \rho_0(x) > -1$ 。

定理 1 假设 $(u_0, \rho_0) \in H^s(\mathbf{R}) \times H^{s-1}(\mathbf{R})$ 且 $s > \frac{3}{2}$ 。则存在一个时间 $T > 0$ 使得系统(2)存在唯一解满足如下条件:

$$(u, \rho) \in C([0, T]; H^s(\mathbf{R})) \cap C^1([0, T]; H^{s-1}(\mathbf{R})) \times C([0, T]; H^{s-1}(\mathbf{R})) \cap C^1([0, T]; H^{s-2}(\mathbf{R}))。$$

更进一步, $(u_0, \rho_0) \mapsto (u, \rho)$ 是从 (u_0, ρ_0) 在 $H^s(\mathbf{R}) \times H^{s-1}(\mathbf{R})$ 的邻域到

$$C([0, T]; H^s(\mathbf{R})) \cap C^1([0, T]; H^{s-1}(\mathbf{R})) \times C([0, T]; H^{s-1}(\mathbf{R})) \cap C^1([0, T]; H^{s-2}(\mathbf{R}))$$

^{*} 收稿日期: 2020-07-24 修回日期: 2020-09-13 网络出版时间: 2021-04-08 11:33

资助项目: 国家自然科学基金(No. 11771063); 重庆市教育委员会科学技术项目(No. KJQN202000518; No. KJZD-M201900501); 重庆市社会科学规划项目(No. 2019WT12)

第一作者简介: 李琪琪, 女, 研究方向为偏微分方程, E-mail: liqiqi96@163.com; 通信作者: 段俊, 男, 副教授, E-mail: 110048327@qq.com

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20210408.0921.004.html>

的连续映射。

定理 1 给出了系统(2)的强解在 Sobolev 空间 $H^s(\mathbf{R}) \times H^{s-1}(\mathbf{R}) \left(s > \frac{3}{2} \right)$ 中的局部适定性,接下来受 Bona 等人^[5]研究 KdV 方程弱解的启发,将研究系统(2)在 Sobolev 空间 $H^s(\mathbf{R}) \times H^{s-1}(\mathbf{R}) (s \geq 1)$ 中弱解的存在性和唯一性。

定理 2 假设初值 $z_0 = (u_0, \rho_0) \in H^s(\mathbf{R}) \times H^{s-1}(\mathbf{R}) (s \geq 1)$ 且 $\|u_{0,x}\|_{L^\infty} + \|\rho_0\|_{L^\infty} \leq c$, 则存在一个常数 $T > 0$, 使得系统(2)具有唯一的弱解 $(u, \rho) \in L^2([0, T]; H^s(\mathbf{R})) \cap L^2([0, T]; H^{s-1}(\mathbf{R}))$, 此外, 有函数 $u_x, u, \rho \in L^\infty([0, T] \times \mathbf{R})$ 。

注 Schonbeck^[6] 和 Amick^[7] 分别研究了初值问题(2)在空间 $C_c^\infty(\mathbf{R})$ 中弱解的存在性和唯一性。定理 2 研究初值问题(2)在 Sobolev 空间 $H^s(\mathbf{R}) \times H^{s-1}(\mathbf{R}) (s \geq 1)$ 中弱解的存在性和唯一性, 该结果改进了 Schonbeck 和 Amick 在文献[6-7]中的结果。

文献[8-9]研究了系统(2)的强解会在有限时刻发生爆破。然后, 将研究精确的爆破模式, 即 $s > \frac{3}{2}$ 时系统(2)强解的 $H^s(\mathbf{R}) \times H^{s-1}(\mathbf{R})$ 范数在有限时间爆破的充分必要条件。

定理 3 假设初值 $z_0 = (u_0, \rho_0) \in H^s(\mathbf{R}) \times H^{s-1}(\mathbf{R})$ 且 $s > \frac{3}{2}$, T 是系统(2)的最大存在时间。则该系统(2)的强解在有限时间爆破当且仅当 $\liminf_{t \rightarrow T^-} \inf_{x \in \mathbf{R}} \{u_x(t, x)\} = -\infty$ 。

定理 3 说明 Boussinesq 系统发生奇性只会以波裂的形式存在, 即解本身在有限时间内有界, 但解的空间斜率无界。

下面给出一些必要的符号、先验估计和 Boussinesq 系统在 Sobolev 空间 $H^s(\mathbf{R}) \times H^{s-1}(\mathbf{R}) \left(s > \frac{3}{2} \right)$ 中强解的局部适定性。接着证明问题(2)的弱解在 Sobolev 空间 $H^s(\mathbf{R}) \times H^{s-1}(\mathbf{R}) (s \geq 1)$ 中的存在性和唯一性。最后给出系统(2)的强解在 Sobolev 空间 $H^s(\mathbf{R}) \times H^{s-1}(\mathbf{R}) \left(s > \frac{3}{2} \right)$ 中的爆破准则。

2 先验估计

对本文使用的符号说明如下: 空间 C_0^∞ 表示在 $\mathbf{R} \times [0, +\infty)$ 中具有紧支集的所有无穷可微函数 $f(x, t)$ 的集合。设 p 为 $1 \leq p < \infty$ 的任意常数, 记 $L^p = L^p(\mathbf{R}) = \left\{ f \mid f \text{ 为可测函数, 且 } \|f\|_{L^p}^p = \int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p dx < \infty \right\}$ 。空间 $L^\infty = L^\infty(\mathbf{R})$ 的标范数为 $\|f\|_{L^\infty} = \inf_{m(\epsilon)=0, x \in \mathbf{R}/\epsilon} \sup |f(x)|$ 。对于任意实数 $s > 0$, 设 $H^s = H^s(\mathbf{R})$ 表示 Sobolev 空间, 范数为: $\|f\|_{H^s} = \left(\int_{x \in \mathbf{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi, t)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$, 其中: $\hat{f}(\xi, t) = \int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi x} f(x, t) dx$ 。进一步设 $\|(\cdot, \cdot)\|_{H^s \times H^{s-1}} = \|\cdot\|_{H^s} + \|\cdot\|_{H^{s-1}}$, 空间 $C([0, T]; H^s(\mathbf{R}))$ 表示从 $[0, T]$ 到 $H^s(\mathbf{R})$ 的连续函数类。

为了简单起见, 本文让 c 表示任意的正常数, 并让 $v(x, t) = \nu u^\nu(\nu^{\frac{1}{2}}x, \nu^{\frac{3}{2}}t)$, $\eta(x, t) = \nu^2 \rho^\nu(\nu^{\frac{1}{2}}x, \nu^{\frac{3}{2}}t) + \frac{\alpha}{\beta} \nu^2$ 。于是系统(2)可转换成如下形式:

$$\begin{cases} v_t - v_{xxt} + \delta v v_x + \gamma \eta_x = 0, t > 0, x \in \mathbf{R} \\ \eta_t + \beta \partial_x(v\eta) = 0, t > 0, x \in \mathbf{R} \\ v_0 = \nu u_0(\nu^{\frac{1}{2}}x), \eta_0 = \nu^2 \rho_0(\nu^{\frac{1}{2}}x), t = 0, x \in \mathbf{R} \end{cases} \quad (3)$$

接下来, 利用 Kato 定理证明定理 1。

证明(定理 1) 为了利用 Kato 定理^[10]证明系统(2)在 Sobolev 空间 $H^s \times H^{s-1} \left(s > \frac{3}{2} \right)$ 中强解的局部适定性, 将系统(3)转换如下非局部形式:

$$\begin{cases} v_t + \delta v v_x = -(1 - \partial_x^2)^{-1} \partial_x (\gamma \eta + \delta v_x^2 + \delta v v_{xx}), t > 0, x \in \mathbf{R} \\ \eta_t + \beta v \eta_x = -\beta v_x \eta, t > 0, x \in \mathbf{R} \\ v_0 = \nu u_0(\nu^{\frac{1}{2}}x), \eta_0 = \nu^2 \rho_0(\nu^{\frac{1}{2}}x), t = 0, x \in \mathbf{R} \end{cases} \quad (4)$$

令 $z = \begin{pmatrix} v \\ \eta \end{pmatrix}$, $A(z) = \begin{pmatrix} \delta v \partial_x & 0 \\ 0 & \beta v \partial_x \end{pmatrix}$, $f(z) = \begin{pmatrix} -(1 - \partial_x^2)^{-1} \partial_x (\gamma \eta + \delta v_x^2 + \delta v v_{xx}) \\ -\beta v_x \eta \end{pmatrix}$, $Y = H^s(\mathbf{R}) \times H^{s-1}(\mathbf{R})$, $X = H^{s-1}(\mathbf{R}) \times H^{s-2}(\mathbf{R})$, $\Lambda = (1 - \partial_x^2)^{\frac{1}{2}}$ 和 $Q = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}$ 。由文献[11-12]的方法类似可证定理 1。证毕

定理给出了系统(3)在 Sobolev 空间 $H^s \times H^{s-1}$ ($s > \frac{3}{2}$) 中强解的局部适定性,进而利用此结论研究系统(3)弱解的存在性和唯一性,为此需要以下引理。

引理 1^[10] 如果 $r > 0$, $H^r \cap L^\infty$ 是代数,则存在一个仅依赖于 r 的正常数 c 使得:

$$\|fg\|_{H^r} \leq c(\|f\|_{L^\infty} \|g\|_{H^r} + \|g\|_{L^\infty} \|f\|_{H^r}).$$

引理 2^[10] 如果 $r > 0$,则存在一个仅依赖于 r 的正常数 c 使得:

$$\|[\Lambda^r, f]g\|_{L^2} \leq c(\|\partial_x f\|_{L^\infty} \|\Lambda^{r-1} g\|_{L^2} + \|\Lambda^r f\|_{L^2} \|g\|_{L^\infty}),$$

其中交换算子 $[A, B] = AB - BA$ 。

引理 3^[10] 如果 $r > 0$, $f \in H^{r+1} \cap W^{1,\infty}$ 且 $g \in H^r \cap L^\infty$,则存在一个仅依赖于 r 的正常数 c 使得:

$$\|[\Lambda^r, f] \partial_x g\|_{L^2} \leq c(\|\partial_x f\|_{L^\infty} \|\Lambda^r g\|_{L^2} + \|\Lambda^{r+1} f\|_{L^2} \|g\|_{L^\infty}).$$

接下来,处理系统(3)的弱解,核心是导出如下引理中关于光滑解的先验估计。

引理 4 假设 (v, η) 是系统(3)关于初值 $(v_0, \eta_0) \in H^s \times H^{s-1}$ ($s > \frac{3}{2}$) 的解。则存在两个依赖于 $q > 0, \beta, \gamma, \delta$ 的常数 C_1 和 C_2 ,使得下列估计成立:

$$\begin{aligned} & \|v\|_{H^{q+1}} + \|\eta\|_{H^q} \leq \|v_0\|_{H^{q+1}} + \|\eta_0\|_{H^q} + \\ & C_1 \int_0^t [(\|v\|_{H^{q+1}} + \|\eta\|_{H^q})(1 + \|v\|_{L^\infty} + \|v_x\|_{L^\infty} + \|\eta\|_{L^\infty})] dt, \end{aligned} \quad (4)$$

以及

$$\|v_t\|_{H^{q+1}} + \|\eta_t\|_{H^{q-1}} \leq C_2 [(\|v\|_{H^{q+1}} + \|\eta\|_{H^q})(1 + \|v\|_{L^\infty} + \|\eta\|_{L^\infty})].$$

证明 由定理 1 可知,存在 $T > 0$ 使得 (v, η) 是系统(3)关于初值 $(v_0, \eta_0) \in H^{s+1} \times H^s$ 的解。将 $(\Lambda^q v) \Lambda^q$ 作用于系统(3)中的第一个方程,并对 x 在 $\mathbf{R}$ 上积分,利用引理 1 得到:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} (\Lambda^q v)^2 + (\Lambda^q v_x)^2 dx = \left| \int_{\mathbf{R}} (\Lambda^q v) \Lambda^q (\delta v v_x + \gamma \eta_x) dx \right| \leq \\ & C(\|v\|_{H^q} \|v v_x\|_{H^q} + \|v\|_{H^{q+1}} \|\eta\|_{H^q}) \leq C(\|v_x\|_{L^\infty} \|v\|_{H^q}^2 + \|v\|_{H^{q+1}} \|\eta\|_{H^q}). \end{aligned} \quad (5)$$

同理,将 $(\Lambda^q \eta) \Lambda^q$ 应用于系统(3)中的第二个方程,并对 x 在 $\mathbf{R}$ 上积分,利用引理 1 和引理 3 得到:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} (\Lambda^q \eta)^2 dx = \beta \left| \int_{\mathbf{R}} (\Lambda^q \eta) \Lambda^q (v \partial_x \eta) dx \right| + \beta \left| \int_{\mathbf{R}} (\Lambda^q \eta) \Lambda^q (\eta \partial_x v) dx \right| \leq \\ & C[([\Lambda^q, v] \partial_x \eta, \Lambda^q \eta)_0 + (v \Lambda^q \partial_x \eta, \Lambda^q \eta)_0 + \|\eta\|_{H^q} \|v_x \eta\|_{H^q}] \leq \\ & C[\|\Lambda^q, v\|_{\partial_x \eta} \| \eta \|_{H^q} + |(v, \partial_x (\Lambda^q \eta)^2)_0| + \|\eta\|_{H^q} \|v_x \eta\|_{H^q}] \leq \\ & C(\|\eta\|_{L^\infty} \|v\|_{H^{q+1}} \|\eta\|_{H^q} + \|v_x\|_{L^\infty} \|\eta\|_{H^q}^2), \end{aligned} \quad (6)$$

结合不等式(5)和不等式(6),得到:

$$\frac{d}{dt} (\|v\|_{H^{q+1}} + \|\eta\|_{H^q}) \leq C(\|v\|_{H^{q+1}} + \|\eta\|_{H^q})(1 + \|v\|_{L^\infty} + \|v_x\|_{L^\infty} + \|\eta\|_{L^\infty}),$$

这使得引理中的估计(4)式成立。

接下来将证明引理中的第二个不等式成立。为此,对系统(3)中的两个子方程分别用算子 $(\Lambda^q v_t) \Lambda^q$ 和 $(\Lambda^{q-1} \eta_t) \Lambda^{q-1}$ 作用,并对 x 在 $\mathbf{R}$ 上积分得到:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}} (\Lambda^q v_t)^2 + (\Lambda^q v_{xt})^2 dx = \left| \int_{\mathbf{R}} (\Lambda^q v_t) \Lambda^q \partial_x \left(\frac{\delta}{2} v^2 + \gamma \eta \right) dx \right| \leq \\ & \left| \frac{\delta}{2} \int_{\mathbf{R}} (\Lambda^q v_t) \Lambda^{q+1} (v^2) dx \right| + \left| \gamma \int_{\mathbf{R}} (\Lambda^q v_{xt}) \Lambda^q \eta dx \right| \leq C(\|v_t\|_{H^q} \|v\|_{H^{q+1}} \|v\|_{L^\infty} + \|v_{xt}\|_{H^q} \|\eta\|_{H^q}) \end{aligned} \quad (7)$$

以及

$$\int_{\mathbf{R}} (\Lambda^q \eta_t)^2 dx = \beta \left| \int_{\mathbf{R}} (\Lambda^{q-1} \eta_t) \Lambda^{q-1} \partial_x (v \eta) dx \right| \leq$$

$$C \|\eta_t\|_{H^{q-1}} \|v\eta\|_{H^q} \leq C \|\eta_t\|_{H^{q-1}} (\|v\|_{H^q} \|v\|_{L^\infty} + \|\eta\|_{L^\infty} \|\eta\|_{H^q}) \quad (8)$$

由不等式(7)和不等式(8)推出:

$$\|v_t\|_{H^{q+1}} + \|\eta_t\|_{H^{q-1}} \leq C(\|v\|_{H^{q+1}} \|v\|_{L^\infty} + (1 + \|\eta\|_{L^\infty}) \|\eta\|_{H^q}).$$

这就完成了引理 4 的证明。

证毕

引理 4 中要求初值 $(v_0, \eta_0) \in H^s \times H^{s-1} \left(s > \frac{3}{2} \right)$, 为此需要构建初始数据的平滑逼近。对任意的实数 $s (s > 0)$, 假设 $z_0 = (v_0(x), \eta_0(x)) \in H^s \times H^{s-1}$, 并令 (w_0, λ_0) 为函数 $\varphi_\xi(x) = \xi^{-\frac{1}{4}} \varphi(\xi^{-\frac{1}{4}}x)$ 与 z_0 的卷积 $(w_0, \lambda_0) = (\varphi_\xi * v_0, \varphi_\xi * \eta_0)$, 其中函数 $\hat{\varphi}$ 是 φ 的傅里叶变换, 满足 $\hat{\varphi} \in C_0^\infty$, $\hat{\varphi}(\xi) \geq 0$ 且 $\hat{\varphi}(\xi) = 1 (\xi \in (-1, 1))$ 。因此有 $(w_0, \lambda_0) \in C^\infty \times C^\infty$ 。从定理 1 可以看出, 对于满足 $0 < \xi < \frac{1}{4}$ 的每个 ξ , 如下柯西问题:

$$\begin{cases} w_t - w_{xxt} + \delta w w_x + \gamma \lambda_x = 0, t > 0, x \in \mathbf{R} \\ \lambda_t + \beta \partial_x(w\lambda) = 0, t > 0, x \in \mathbf{R} \\ w_0 = \varphi_\xi * v_0, \lambda_0 = \varphi_\xi * \eta_0, t = 0, x \in \mathbf{R} \end{cases} \quad (9)$$

存在唯一的解 $(w, \lambda) \in C^\infty([0, T_\xi], H^\infty(\mathbf{R})) \times C^\infty([0, T_\xi], H^\infty(\mathbf{R}))$, 其中的 T_ξ 依赖于 ξ 。此外, 在空间 $H^s \times H^{s-1}$ 中对于任意正的 Sobolev 指数 $s > 0$, 得到下面的结果。

引理 5 如果初值 $(v_0(x), \eta_0(x)) \in H^s \times H^{s-1} (s > 0)$, 对于任意的 $\xi (0 < \xi < \frac{1}{4})$ 有:

$$\begin{aligned} \|w_{0,x}\|_{L^\infty} &\leq c \|v_{0,x}\|_{L^\infty}, \|w_0\|_{H^q} \leq c, \|\lambda_0\|_{H^{q-1}} \leq c, \forall q \leq s, \\ \|w_0\|_{H^q} &\leq c \xi^{\frac{s-q}{4}}, \|\lambda_0\|_{H^{q-1}} \leq c \xi^{\frac{s-q}{4}}, \forall q > s, \\ \|w_0 - v_0\|_{H^q} &\leq c \xi^{\frac{s-q}{4}}, \|\lambda_0 - \eta_0\|_{H^{q-1}} \leq c \xi^{\frac{s-q}{4}}, \forall q \leq s, \\ \|w_0 - v_0\|_{H^s} &= o(1), \|\lambda_0 - \eta_0\|_{H^{s-1}} = o(1). \end{aligned}$$

其中: c 是不依赖于 ξ 的常数。

此引理利用参考文献[5]引理 5.1 和[13]引理 4.4 的讨论类似可证。

3 Boussinesq 系统的弱解

本节将讨论系统(3)弱解的存在性和唯一性, 并证明定理 2。结合引理 4、引理 5 得到的估计可以得到如下的引理, 该引理对证明弱解的存在性起着关键作用。

引理 6 假设 $(v_0, \eta_0) \in H^s \times H^{s-1} (s \geq 1)$, 则存在不依赖于 ξ 的常数 c , 使得问题(9)的解 (w, λ) 满足:

$$\|w\|_{H^1}^2 + \|\lambda\|_{H^0}^2 \leq c \exp \left\{ \int_0^t \|w_x\|_{L^\infty} d\tau \right\}, t \in [0, T_\xi]. \quad (10)$$

证明 由引理 5 可得若 $(v_0, \eta_0) \in H^s \times H^{s-1}$, 则 $(w_0, \lambda_0) = (\varphi_\xi * v_0, \varphi_\xi * \eta_0) \in C^\infty \times C^\infty$, 再由定理 1 可得 $(w(x, t), \lambda(x, t)) \in C^\infty([0, T_\xi], H^\infty) \times C^\infty([0, T_\xi], H^\infty)$ 。将方程组(9)中的两个子方程分别乘以 w 和 λ , 并对 x 在 $\mathbf{R}$ 上积分, 得到:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} (w^2 + w_x^2 + \lambda^2) dx = -2 \int_{\mathbf{R}} w(\delta w w_x + \gamma \lambda_x) dx - \beta \int_{\mathbf{R}} w_x \lambda^2 dx = 2\gamma \int_{\mathbf{R}} \lambda w_x dx - \beta \int_{\mathbf{R}} w_x \lambda^2 dx. \quad (11)$$

由上式可得:

$$\int_{\mathbf{R}} (w^2 + w_x^2 + \lambda^2) dx = \int_0^t \int_{\mathbf{R}} (2\gamma \lambda w_x - \beta w_x \lambda^2) dx d\tau + \int_{\mathbf{R}} (w_0^2 + w_{0x}^2 + \lambda_0^2) dx.$$

由 $2\pi \|w\|_{H^1}^2 \leq \int_{\mathbf{R}} (w^2 + w_x^2) dx$ 和上式可得:

$$\begin{aligned} \|w\|_{H^1}^2 + \|\lambda\|_{H^0}^2 &\leq \int_{\mathbf{R}} (w^2 + w_x^2 + \lambda^2) dx \leq \\ &\int_{\mathbf{R}} (w_0^2 + w_{0x}^2 + \lambda_0^2) dx + \int_0^t (\gamma \|w\|_{H^1}^2 + \gamma \|\lambda\|_{H^0}^2 + \beta \|w_x\|_{L^\infty} \|\lambda\|_{H^0}^2) d\tau \leq \\ &\|w_0\|_{H^1}^2 + \|\lambda_0\|_{H^0}^2 + c \int_0^t \|w_x\|_{L^\infty} (\|w\|_{H^1}^2 + \|\lambda\|_{H^0}^2) d\tau. \end{aligned}$$

对上式应用 Gronwall 不等式, 可得到不等式(10)。

证毕

接下来,将证明在一定的假设下,存在两个不依赖于 ξ 的常数 $c > 0$ 和 $T > 0$,使得系统(3)的解当 $t \in [0, T]$ 满足:

$$\|w_x\|_{L^\infty} + \|w\|_{L^\infty} + \|\lambda\|_{L^\infty} \leq c.$$

定理 4 假设 $(v_0, \eta_0) \in H^s \times H^{s-1} (s \geq 1)$ 且 $\|v_{0,x}\|_{L^\infty} + \|\eta_0\|_{L^\infty} \leq c$ 令 $(w_0, \lambda_0) = (\varphi_\xi * v_0, \varphi_\xi * \eta_0)$, 则存在两个不依赖于 ξ 的常数 $c > 0$ 和 $T > 0$,使得问题(9)的解 (w, λ) 满足 $\|w_x\|_{L^\infty} + \|w\|_{L^\infty} + \|\lambda\|_{L^\infty} \leq c$, 对于 $t \in [0, T]$ 。

证明 由引理 5 可得若 $(v_0, \eta_0) \in H^s \times H^{s-1}$ 则 $(w_0, \lambda_0) = (\varphi_\xi * v_0, \varphi_\xi * \eta_0) \in C^\infty \times C^\infty$ 。再由定理 1 可得 $(w(x, t), \lambda(x, t)) \in C^\infty([0, T_\xi], H^\infty) \times C^\infty([0, T_\xi], H^\infty)$ 。问题(9)的第一个方程可写成如下形式:

$$w_t = -(1 - \partial_x^2)^{-1} \partial_x \left(\frac{\delta}{2} w^2 + \gamma \lambda \right). \quad (12)$$

上式对 t 积分得到:

$$\|w\|_{L^\infty} \leq \|w_0\|_{L^\infty} + \int_0^t \left\| \frac{\delta}{2} w^2 + \gamma \lambda \right\|_{L^\infty} d\tau \leq \|w_0\|_{L^\infty} + c \int_0^t (\|w\|_{L^\infty}^2 + \|\lambda\|_{L^\infty}) d\tau. \quad (13)$$

方程(12)对 x 求导,利用 $(1 - \partial_x^2)^{-1} \partial_x^2 f = -f + (1 - \partial_x^2)^{-1} f$, 得到:

$$w_{xt} = \frac{\delta}{2} w^2 + \gamma \lambda - (1 - \partial_x^2)^{-1} \left(\frac{\delta}{2} w^2 + \gamma \lambda \right).$$

上式对 t 积分得到:

$$\begin{aligned} \|w_x\|_{L^\infty} &\leq \|w_{0x}\|_{L^\infty} + c \int_0^t \|w^2 + \lambda\|_{L^\infty} \|(1 - \partial_x^2)^{-1} (w^2 + \lambda)\|_{L^\infty} d\tau \leq \\ &\|w_{0x}\|_{L^\infty} + c \int_0^t \|w^2\|_{L^\infty} \|\lambda\|_{L^\infty} d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

假设整数 $p > 0$, 对问题(9)的第二个方程乘以 λ^{2p+1} , 并对 x 在 $\mathbf{R}$ 上积分, 利用 Hölder 不等式得到:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2p+2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} \lambda^{2p+2} dx &= -\beta \int_{\mathbf{R}} (\lambda^{2p+2} w_x + \lambda^{2p+1} \lambda_x w) dx \leq c \int_{\mathbf{R}} \lambda^{2p+2} w_x dx \leq \\ c \|\lambda\|_{L^\infty} \int_{\mathbf{R}} \lambda^{2p+1} w_x dx &\leq c \|\lambda\|_{L^\infty} \left(\int_{\mathbf{R}} \lambda^{2p+2} dx \right)^{\frac{2p+1}{2p+2}} \left(\int_{\mathbf{R}} w_x^{2p+2} dx \right)^{\frac{1}{2p+2}}. \end{aligned}$$

上式可写成:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbf{R}} \lambda^{2p+2} dx \right)^{\frac{1}{2p+2}} \leq c \|\lambda\|_{L^\infty} \left(\int_{\mathbf{R}} w_x^{2p+2} dx \right)^{\frac{1}{2p+2}},$$

对任意 $f \in L^\infty \cap L^2$, 有 $\|f\|_{L^p} \rightarrow \|f\|_{L^\infty} (p \rightarrow \infty)$ 。上面的不等式对 t 积分, 并令 $p \rightarrow \infty$, 得到估计:

$$\|\lambda\|_{L^\infty} \leq \|\lambda_0\|_{L^\infty} + c \int_0^t (\|w_x\|_{L^\infty}^2 + \|\lambda\|_{L^\infty}^2) d\tau. \quad (15)$$

结合不等式(13)~(15), 可得:

$$\begin{aligned} \|w\|_{L^\infty} + \|w_x\|_{L^\infty} + \|\lambda\|_{L^\infty} &\leq \|w_0\|_{L^\infty} + \|w_{0x}\|_{L^\infty} + \|\lambda_0\|_{L^\infty} + \\ &c \int_0^t (\|w\|_{L^\infty}^2 + \|w_x\|_{L^\infty}^2 + \|\lambda\|_{L^\infty} + \|\lambda\|_{L^\infty}^2) d\tau. \end{aligned}$$

根据压缩映射原理, 则存在 $T > 0$ 使得方程:

$$\|W\|_{L^\infty} \leq \|w_0\|_{H^1} + \|w_{0x}\|_{L^\infty} + \|\lambda_0\|_{L^\infty} + c \int_0^t (\|W\|_{L^\infty} + \|W\|_{L^\infty}^2) d\tau$$

有唯一解 $W \in C[0, T]$ 。由上述不等式可知, 常数 c 只依赖于 T 和 $\|w_0\|_{H^1} + \|w_{0x}\|_{L^\infty} + \|\lambda_0\|_{L^\infty}$ (因为 $\|w_0\|_{L^\infty} \leq \|w_0\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leq \|w_0\|_{H^1}$ 成立)。利用文献[14]中 51 页的定理或[15]中 1.1 节的定理 II, 得到了两个不依赖于 ξ 常数 $c > 0$ 和 $T > 0$, 使得任意 $t \in [0, T]$ 有 $\|w_x\|_{L^\infty} + \|w\|_{L^\infty} + \|\lambda\|_{L^\infty} \leq W(t)$ 。证毕

利用定理 4、引理 4、引理 6 和 Gronwall 不等式估计 $(w, \lambda) = (v_\xi, \eta_\xi)$ 的范数, 可得到:

$$\|v_\xi\|_{H^q} + \|\eta_\xi\|_{H^{q-1}} \leq c \exp \left\{ c \int_0^t (1 + \|v_\xi\|_{L^\infty} + \|v_{\xi x}\|_{L^\infty} + \|\eta_\xi\|_{L^\infty}) d\tau \right\} \leq c \exp \left\{ c \int_0^t (1 + W(\tau)) d\tau \right\}$$

以及

$$\|v_{\xi t}\|_{H^q} + \|\eta_{\xi t}\|_{H^{q-2}} \leq c(1 + W(t)) \exp \left\{ c \int_0^t (1 + W(\tau)) d\tau \right\}.$$

其中: $q \in (0, s]$, $t \in [0, T]$ 。由 Aubin 紧性定理^[16]可知, 存在 $\{(v_{\xi_n}, \eta_{\xi_n})\}$ 的子序列 $\{(v_{\xi_n}, \eta_{\xi_n})\}$, 使得子序列 $\{(v_{\xi_n}, \eta_{\xi_n})\}$

η_{ϵ_n})和它的时间导数 $\{(v_{\epsilon_n,t}, \eta_{\epsilon_n,t})\}$ 分别弱收敛于 $(v, \eta) \in L^2([0, T], H^s(\mathbf{R}) \times H^{s-1}(\mathbf{R}))$ 和 $(v_t, \eta_t) \in L^2([0, T], H^s(\mathbf{R}) \times H^{s-2}(\mathbf{R}))$ 。对于任意实数 $I > 0$, $\{(v_{\epsilon_n}, \eta_{\epsilon_n})\}$ 和 $\{(v_{\epsilon_n,t}, \eta_{\epsilon_n,t})\}$ 分别强收敛于 $(v, \eta) \in L^2([0, T], H^q(-I, I) \times H^{q-1}(-I, I))$ 和 $(v_t, \eta_t) \in L^2([0, T], H^q(-I, I) \times H^{q-2}(-I, I))$, 其中 $q \in (0, s]$ 。

证明 (定理2) 第1步, 先证明系统(3)弱解的存在性。

由定理4可知, $\{(v_{\epsilon_n}, \eta_{\epsilon_n})\} (\epsilon_n \rightarrow 0)$ 在空间 L^∞ 是有界的。因此, 序列 $\{(v_{\epsilon_n}, \eta_{\epsilon_n})\}$ 和 $\{(v_{\epsilon_n}^2, \eta_{\epsilon_n}^2)\}$ 在空间 $L^2([0, T], H^q(-I, I) \times H^{q-1}(-I, I)) (q \in (0, s])$ 中分别弱收敛于 (v, η) 和 (v^2, η^2) 。对于任意的 $\varphi_1 \in C_c^\infty$, (v, η) 满足以下方程组:

$$\begin{cases} \int_0^T \int_{\mathbf{R}} v(\varphi_{1t} - \varphi_{1xxt}) dx dt = \int_0^T \int_{\mathbf{R}} \left[\left(\frac{\delta}{2} v^2 + \gamma \eta \right) \varphi_{1x} \right] dx dt \\ \int_0^T \int_{\mathbf{R}} \eta \varphi_{1t} dx dt = \int_0^T \int_{\mathbf{R}} \beta(v\eta) \varphi_{1x} dx dt \end{cases}.$$

其中: $(v(x, 0), \eta(x, 0)) = (v_0(x), \eta_0(x))$ 。

第2步, 考虑系统(3)弱解的唯一性。

假设系统(3)在相同的初始值 $(v(x, 0), \eta(x, 0)) \in H^s \times H^{s-1} (s \geq 1)$ 下存在两个弱解 (v, η) 和 (w, λ) 。对于问题(9), 假设 $m_\xi(x, t) = w_\xi(x, t) - v_\xi(x, t)$, $n_\xi(x, t) = \lambda_\xi(x, t) - \eta_\xi(x, t)$, 由定理4可得在 $[0, T]$ 中 $\frac{\partial w_\xi(x, t)}{\partial x} \leq c$ 和 $\frac{\partial v_\xi(x, t)}{\partial x} \leq c$ 。假设 $f = f_\xi$, 可得:

$$\begin{cases} m_t - m_{xxt} = -\partial_x \left[\frac{\delta}{2} (w+v)m + \gamma n \right] \\ n_t = -\beta \partial_x (\lambda m + v n) \end{cases} \quad (16)$$

将方程组(16)中的两个子方程分别乘以 m 和 n , 并对 x 在 $\mathbf{R}$ 上积分, 得到:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} (m^2 + m_x^2 + n^2) dx &= - \int_{\mathbf{R}} m \partial_x \left(\frac{\delta}{2} (w+v)m + \gamma n \right) dx - \beta \int_{\mathbf{R}} n \partial_x (\lambda m + v n) dx = \\ &= \frac{\delta}{2} \int_{\mathbf{R}} m m_x (w+v) dx + \gamma \int_{\mathbf{R}} n m_x dx + \beta \int_{\mathbf{R}} \lambda m n_x dx + \beta \int_{\mathbf{R}} v n n_x dx \leq \\ &= \frac{\delta}{4} \int_{\mathbf{R}} m^2 (w_x + v_x) dx + \gamma \int_{\mathbf{R}} n m_x dx + \beta \| \lambda \|_{L^\infty} \int_{\mathbf{R}} m_x n dx + \frac{\beta}{2} \int_{\mathbf{R}} v_x n^2 dx \leq \\ &= c \| w_x + v_x \|_{L^\infty} \int_{\mathbf{R}} m^2 dx + c \int_{\mathbf{R}} (n^2 + m_x^2) dx + c \| \lambda \|_{L^\infty} \int_{\mathbf{R}} (n^2 + m_x^2) dx + \| v_x \|_{L^\infty} \int_{\mathbf{R}} n^2 dx. \end{aligned}$$

在区间 $[0, T]$ 内有 $\| \lambda \|_{L^\infty}, \| v_x \|_{L^\infty}, \| w_x \|_{L^\infty} \leq c$, 由上式可得:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} (m^2 + m_x^2 + n^2) dx \leq c \int_{\mathbf{R}} (m^2 + m_x^2 + n^2) dx.$$

由 Gronwall 不等式和 $m^2(0) + m_x^2(0) + n^2(0) = 0$ 可得 $\| m \|_{L^2}^2 = \| n \|_{L^2}^2 = 0$, 由此可得在区间 $[0, T]$ 内有 $v = w$, $\eta = \lambda$ 。证毕

4 强解的爆破准则

本节将研究强解的爆破准则。下面的爆破准则表明, Boussinesq 系统爆破只以波裂的形式存在且取决于分量 v 而不取决于分量 η 。

定理5 假设初值 $z_0 = (v_0, \eta_0) \in H^s \times H^{s-1}$ 且 $s > \frac{3}{2}$, $T > 0$ 系统(3)的最大存在时间。若存在 $M > 0$ 使得 $\| v \|_{L^\infty} + \| v_x \|_{L^\infty} \leq M, t \in [0, T]$, 系统(3)的解 $z(t, \cdot)$ 的 $H^s \times H^{s-1}$ 范数在 $[0, T]$ 内不会爆破。

为了证明定理5, 首先需要估计 $\| \eta \|_{L^\infty}$, 为此引入如下引理。

引理7 若 $\eta(t, x)$ 是系统(3)关于初值 $\eta_0 = \eta(0, x)$ 的解, 那么 η 具有以下等式:

$$\eta(t, x) = \eta_0(\beta F^{-1}(t, x)) \exp \left\{ - \int_0^t \beta^2 v_x(s, x) ds \right\}, t \in [0, T]. \quad (17)$$

证明 考虑下面的初值问题:

$$\begin{cases} F_t(t, x) = v(t, \beta F(t, x)), t \in [0, T], x \in \mathbf{R} \\ F(0, x) = x, t = 0, x \in \mathbf{R} \end{cases},$$

其中: v 是系统 3 中的第一个分量。由定理 1 可得, 存在最大时间 T 使得 $v \in C([0, T], H^s)$ 是柯西问题 (3) 关于初值 $(v_0, \eta_0) \in H^s \times H^{s-1}$ 且 $s > \frac{3}{2}$ 的解。直接计算得 $F_{tx} = \beta v_F(t, \beta F(t, x)) F_x(t, x)$ 和 $F_x(0, x) = 1$, 则 $F_x(t, x) = \exp\left\{\int_0^t \beta v_F(s, \beta F(s, x)) ds\right\} > 0$ 。

由系统 (3) 中的第二个方程可得:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\eta(t, \beta F(t, x)) F_x) &= \eta_t(t, \beta F(t, x)) F_x + \beta \eta_F(t, \beta F(t, x)) F_t F_x + \eta(t, \beta F(t, x)) F_{xt} = \\ &F_x(\eta_t(t, \beta F(t, x)) + \beta \eta_F(t, \beta F(t, x)) v(t, \beta F(t, x)) + \beta \eta(t, \beta F(t, x)) v_F(t, \beta F(t, x))) = 0. \end{aligned}$$

由此可得 $\eta(t, \beta F(t, x)) F_x$ 不依赖于时间 t 。

由 $F(0, x) = x$ 和 $F_x(0, x) = 1$ 可得 $\eta(t, \beta F(t, x)) F_x = \eta_0(x)$, 即 (17) 式成立。

证毕

接下来, 利用 $\|\eta\|_{L^\infty}$ 的估计、能量估计和输运方程理论来证明定理 5。

证明 (定理 5) 由定理 1 可得, 存在 $T > 0$ 使得 (v, η) 是系统 (3) 关于初值 $(v_0, \eta_0) \in H^{s+1} \times H^s$ 的解。在整个证明过程中, $C > 0$ 表示只依赖于 s 的广义常数。对 Sobolev 指数运用数学归纳法, 步骤如下:

第 1 步, 估计 $\|\eta(t, \cdot)\|_{L^\infty}$ 。由 (17) 式和 Sobolev 嵌入定理 ($H^{s-1} \left(s > \frac{3}{2} \right)$ 嵌入到 L^∞) 可得:

$$\|\eta(t, x)\|_{L^\infty} = \|\eta_0(\beta F^{-1}(t, x))\|_{L^\infty} e^{\beta^2 \int_0^t \|v_x(s, x) ds\|_{L^\infty}} \leq \|\eta_0(x)\|_{H^{s-1}} e^{\beta^2 \int_0^t \|v_x(s, \cdot)\|_{L^\infty} ds}.$$

因此, 若存在 M 使得 $\|v_x\|_{L^\infty} \leq M, t \in [0, T]$, 则:

$$\|\eta(t, x)\|_{L^\infty} \leq \|\eta_0\|_{H^{s-1}} e^{\beta^2 M T}, \quad (18)$$

另一方面, 对于 $s > \frac{3}{2}$, 通过对不等式 (4) 证明中类似的方法可得:

$$\|v(t)\|_{H^s} \leq \|v_0\|_{H^s} + C \int_0^t (\|v\|_{L^\infty} \|v(\tau)\|_{H^s} + \|\eta(\tau)\|_{H^{s-1}}) d\tau. \quad (19)$$

第 2 步, 当 $s \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 时, 估计 $\|v(t)\|_{H^s} + \|\eta(t)\|_{H^{s-1}}$ 。如果对 η 使用上述的能量方法, 那么将涉及 $\|\eta_x(t)\|_{L^\infty}$, 通过以下的估计可以克服这个困难。对 η 应用输运方程理论 (参见文献 [17] 中的引理 2.6), 也就是对以下方程使用输运方程理论:

$$\eta_t + \beta v \eta_x + \beta \eta v_x = 0, \quad (20)$$

由此可得:

$$\|\eta(t)\|_{H^{s-1}} \leq \|\eta_0\|_{H^{s-1}} + C \int_0^t (\|v(\tau)\|_{L^\infty} + \|v_x(\tau)\|_{L^\infty}) \|\eta(\tau)\|_{H^{s-1}} d\tau + C \int_0^t \|v_x(\tau) \eta(\tau)\|_{H^{s-1}} d\tau.$$

对上面不等式利用 Moser-type 估计^[17], 有:

$$\|v_x \eta\|_{H^{s-1}} \leq \|v_x\|_{L^\infty} \|\eta\|_{H^{s-1}} + \|v_x\|_{H^{s-1}} \|\eta\|_{L^\infty}, \quad (21)$$

再结合不等式 (19), 可以得出:

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{H^s} + \|\eta(t)\|_{H^{s-1}} &\leq \|v_0\|_{H^s} + \|\eta_0\|_{H^{s-1}} + \\ &C \int_0^t (\|v(\tau)\|_{H^s} + \|\eta(\tau)\|_{H^{s-1}}) \times (\|v(\tau)\|_{L^\infty} + \|v_x(\tau)\|_{L^\infty} + \|\eta(\tau)\|_{L^\infty} + 1) d\tau. \end{aligned}$$

对上式应用 Gronwall 不等式, 得到:

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{H^s} + \|\eta(t)\|_{H^{s-1}} &\leq \\ &(\|v_0\|_{H^s} + \|\eta_0\|_{H^{s-1}}) \exp\left(C \int_0^t (\|v(\tau)\|_{L^\infty} + \|v_x(\tau)\|_{L^\infty} + \|\eta(\tau)\|_{L^\infty} + 1) d\tau\right). \end{aligned} \quad (22)$$

显然, 如果存在 $M > 0$ 使得 $\|v\|_{L^\infty} + \|v_x\|_{L^\infty} \leq M$, 由不等式 (18) 和不等式 (22) 可得:

$$\|v(t)\|_{H^s} + \|\eta(t)\|_{H^{s-1}} \leq (\|v_0\|_{H^s} + \|\eta_0\|_{H^{s-1}}) \exp(C(M+1)T + CT \|\eta_0\|_{H^{s-1}} e^{\beta^2 M T}), \quad (23)$$

则当 $s \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 时, (v, η) 的 $H^s \times H^{s-1}$ 范数在 $[0, T]$ 内不会爆破。

第 3 步, 当 $s \in \left[2, \frac{5}{2}\right)$ 时, 估计 $\|v(t)\|_{H^s} + \|\eta(t)\|_{H^{s-1}}$ 。对输运方程(20)利用文献[17]中的引理 2.6, 因此可得 $\|\eta(t)\|_{H^{s-1}} \leq \|\eta_0\|_{H^{s-1}} + C \int_0^t \|v_x(\tau)\|_{H^{\frac{1}{2}} \cap L^\infty} \|\eta(\tau)\|_{H^{s-1}} d\tau + C \int_0^t \|v_x(\tau)\eta(\tau)\|_{H^{s-1}} d\tau$ 。利用不等式(21)和当 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2}$, $H^{\frac{1}{2}+\epsilon_0}$ 可嵌入到 $L^\infty \cap H^{\frac{1}{2}}$ 中, 有:

$$\|\eta(t)\|_{H^{s-1}} \leq \|\eta_0\|_{H^{s-1}} + C \int_0^t (\|\eta(\tau)\|_{L^\infty} + \|v(\tau)\|_{H^{\frac{3}{2}+\epsilon_0}}) (\|v(\tau)\|_{H^s} + \|\eta(\tau)\|_{H^{s-1}}) d\tau.$$

再结合不等式(19), 可以得出:

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{H^s} + \|\eta(t)\|_{H^{s-1}} &\leq \|v_0\|_{H^s} + \|\eta_0\|_{H^{s-1}} + C \int_0^t (\|v(\tau)\|_{H^s} + \|\eta(\tau)\|_{H^{s-1}}) \times \\ &\quad (\|v(\tau)\|_{H^{\frac{3}{2}+\epsilon_0}} + \|\eta(\tau)\|_{L^\infty} + 1) d\tau. \end{aligned}$$

这里 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2}$ 。对上式应用 Gronwall 不等式, 得到:

$$\|v(t)\|_{H^s} + \|\eta(t)\|_{H^{s-1}} \leq (\|v_0\|_{H^s} + \|\eta_0\|_{H^{s-1}}) \exp\left(C \int_0^t (\|v(\tau)\|_{H^{\frac{3}{2}+\epsilon_0}} + \|\eta(\tau)\|_{L^\infty} + 1) d\tau\right).$$

显然, 如果存在 $M > 0$ 使得 $\|v\|_{L^\infty} + \|v_x\|_{L^\infty} \leq M$ 当 $t \in [0, T)$, 则当 $s \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 时, 定理 1 中解的唯一性保证了 $\|v(t)\|_{H^s}$ 的估计满足不等式(23)。由此, 可得到 $\|v(t)\|_{H^s} + \|\eta(t)\|_{H^{s-1}} < \infty, s \in \left[2, \frac{5}{2}\right)$ 。

第 4 步, 当 $s \geq \frac{5}{2}$ 时, 估计 $\|v(t)\|_{H^s} + \|\eta(t)\|_{H^{s-1}}$ 。临界情况 $s = \frac{5}{2}$ 可以通过类似于 $s = 3 + \frac{1}{p}$ 的参数插值方法来处理。接下来, 假设 $s > \frac{5}{2}$ 时, 通过归纳论证, 证明在 $\|v\|_{L^\infty} + \|v_x\|_{L^\infty} \leq M (t \in [0, T))$ 的条件下有:

$$\|v(t)\|_{H^s} + \|\eta(t)\|_{H^{s-1}} < \infty. \quad (24)$$

事实上, 假设不等式(24)对 $\frac{5}{2} < s < k$ 成立。对于 $\frac{5}{2} < k \leq s < k+1$, 将文献[17]中的引理 2.6 再次应用于输运方程(20), 并将不等式(21)用于所得结果, 得到:

$$\begin{aligned} \|\eta(t)\|_{H^{s-1}} &\leq \|\eta_0\|_{H^{s-1}} + \\ &\quad C \int_0^t (\|\eta(\tau)\|_{L^\infty} + \|v_x(\tau)\|_{L^\infty} + \|v_x(\tau)\|_{H^{s-1}}) (\|v(\tau)\|_{H^s} + \|\eta(\tau)\|_{H^{s-1}}) d\tau. \end{aligned}$$

结合不等式(19), 可以得出:

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{H^s} + \|\eta(t)\|_{H^{s-1}} &\leq \|v_0\|_{H^s} + \|\eta_0\|_{H^{s-1}} + \\ &\quad C \int_0^t (\|v(\tau)\|_{H^s} + \|\eta(\tau)\|_{H^{s-1}}) (\|\eta(\tau)\|_{L^\infty} + \|v(\tau)\|_{H^{s-1}} + \|v(\tau)\|_{L^\infty} + \|v_x(\tau)\|_{L^\infty} + 1) d\tau. \end{aligned}$$

对上式应用 Gronwall 不等式, 得到:

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{H^s} + \|\eta(t)\|_{H^{s-1}} &\leq \\ &\quad (\|v_0\|_{H^s} + \|\eta_0\|_{H^{s-1}}) \exp\left(C \int_0^t (\|\eta(\tau)\|_{L^\infty} + \|v(\tau)\|_{H^{s-1}} + \|v(\tau)\|_{L^\infty} + \|v_x(\tau)\|_{L^\infty} + 1) d\tau\right). \end{aligned}$$

显然, 如果存在 $M > 0$ 使得 $\|v\|_{L^\infty} + \|v_x\|_{L^\infty} \leq M (t \in [0, T))$, 则定理 1 中解的唯一性和假设(24)表明估计 $\|v\|_{H^{s-1}} \leq \|v\|_{H^{k-1}} < \infty$, 再加上关于 $\|\eta(t)\|_{L^\infty}$ 的估计, 可得:

$$\|v(t)\|_{H^s} + \|\eta(t)\|_{H^{s-1}} < \infty, \frac{5}{2} < k \leq s < k+1. \quad \text{证毕}$$

证明(定理 3) 由定理 1 可知, (v, η) 是系统(3)关于初值 $(v_0, \eta_0) \in H^s \times H^{s-1} \left(s > \frac{3}{2}\right)$ 的解, T 是解 (v, η) 的最大存在时间。由(11)式可得到:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} (v^2 + v_x^2 + \eta^2) dx = 2\gamma \int_{\mathbf{R}} \eta v_x dx - \beta \int_{\mathbf{R}} v_x \eta^2 dx. \quad (25)$$

将方程组(3)中的两个子方程对 x 求导, 将得到的方程分别乘以 v_x, η_x , 并对 x 在 $\mathbf{R}$ 上积分, 得到:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} (v_x^2 + v_{xx}^2) dx = -2 \int_{\mathbf{R}} v_x (\delta v v_x + \gamma \eta_x)_x dx = -\delta \int_{\mathbf{R}} v_x^3 dx + 2\gamma \int_{\mathbf{R}} \eta_x v_{xx} dx, \quad (26)$$

以及

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} \eta_x^2 dx = 2\beta \int_{\mathbf{R}} \eta_x (-2v_x \eta_x - v \eta_{xx} - v_{xx} \eta) dx = -3\beta \int_{\mathbf{R}} v_x \eta_x^2 dx - 2\beta \int_{\mathbf{R}} v_{xx} \eta \eta_x dx. \quad (27)$$

结合不等式(25)~(27),可得:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} (v^2 + 2v_x^2 + v_{xx}^2 + \eta^2 + \eta_x^2) dx = \\ & - \int_{\mathbf{R}} v_x (\beta \eta^2 + \delta v_x^2 + 3\beta \eta_x^2) dx + 2\gamma \int_{\mathbf{R}} (\eta v_x + \eta_x v_{xx}) dx - 2\beta \int_{\mathbf{R}} v_{xx} \eta \eta_x dx. \end{aligned}$$

显然,如果存在 $M > 0$ 使得 $-v_x < M$ 当 $(t, x) \in [0, T) \times \mathbf{R}$, 且估计(18)式成立,则:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\|v\|_{H^2}^2 + \|\eta\|_{H^1}^2) \leq \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} v^2 + 2v_x^2 + v_{xx}^2 + \eta^2 + \eta_x^2 dx \leq \\ & - \int_{\mathbf{R}} v_x (\beta \eta^2 + \delta v_x^2 + 3\beta \eta_x^2) dx + \gamma \int_{\mathbf{R}} (\eta^2 + v_x^2 + \eta_x^2 + v_{xx}^2) dx + \beta \|\eta\|_{L^\infty} \int_{\mathbf{R}} (v_{xx}^2 + \eta_x^2) dx \leq \\ & (3\beta M + \delta M + \gamma + e^{\beta^2 MT} \|\eta_0\|_{L^\infty}) (\|v\|_{H^2}^2 + \|\eta\|_{H^1}^2). \end{aligned}$$

对上式应用 Gronwall 不等式,得到:

$$\|v\|_{H^2}^2 + \|\eta\|_{H^1}^2 \leq (\|v_0\|_{H^2}^2 + \|\eta_0\|_{H^1}^2) \exp\{(3\beta M + \delta M + \gamma + e^{\beta^2 MT} \|\eta_0\|_{L^\infty}) T\}.$$

由索伯列夫嵌入定理可得到:

$$\begin{aligned} & \|v(t)\|_{L^\infty} + \|v_x(t)\|_{L^\infty} \leq \|v(t)\|_{H^2} \leq \|v\|_{H^2}^2 + \|\eta\|_{H^1}^2 \leq \\ & (\|v_0\|_{H^2}^2 + \|\eta_0\|_{H^1}^2) \exp\{(3\beta M + \delta M + \gamma + e^{\beta^2 MT} \|\eta_0\|_{L^\infty}) T\}, \end{aligned} \quad (28)$$

定理 5 和不等式(28)确保了解 (v, η) 在有限的时间内不会爆破。

另一方面,通过定理 5 和 Sobolev 嵌入定理 $\|v_x\|_{L^\infty} \leq \|v\|_{H^{\frac{3}{2}+\epsilon}} (\epsilon > 0)$ 可知,如果 $\lim_{t \rightarrow T^-} -v_x(t, \cdot) = \infty$, 则解将在有限时间内爆炸。证毕

参考文献:

- [1] BOUSSINESQ J. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond[J]. J Math Pures Appl Ser, 1872, 17(2): 55-108.
- [2] KORTEWEG D J, de VRIES G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves[J]. Phil Mag, 1895, 39: 422-443.
- [3] BOUSSINESQ J V. Théorie générale des mouvements qui sont propagés dans un canal rectangulaire horizontal[J]. C R Acad Sci Paris, 1871, 73: 256-260.
- [4] BONA J L, CHEN M, SAUT J C. Boussinesq equations and other systems for small amplitude long waves in nonlinear dispersive media: II, the nonlinear theory[J]. Nonlinearity, 2004, 17: 925-952.
- [5] BONA J L, SMITH R. The initial value problem for the Korteweg-de Vries equation[J]. Phil Trans Roy Soc London A, 1975, 278: 555-601.
- [6] SCHONBECK M E. Existence of solutions for the Boussinesq system of equations[J]. J Differential Equations, 1981, 42: 325-352.
- [7] AMICK C J. Regularity and uniqueness of solutions to the Boussinesq system of equations[J]. J Differential Equations, 1984, 54: 231-247.
- [8] CONSTANTIN A, ESCHER J. Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations[J]. Acta Math, 1998, 181: 229-243.
- [9] CONSTANTIN A. Existence of permanent and breaking waves for a shallow water equation: a geometric approach[J]. Ann Inst Fourier (Grenoble), 2000, 50: 321-362.
- [10] KATO T. Quasi-linear equations of evolution with applications to partial differential equations[J]. Spectral Theory and Differential Equations, 1975, 448: 25-70.
- [11] YIN Z. On the Cauchy problem for an integrable equation with peakon solutions[J]. Illinois J Math, 2003, 47: 649-666.

- [12] CONSTANTIN A, ESCHER J. Global existence and blow-up for a shallow water equation[J]. Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci, 1998, 26: 303-328.
- [13] LAI S, WU Y. Existence of weak solutions in lower order Sobolev space for a Camassa-Holm-type equation[J]. J Phys A, 2010, 43(9): 095205.
- [14] LI Y A, OLVER P J. Well-posedness and blow-up solutions for an integrable nonlinearly dispersive model wave equation[J]. J Differential Equations, 2000, 162: 27-63.
- [15] WALTER W. Differential and integral inequalities[M]. New York: Springer-Verlag, 1970.
- [16] LIONS J L. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires[M]. Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1969.
- [17] ZHOU S. Well-posedness, blow-up phenomena and analyticity for a two-component higher order Camassa-Holm system[J]. Math Nachr, 2018, 219(10): 1595-1619.

Study on Some Problems of Solutions for a Classical Boussinesq System

LI Qiqi¹, ZHOU Shouming¹, DUAN Jun²

(1. School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University;

2. Economy and Management, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [Purposes] The existence and uniqueness of weak solutions and blow up criteria of strong solutions for Boussinesq system were studied. [Methods] The existence and uniqueness of weak solution of Boussinesq system in Sobolev spaces $H^s(\mathbf{R}) \times H^{s-1}(\mathbf{R})$ ($s \geq 1$) was established by using the quasi parabolic regularization method. The blow up criteria for strong solution of the system was obtained by means of energy estimation and transport equation theory. [Findings] Firstly, the local well-posedness of strong solution for Boussinesq system in Sobolev spaces $H^s(\mathbf{R}) \times H^{s-1}(\mathbf{R})$ ($s > \frac{3}{2}$) was obtained. Secondly, the existence and uniqueness of weak solution for Boussinesq system in Sobolev spaces $H^s(\mathbf{R}) \times H^{s-1}(\mathbf{R})$ ($s \geq 1$) was obtained. Finally, the blow up criterion of strong solution was obtained. [Conclusions] The blow up of strong solution for the Boussinesq system only occurs in the form of wave breaking, which is related to the spatial slope of the component u but independent of the component ρ .

Keywords: Boussinesq system; local well-posedness; weak solution; blow up criteria

(责任编辑 黄 颖)