DOI:10.11721/cqnuj20210308

一类 SIR 和 SIS 组合传染病模型行波解的存在性*

杨三艳，李庶民
(昆明理工大学 理学院，昆明 650500)

摘要:【目的】研究由 SIR 和 SIS 组合的三维传染病模型行波解的存在性。【方法】利用 Routh-Hurwitz 判据，运用 Schauder 不动点定理构造合适的上下解，讨论该模型中无病平衡点和地方病平衡点在一定条件下的稳定性以及连接两个平衡点的行波解的存在性。【结果】当 $R_0>1$ 时，对任意的 $c>c^*$，该传染病模型存在连接无病平衡点和地方病平衡点的行波解，且最小波速为 c^*。【结论】该传染病模型的行波解是存在的。

关键词:行波解;局部渐进稳定;Schauder 不动点定理;上下解;最小波速
中图分类号:O175.2　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2021)03-0084-10

近些年来，为了更好地了解各种疾病的传播速度与方式，很多学者致力于传染病模型的研究。Kermack 和 McKendrick 分别于 1926 年和 1932 年提出了经典的 SIR 和 SIS 仓室模型[1]。而行波解在传染病模型中表示一种传染源以常数波速在空间的传播，若求出传染病的最小波速，并证明它以最小波速进行传播，那人们就可以在实际生活中采取各种方式对传染病的传播速度进行控制[2]。众所周知，各种传染病在空间的传播与行波解息息相关(也就是扩散因素)，行波解的存在与否，对传染病的控制和预防有着非常重要的作用。对于一些尺度化的反应扩散方程的行波解，通常会使用相平面技术方法[3]来进行处理，但随着科技的进步，一些经典的相平面技术方法已不再适用某些扩散系统，这时，许多科学家陆续提出 Schauder 不动点定理[4]、上下解[5]等方法。很多学者均使用这些方法来研究传染病模型的行波解的存在性[6-8]。

1 SIR 和 SIS 组合的传染病模型

刘晓宇等人[9]研究了一类由 SIR 和 SIS 组合的复杂金融网络风险传染模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial t}=A-\beta f(S)I(t)-dS(t)+mI(t)\\[2mm] \dfrac{\partial I}{\partial t}=\beta f(S)I(t)-(\gamma+m+d)I(t)\\[2mm] \dfrac{\partial R}{\partial t}=\gamma I(t)-dR(t)\end{cases}, \tag{1}$$

分析了模型(1)两个平衡点在一定条件下的稳定性，得到风险存在与否的阈值;并在此基础上，提出金融风险防控的对策建议，以控制风险传染阈值，进一步控制金融风险。其中:$S(t)$，$I(t)$，$R(t)$分别表示风险暴露子市场、风险感染子市场和风险免疫子市场。

考虑到空间扩散对研究传染病传播具有重要的意义，所以本文研究模型(1)在考虑因病死亡率并加入反应扩散项的情况下行波解的存在性，即如下系统:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial t}=A-\beta f(S)I-dS+mI+d_1\dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2}\\[2mm] \dfrac{\partial I}{\partial t}=\beta f(S)I-(\gamma+m+d+\alpha)I+d_2\dfrac{\partial^2 I}{\partial x^2}\\[2mm] \dfrac{\partial R}{\partial t}=\gamma I-dR+d_3\dfrac{\partial^2 R}{\partial x^2}\end{cases}。 \tag{2}$$

* **收稿日期**:2020-08-25　　**修回日期**:2020-10-29　　**网络出版时间**:2021-05-20 09:43
资助项目:国家自然科学基金(No. 11561034)
第一作者简介:杨三艳，女，研究方向为动力系统，E-mail:1129867969@qq.com;**通信作者**:李庶民，男，副教授，E-mail:leesm007@163.com
网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20210519.1725.030.html

其中：S,I,R 分别表示易感者类、感染者类和移出者类；$f(S)$ 是关于易感者类 S 的非负不减连续函数，且 $S\geqslant 0$，$f(0)=0$；在 $S\geqslant 0$ 上连续可微，$f'(S)\geqslant 0$；A 是常数输入率；β 是疾病之间的传染率；d 是自然死亡率系数；γ 是移出率系数，即表明患病者康复后其中一部分不再被传染而进入移出者类；m 是无免疫易感率；α 是因病死亡率系数；$d_i(i=1,2,3)$ 分别代表易感者、感染者和免疫者的扩散率。总人数 $N=S+I+R$，且有：

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=A-d(S+I+R)-\alpha I=A-dN-\alpha I。$$

2 平衡点及稳定性

令 $d_1=d_2=d_3=D$，且有：$g_1(S,I,R)=A-\beta f(S)I-dS+mI$，$g_2(S,I,R)=\beta f(S)I-(\gamma+m+d+\alpha)I$，$g_3(S,I,R)=\gamma I-dR$，则模型(2)可变为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial t}=g_1(S,I,R)+D\dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial I}{\partial t}=g_2(S,I,R)+D\dfrac{\partial^2 I}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial R}{\partial t}=g_3(S,I,R)+D\dfrac{\partial^2 R}{\partial x^2}\end{cases}。\tag{3}$$

显然，系统(3)总有一个无病平衡点 $E_0\left(\dfrac{A}{d},0,0\right)$。

由文献[10]可得系统(3)所对应的基本再生数为 $R_0=\dfrac{\beta f\left(\dfrac{A}{d}\right)}{\gamma+m+d+\alpha}$。

若 $R_0>1$ 成立，则系统(3)除了无病平衡点 E_0 外，还有唯一的地方病平衡点 $E^*(S^*,I^*,R^*)$，其中：

$$S^*=f^{-1}\left(\frac{\gamma+m+d+\alpha}{\beta}\right),I^*=\frac{A-dS^*}{\beta f(S^*)-m}=\frac{A-dS^*}{\gamma+d+\alpha},R^*=\frac{\gamma}{d}I^*,$$

且当 $A>dS^*$ 时，系统(3)有唯一的正平衡点 $E^*(S^*,I^*,R^*)$。

接下来，讨论无病平衡点和地方病平衡点的稳定性。

定理 1　若系统(3)中的 $R_0<1$，则无病平衡点 $E_0\left(\dfrac{A}{d},0,0\right)$ 是局部渐进稳定的。

证明　系统(3)在 $E_0\left(\dfrac{A}{d},0,0\right)$ 处的 Jacobian 矩阵为：

$$\boldsymbol{J}(E_0)=\begin{bmatrix}-d & m-\beta f\left(\dfrac{A}{d}\right) & 0\\ 0 & \beta f\left(\dfrac{A}{d}\right)-(\gamma+m+d+\alpha) & 0\\ 0 & \gamma & -d\end{bmatrix},$$

可得到 $\boldsymbol{J}(E_0)$ 的特征方程为：

$$|\lambda E-\boldsymbol{J}(E_0)|=\begin{vmatrix}\lambda+d & \beta f\left(\dfrac{A}{d}\right)-m & 0\\ 0 & \lambda-\left[\beta f\left(\dfrac{A}{d}\right)-(\gamma+m+d+\alpha)\right] & 0\\ 0 & -\gamma & \lambda+d\end{vmatrix}=0,$$

即 $(\lambda+d)^2\left\{\lambda-\left[\beta f\left(\dfrac{A}{d}\right)-(\gamma+m+d+\alpha)\right]\right\}=0$。显然，当 $R_0<1$ 时，$\boldsymbol{J}(E_0)$ 的特征值全为负，所以无病平衡点 $E_0\left(\dfrac{A}{d},0,0\right)$ 是局部渐进稳定的。　证毕

定理 2　若系统(3)中的 $R_0>1$，则地方病平衡点 $E^*(S^*,I^*,R^*)$ 是局部渐进稳定的。

证明　当 $R_0>1$ 时，系统(3)在 $E^*(S^*,I^*,R^*)$ 处的 Jacobian 矩阵为 $\boldsymbol{J}(E^*)=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$，其中：$a_{11}=$

$-[\beta f'(S^*)+d]<0$,$a_{12}=-\beta f(S^*)+m<0$,$a_{13}=0$,$a_{21}=\beta f'(S^*)I^*>0$,$a_{22}=\beta f(S^*)-(\gamma+m+d+\alpha)=0$,$a_{23}=0$,$a_{31}=0$,$a_{32}=\gamma>0$,$a_{33}=-d<0$,可得到$\boldsymbol{J}(E^*)$的特征方程为:

$$|\lambda E-\boldsymbol{J}(E^*)|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23}\\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & 0\\ -a_{21} & \lambda & 0\\ 0 & -a_{32} & \lambda-a_{33}\end{vmatrix}=0,$$

即$(\lambda-a_{33})[\lambda(\lambda-a_{11})-a_{21}a_{12}]=\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3=0$,其中:

$$a_1=-(a_{11}+a_{33})>0,a_2=a_{33}a_{11}-a_{12}a_{21}>0,a_3=a_{33}a_{12}a_{21}>0。$$

由 Routh-Hurwitz 判据表[11]知:

$$\begin{array}{c|ccc}\lambda^3 & 1 & a_2 & 0\\ \lambda^2 & a_1 & a_3 & \\ \lambda & b_1 & b_2 & \\ \lambda_0 & c_1 & & \end{array}。$$

其中:$b_1=\dfrac{a_1a_2-a_3}{a_1}>0$,$b_2=0$,$c_1=a_3>0$,所以由 Routh-Hurwitz 定理知,地方病平衡点$E^*(S^*,I^*,R^*)$是局部渐进稳定的。 证毕

由定理1和定理2可知,可能存在一条连接无病平衡点E_0和地方病平衡点E^*的异宿轨。接下来将使用 Schauder 不动点定理构造上下解来寻找这条异宿轨,并给出模型(3)的行波解的存在条件。

3 模型(3)的行波解的存在性

令$N=S+I+R$,则系统(3)可变为如下的等价系统:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial N}{\partial t}=A-dN-\alpha I+D\dfrac{\partial^2 N}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial I}{\partial t}=\beta g(N-I-R)I-(\gamma+m+d+\alpha)I+D\dfrac{\partial^2 I}{\partial x^2},\\ \dfrac{\partial R}{\partial t}=\gamma I-dR+D\dfrac{\partial^2 R}{\partial x^2}\end{cases}\tag{4}$$

进行变量变换,令$\tilde{N}=\dfrac{A}{d}-N$,$\tilde{I}=I$,$\tilde{R}=R$,仍用N,I,R表示$\tilde{N},\tilde{I},\tilde{R}$,则系统(4)可变为:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial N}{\partial t}=-dN+\alpha I+D\dfrac{\partial^2 N}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial I}{\partial t}=\beta g\left(\dfrac{A}{d}-N-I-R\right)I-(\gamma+m+d+\alpha)I+D\dfrac{\partial^2 I}{\partial x^2}。\\ \dfrac{\partial R}{\partial t}=\gamma I-dR+D\dfrac{\partial^2 R}{\partial x^2}\end{cases}\tag{5}$$

容易验证,当$R_0>1$,系统(5)有两个平衡点$(0,0,0)$和(k_1,k_2,k_3),其中:$k_1=\dfrac{A}{d}-(S^*+I^*+R^*)$,$k_2=I^*$,$k_3=R^*$。

本文利用 Schauder 不动点定理,它要求所考虑的算子具有连续性。为此,需要引入$C(\mathbf{R},\mathbf{R}^3)$中的拓扑。令$\mu>0$,在$C(\mathbf{R},\mathbf{R}^3)$中定义指数衰减函数$|\Phi|_\mu=\sup\limits_{\xi\in\mathbf{R}}\mathrm{e}^{-\mu|\xi|}|\Phi(\xi)|_{\mathbf{R}^3}$,$B_\mu(\mathbf{R},\mathbf{R}^3)=\{\Phi\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}^3):|\Phi|_\mu<\infty\}$,容易验证$(B_\mu(\mathbf{R},\mathbf{R}^3),|\cdot|_\mu)$是一个 Banach 空间[13]。

为方便研究,通常采用$\mathbf{R}^3$中标准序关系之间的记号,即对$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)^{\mathrm{T}}$和$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)^{\mathrm{T}}$,若$u_i\leqslant v_i$ $(i=1,2,3)$时,有$\boldsymbol{u}\leqslant\boldsymbol{v}$;若$\boldsymbol{u}\leqslant\boldsymbol{v}$且$\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{v}$时,有$\boldsymbol{u}<\boldsymbol{v}$;当$\boldsymbol{u}\leqslant\boldsymbol{v}$且$u_i\leqslant v_i(i=1,2,3)$时,有$\boldsymbol{u}\ll\boldsymbol{v}$。若$\boldsymbol{u}\leqslant\boldsymbol{v}$,有$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]=\{\rho\in\mathbf{R}^3:\boldsymbol{u}<\rho\leqslant\boldsymbol{v}\}$,$[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\{\rho\in\mathbf{R}^3:\boldsymbol{u}\leqslant\rho<\boldsymbol{v}\}$,且$[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]=\{\rho\in\mathbf{R}^3:\boldsymbol{u}\leqslant\rho\leqslant\boldsymbol{v}\}$。$|\cdot|$表示$\mathbf{R}^3$中的 Euclidean 范数,且$\|\cdot\|$表示$C(\mathbf{R},\mathbf{R}^3)$中的上确界范数。

接下来,使用 Schauder 不动点定理构造一对合适的上下解,将讨论系统(5)行波解的存在性问题转化为讨论对应波方程的上下解的存在问题。

3.1 Schauder 不动点定理的应用

若 $N(x,t)=\omega(x+ct)=\omega(\xi)$，$I(x,t)=\varphi(x+ct)=\varphi(\xi)$，$R(x,t)=\psi(x+ct)=\psi(\xi)$，则称$(N(x,t),I(x,t),R(x,t))$为系统(5)的行波解，其中：$\xi=x+ct$，$c$ 是常数且 $c>0$。把 $N(x,t)$，$I(x,t)$，$R(x,t)$带入系统(5)，则系统(5)行波解存在的充要条件是：

$$\begin{cases}D\omega''(\xi)-c\omega'(\xi)+g_{c1}(\omega(\xi),\varphi(\xi),\psi(\xi))=0\\ D\varphi''(\xi)-c\varphi'(\xi)+g_{c2}(\omega(\xi),\varphi(\xi),\psi(\xi))=0\\ D\psi''(\xi)-c\psi'(\xi)+g_{c3}(\omega(\xi),\varphi(\xi),\psi(\xi))=0\end{cases}。\tag{6}$$

其中：$g_{c1}(\omega(\xi),\varphi(\xi),\psi(\xi))=\alpha\varphi(\xi)-d\omega(\xi)$，$g_{c2}(\omega(\xi),\varphi(\xi),\psi(\xi))=\beta g\left(\dfrac{A}{d}-\omega(\xi)-\varphi(\xi)-\psi(\xi)\right)\varphi(\xi)-(\gamma+d+m+\alpha)\varphi(\xi)$，$g_{c3}(\omega(\xi),\varphi(\xi),\psi(\xi))=\gamma\varphi(\xi)-d\psi(\xi)$。

假设 $g_{ci}:C(\mathbf{R},\mathbf{R}^3)\to\mathbf{R}$ 是连续函数且满足：(A1) $g_{ci}(0,0,0)=g_{ci}(N^*,I^*,R^*)=0$，$i=1,2,3$；(A2) 存在常数 $L_1>0$，$L_2>0$，$L_3>0$ 使得：

$$|g_{c1}(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)-g_{c1}(\omega_2,\varphi_2,\psi_2)|\leqslant L_1\|\Phi_1-\Phi_2\|,\ |g_{c2}(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)-g_{c2}(\omega_2,\varphi_2,\psi_2)|\leqslant L_2\|\Phi_1-\Phi_2\|,$$
$$|g_{c3}(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)-g_{c3}(\omega_2,\varphi_2,\psi_2)|\leqslant L_3\|\Phi_1-\Phi_2\|。$$

其中：$\Phi_1=(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)$，$\Phi_2=(\omega_2,\varphi_2,\psi_2)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}^3)$，且 $0\leqslant\omega_j(\xi)\leqslant M_1$，$0\leqslant\varphi_j(\xi)\leqslant M_2$，$0\leqslant\psi_j(\xi)\leqslant M_3$，$j=1,2$，$M_1\geqslant N^*$，$M_2\geqslant I^*$，$M_3\geqslant R^*$ 均为正常数；且满足如下渐进边界条件：

$$\lim_{t\to-\infty}(\omega(\xi),\varphi(\xi),\psi(\xi))=(0,0,0),\tag{7}$$

$$\lim_{t\to+\infty}(\omega(\xi),\varphi(\xi),\psi(\xi))=(N^*,I^*,R^*)。\tag{8}$$

为了研究系统(5)的行波解，定义如下剖面集：

$$\Gamma((\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi}),(\overline{\omega},\overline{\varphi},\overline{\psi}))=\{\underline{\omega}(\xi)\leqslant\omega(\xi)\leqslant\overline{\omega}(\xi),\underline{\varphi}(\xi)\leqslant\varphi(\xi)\leqslant\overline{\varphi}(\xi),\underline{\psi}(\xi)\leqslant\psi(\xi)\leqslant\overline{\psi}(\xi)\},$$

显然，$\Gamma((\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi}),(\overline{\omega},\overline{\varphi},\overline{\psi}))$是非空、凸、有界和闭的。

定义　有一对连续函数$\underline{\Phi}=(\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi})$和$\overline{\Psi}=(\overline{\omega},\overline{\varphi},\overline{\psi})$，若$\underline{\Phi}$和$\overline{\Psi}$在 $\mathbf{R}$ 上二阶可微且几乎处处有界，若：

$$D\overline{\omega}''(\xi)-c\overline{\omega}'(\xi)+g_{c1}(\overline{\omega}(\xi),\overline{\varphi}(\xi),\overline{\psi}(\xi))\leqslant0,\text{a. e. }\mathbf{R},$$
$$D\overline{\varphi}''(\xi)-c\overline{\varphi}'(\xi)+g_{c2}(\underline{\omega}(\xi),\overline{\varphi}(\xi),\underline{\psi}(\xi))\leqslant0,\text{a. e. }\mathbf{R},$$
$$D\overline{\psi}''(\xi)-c\overline{\psi}'(\xi)+g_{c3}(\overline{\omega}(\xi),\overline{\varphi}(\xi),\overline{\psi}(\xi))\leqslant0,\text{a. e. }\mathbf{R}。$$

以及

$$D\underline{\omega}''(\xi)-c\underline{\omega}'(\xi)+g_{c1}(\underline{\omega}(\xi),\underline{\varphi}(\xi),\underline{\psi}(\xi))\geqslant0,\text{a. e. }\mathbf{R},$$
$$D\underline{\varphi}''(\xi)-c\underline{\varphi}'(\xi)+g_{c2}(\overline{\omega}(\xi),\underline{\varphi}(\xi),\overline{\psi}(\xi))\geqslant0,\text{a. e. }\mathbf{R},$$
$$D\underline{\psi}''(\xi)-c\underline{\psi}'(\xi)+g_{c3}(\underline{\omega}(\xi),\underline{\varphi}(\xi),\underline{\psi}(\xi))\geqslant0,\text{a. e. }\mathbf{R}。$$

则称$\underline{\Phi}$和$\overline{\Psi}$是系统(6)的一对上下解。

进一步，定义部分拟单调(PQM)条件：存在正常数 β_1,β_2,β_3 使得：

$$g_{c1}(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)-g_{c1}(\omega_2,\varphi_2,\psi_2)+\beta_1(\omega_1-\omega_2)\geqslant0,\ g_{c2}(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)-g_{c2}(\omega_1,\varphi_2,\psi_1)+\beta_2(\varphi_1-\varphi_2)\geqslant0,$$
$$g_{c2}(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)-g_{c2}(\omega_2,\varphi_1,\psi_2)\leqslant0,\ g_{c3}(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)-g_{c3}(\omega_2,\varphi_2,\psi_2)+\beta_3(\psi_1-\psi_2)\geqslant0。$$

其中：$(\omega_j,\varphi_j,\psi_j)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}^3)$，$j=1,2$，且$(0,0,0)\leqslant(\omega_2,\varphi_2,\psi_2)\leqslant(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)\leqslant(M_1,M_2,M_3)$。

引理 1　g_{c1},g_{c2},g_{c3}满足 PQM 条件。

证明　可直接计算得：

$$g_{c1}(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)-g_{c1}(\omega_2,\varphi_2,\psi_2)=-d\omega_1+\alpha\varphi_1-(-d\omega_2+\alpha\varphi_2)\geqslant-d(\omega_1-\omega_2),$$

令 $\beta_1=d>0$，则有：

$$g_{c1}(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)-g_{c1}(\omega_2,\varphi_2,\psi_2)+\beta_1(\omega_1-\omega_2)\geqslant0;$$

$$g_{c2}(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)-g_{c2}(\omega_1,\varphi_2,\psi_1)=$$
$$\beta g\left(\frac{A}{d}-\omega_1-\varphi_1-\psi_1\right)\varphi_1-(\gamma+d+m+\alpha)(\varphi_1-\varphi_2)-\beta g\left(\frac{A}{d}-\omega_1-\varphi_2-\psi_1\right)\varphi_2\geqslant-(\beta M_2+\gamma+d+m+\alpha)(\varphi_1-\varphi_2)。$$

令 $\beta_2=\beta M_2+\gamma+d+m+\alpha>0$，则有：

$$g_{c2}(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)-g_{c2}(\omega_1,\varphi_2,\psi_1)+\beta_2(\varphi_1-\varphi_2)\geqslant0;$$

$$g_{c2}(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)-g_{c2}(\omega_2,\varphi_1,\psi_2)=\beta g\left(\frac{A}{d}-\omega_1-\varphi_1-\psi_1\right)\varphi_1-\beta g\left(\frac{A}{d}-\omega_2-\varphi_1-\psi_1\right)\varphi_1=$$

$$\beta\varphi_1\left[g\left(\frac{A}{d}-\omega_1-\varphi_1-\psi_1\right)-g\left(\frac{A}{d}-\omega_2-\varphi_1-\psi_2\right)\right]\leqslant 0,$$

$$g_{c3}(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)-g_{c3}(\omega_2,\varphi_2,\psi_2)=\gamma\varphi_1-d\psi_1-(\gamma\varphi_2-d\psi_2)\geqslant -d(\psi_1-\psi_2)。$$

令 $\beta_3=d>0$,则有 $g_{c3}(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)-g_{c3}(\omega_2,\varphi_2,\psi_2)+\beta_3(\psi_1-\psi_2)\geqslant 0$。 证毕

另外,假设系统(6)存在一对上下解$(\underline{\omega}(\xi),\underline{\varphi}(\xi),\underline{\psi}(\xi))$和$(\overline{\omega}(\xi),\overline{\varphi}(\xi),\overline{\psi}(\xi))$满足:

(P1) $(0,0,0)\leqslant(\underline{\omega}(\xi),\underline{\varphi}(\xi),\underline{\psi}(\xi))\leqslant(\overline{\omega}(\xi),\overline{\varphi}(\xi),\overline{\psi}(\xi))\leqslant(M_1,M_2,M_3)$;

(P2) $\lim\limits_{t\to-\infty}(\underline{\omega}(\xi),\underline{\varphi}(\xi),\underline{\psi}(\xi))=(0,0,0)$, $\lim\limits_{t\to+\infty}(\overline{\omega}(\xi),\overline{\varphi}(\xi),\overline{\psi}(\xi))=(k_1,k_2,k_3)$;

(P3) 当 $\xi\in\mathbf{R}$,有$\sup\limits_{s\leqslant\xi}\underline{\omega}(\xi)\leqslant\overline{\omega}(\xi)$,$\overline{\omega}'(\xi+)\leqslant\underline{\omega}'(\xi-)$,且$\overline{\omega}'(\xi+)\geqslant\underline{\omega}'(\xi-)$。

对 $\beta_1>0,\beta_2>0,\beta_3>0$,先定义:

$$H_1(\omega,\varphi,\psi)(\xi)=\beta_1\omega(\xi)+g_{c1}(\omega(\xi),\varphi(\xi),\psi(\xi)),\tag{9}$$

$$H_2(\omega,\varphi,\psi)(\xi)=\beta_2\varphi(\xi)+g_{c2}(\omega(\xi),\varphi(\xi),\psi(\xi)),\tag{10}$$

$$H_3(\omega,\varphi,\psi)(\xi)=\beta_3\psi(\xi)+g_{c3}(\omega(\xi),\varphi(\xi),\psi(\xi))。\tag{11}$$

将(9)~(11)式带入(6)式可得到如下系统:

$$\begin{cases}D\omega''(\xi)-c\omega'(\xi)-\beta_1\omega(\xi)+H_1(\omega(\xi),\varphi(\xi),\psi(\xi))=0\\ D\varphi''(\xi)-c\varphi'(\xi)-\beta_2\varphi(\xi)+H_2(\omega(\xi),\varphi(\xi),\psi(\xi))=0\\ D\psi''(\xi)-c\psi'(\xi)-\beta_3\psi(\xi)+H_3(\omega(\xi),\varphi(\xi),\psi(\xi))=0\end{cases}。\tag{12}$$

令:$\lambda_1=\dfrac{c-\sqrt{c^2+4D\beta_1}}{2D}$,$\lambda_2=\dfrac{c+\sqrt{c^2+4D\beta_1}}{2D}$,$\lambda_3=\dfrac{c-\sqrt{c^2+4D\beta_2}}{2D}$,$\lambda_4=\dfrac{c+\sqrt{c^2+4D\beta_2}}{2D}$,$\lambda_5=\dfrac{c-\sqrt{c^2+4D\beta_3}}{2D}$,$\lambda_6=\dfrac{c+\sqrt{c^2+4D\beta_3}}{2D}$,满足$\begin{cases}D\omega''(\xi)-c\omega'(\xi)-\beta_1\omega(\xi)=0\\ D\varphi''(\xi)-c\varphi'(\xi)-\beta_2\varphi(\xi)=0\\ D\psi''(\xi)-c\psi'(\xi)-\beta_3\psi(\xi)=0\end{cases}$,且有 $\lambda_1<0<\lambda_2,\lambda_3<0<\lambda_4,\lambda_5<0<\lambda_6$;

其次,再定义:

$$G_1(\omega,\varphi,\psi)(\xi)=\frac{1}{D(\lambda_2-\lambda_1)}\left[\int_{-\infty}^{\xi}\mathrm{e}^{\lambda_1(\xi-s)}+\int_{\xi}^{+\infty}\mathrm{e}^{\lambda_2(\xi-s)}\right]H_1(\omega,\varphi,\psi)(s)\mathrm{d}s,\tag{13}$$

$$G_2(\omega,\varphi,\psi)(\xi)=\frac{1}{D(\lambda_4-\lambda_3)}\left[\int_{-\infty}^{\xi}\mathrm{e}^{\lambda_3(\xi-s)}+\int_{\xi}^{+\infty}\mathrm{e}^{\lambda_4(\xi-s)}\right]H_2(\omega,\varphi,\psi)(s)\mathrm{d}s,\tag{14}$$

$$G_3(\omega,\varphi,\psi)(\xi)=\frac{1}{D(\lambda_6-\lambda_5)}\left[\int_{-\infty}^{\xi}\mathrm{e}^{\lambda_5(\xi-s)}+\int_{\xi}^{+\infty}\mathrm{e}^{\lambda_6(\xi-s)}\right]H_3(\omega,\varphi,\psi)(s)\mathrm{d}s。\tag{15}$$

其中:$(0,0,0)\leqslant(\omega,\varphi,\psi)\leqslant(M_1,M_2,M_3)$;显然,$G=(G_1,G_2,G_3)$是适定的,且满足:

$$DG_i''(\Phi)(\xi)-cG_i'(\Phi)(\xi)-\beta_i(G_i(\Phi))(\xi)+H_i(\Phi)(\xi)=0,i=1,2,3,\xi\in\mathbf{R},$$

因此,算子 G 的不动点是系统(12)的一个解;此外,若该算子的不动点还满足边界条件(7)~(8)式,则系统(12)的这个解就是系统(5)连接两个平衡点的行波解。因此,证明以下引理成立即可。

引理 2 假设(A1)和(PQM)成立,则有:

$$H_2(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)(\xi)\leqslant H_2(\omega_2,\varphi_1,\psi_1)(\xi),H_2(\omega_1,\varphi_2,\psi_1)(\xi)\leqslant H_2(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)(\xi),$$

$$H_2(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)(\xi)\leqslant H_2(\omega_1,\varphi_2,\psi_2)(\xi)。$$

且对 $\xi\in\mathbf{R}$,有$(0,0,0)\leqslant\omega_2,\varphi_2,\psi_2\leqslant(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)\leqslant(M_1,M_2,M_3)$(证明过程可由引理1给出)。

引理 3 假设(A1)和(PQM)成立,则对任意的$(0,0,0)\leqslant(\omega,\varphi,\psi)\leqslant(M_1,M_2,M_3)$,有:1) $H_1(\omega,\varphi,\psi)\geqslant 0$,$H_3(\omega,\varphi,\psi)\geqslant 0$;2) $H_1(\omega_2,\varphi_2,\psi_2)\leqslant H_1(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)$,$H_3(\omega_2,\varphi_2,\psi_2)\leqslant H_3(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)$且$(0,0,0)\leqslant(\omega_2,\varphi_2,\psi_2)\leqslant(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)\leqslant(M_1,M_2,M_3)$。

引理 4 假设(PQM)成立,则有 $G(\Gamma((\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi}),(\overline{\omega},\overline{\varphi},\overline{\psi})))\subset\Gamma(\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi}),(\overline{\omega},\overline{\varphi},\overline{\psi}))$。

证明 对任意的(ω,φ,ψ)有$(\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi})\leqslant(\omega,\varphi,\psi)\leqslant(\overline{\omega},\overline{\varphi},\overline{\psi})$,根据 $H=(H_1,H_2,H_3)$的性质,所以有:

$$G_1(\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi})\leqslant G_1(\omega,\varphi,\psi)\leqslant G_1(\overline{\omega},\overline{\varphi},\overline{\psi}),G_2(\overline{\omega},\underline{\varphi},\overline{\psi})\leqslant G_2(\omega,\varphi,\psi)\leqslant G_2(\underline{\omega},\overline{\varphi},\underline{\psi}),$$

$$G_3(\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi})\leqslant G_3(\omega,\varphi,\psi)\leqslant G_3(\overline{\omega},\overline{\varphi},\overline{\psi})。$$

现在只需要证明：$G_1(\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi})\geqslant\underline{\omega}$，$G_1(\overline{\omega},\overline{\varphi},\overline{\psi})\leqslant\overline{\omega}$，$G_2(\overline{\omega},\underline{\varphi},\overline{\psi})\geqslant\underline{\varphi}$，$G_2(\underline{\omega},\overline{\varphi},\underline{\psi})\leqslant\overline{\varphi}$，$G_3(\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi})\geqslant\underline{\psi}$及$G_3(\overline{\omega},\overline{\varphi},\overline{\psi})\leqslant\overline{\psi}$。下面以$G_1(\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi})\geqslant\underline{\omega}$为例进行证明。

$$G_1(\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi})(\xi)=\frac{1}{D(\lambda_2-\lambda_1)}\left[\int_{-\infty}^{\xi}\mathrm{e}^{\lambda_1(\xi-s)}+\int_{\xi}^{+\infty}\mathrm{e}^{\lambda_2(\xi-s)}\right]H_1(\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi})(s)\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\frac{1}{D(\lambda_2-\lambda_1)}\left[\int_{-\infty}^{\xi}\mathrm{e}^{\lambda_1(\xi-s)}+\int_{\xi}^{+\infty}\mathrm{e}^{\lambda_2(\xi-s)}\right][c\,\underline{\omega}'(s)+\beta_1\,\underline{\omega}(s)-\underline{\omega}''(s)]\,\mathrm{d}s\geqslant\underline{\omega}(\xi);$$

同理可证其他不等式。　　证毕

引理5　假设条件(A1)和(PQM)成立。对任意的$(0,0,0)\leqslant(\omega,\varphi,\psi)\leqslant(M_1,M_2,M_3)$，有：

$$G_1(\omega_2,\varphi_2,\psi_2)\leqslant G_1(\omega_1,\varphi_1,\psi_1),G_2(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)\leqslant G_2(\omega_2,\varphi_1,\psi_1),G_2(\omega_1,\varphi_2,\psi_1)\leqslant G_2(\omega_1,\varphi_1,\psi_1),$$
$$G_2(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)\leqslant G_2(\omega_1,\varphi_1,\psi_2),G_3(\omega_2,\varphi_2,\psi_2)\leqslant G_3(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)。$$

且有$(0,0,0)\leqslant(\omega_2,\varphi_2,\psi_2)\leqslant(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)\leqslant(M_1,M_2,M_3)$。

引理6　假设(PQM)成立，且在$B_\mu(\mathbf{R},\mathbf{R}^3)$中，则有$G(\Gamma((\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi}),(\overline{\omega},\overline{\varphi},\overline{\psi})))\subset\Gamma((\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi}),(\overline{\omega},\overline{\varphi},\overline{\psi}))$在$|\cdot|_\mu$范数意义下是连续的。

证明　对任意固定的$\varepsilon>0$，取$\delta<\dfrac{\varepsilon}{L_1+\beta_1}$，对$\Phi_1=(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)$，$\Phi_2=(\omega_2,\varphi_2,\psi_2)\in B_\mu(\mathbf{R},\mathbf{R}^3)$，有$|\Phi_1-\Phi_2|_\mu=\sup\limits_{\xi\in\mathbf{R}}|\Phi_1(\xi)-\Phi_2(\xi)|\mathrm{e}^{-\mu|\xi|}<\delta$。下面，直接进行计算：

$$|H_1(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)-H_1(\omega_2,\varphi_2,\psi_2)|\mathrm{e}^{-\mu|\xi|}=|g_{c1}(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)-g_{c1}(\omega_2,\varphi_2,\psi_2)+\beta_1(\omega_1-\omega_2)|\mathrm{e}^{-\mu|\xi|}\leqslant$$
$$|g_{c1}(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)-g_{c1}(\omega_2,\varphi_2,\psi_2)|\mathrm{e}^{-\mu|\xi|}+\beta_1|\omega_1-\omega_2|_\mu\leqslant L_1\ \|\Phi_1-\Phi_2\|_{C^2(\mathbf{R},\mathbf{R}^3)}\mathrm{e}^{-\mu|\xi|}+\beta_1|\omega_1-\omega_2|_\mu=$$
$$L_1\|\Phi_1\underset{\xi\in\mathbf{R}}{-}\Phi_2\|\mathrm{e}^{-\mu|\xi|}+\beta_1|\omega_1-\omega_2|_\mu\leqslant L_1|\Phi_1-\Phi_2|_\mu+\beta_1\ |\Phi_1-\Phi_2|_\mu=(L_1+\beta_1)|\Phi_1-\Phi_2|_\mu\leqslant\varepsilon。$$

即$H_1:\Gamma\to\Gamma$在$|\cdot|_\mu$范数下是连续的。于是，有：

$$|G_1(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)-G_1(\omega_2,\varphi_2,\psi_2)|=\frac{1}{D(\lambda_2-\lambda_1)}\left[\int_{-\infty}^{\xi}\mathrm{e}^{\lambda_1(\xi-s)}|H_1(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)(s)-H_1(\omega_2,\varphi_2,\psi_2)(s)|\mathrm{d}s+\right.$$
$$\left.\int_{\xi}^{+\infty}\mathrm{e}^{\lambda_2(\xi-s)}|H_1(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)(s)-H_1(\omega_2,\varphi_2,\psi_2)(s)|\mathrm{d}s\right],$$

当$\xi\geqslant0$，有：

$$|G_1(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)-G_1(\omega_2,\varphi_2,\psi_2)|\mathrm{e}^{-\mu\xi}\leqslant\frac{\varepsilon}{D(\lambda_2-\lambda_1)}\left[\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\lambda_1(\xi-s)-\mu s}\mathrm{d}s+\int_0^{\xi}\mathrm{e}^{\lambda_1(\xi-s)+\mu s}\mathrm{d}s+\int_{\xi}^{+\infty}\mathrm{e}^{\lambda_2(\xi-s)+\mu s}\mathrm{d}s\right]\mathrm{e}^{-\mu\xi}=$$
$$\frac{\varepsilon}{D(\lambda_2-\lambda_1)}\left[\mathrm{e}^{\lambda_1\xi}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\mu)s}\mathrm{d}s+\mathrm{e}^{\lambda_1\xi}\int_0^{\xi}\mathrm{e}^{(-\lambda_1+\mu)s}\mathrm{d}s+\mathrm{e}^{\lambda_2\xi}\int_{\xi}^{+\infty}\mathrm{e}^{(-\lambda_2+\mu)s}\mathrm{d}s\right]\mathrm{e}^{-\mu\xi}\leqslant$$
$$\frac{\varepsilon}{D(\lambda_2-\lambda_1)}\left[\frac{2\mu}{\lambda_1^2-\mu^2}+\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(\mu-\lambda_1)(\lambda_2-\mu)}\right]。$$

同样地，当$\xi<0$，有：

$$|G_1(\omega_1,\varphi_1,\psi_1)-G_1(\omega_2,\varphi_2,\psi_2)|\mathrm{e}^{-\mu|\xi|}\leqslant\frac{\varepsilon}{D(\lambda_2-\lambda_1)}\left[\int_{-\infty}^{\xi}\mathrm{e}^{\lambda_1(\xi-s)-\mu s}\mathrm{d}s+\int_{\xi}^{0}\mathrm{e}^{\lambda_2(\xi-s)-\mu s}\mathrm{d}s+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{\lambda_2(\xi-s)+\mu s}\mathrm{d}s\right]\mathrm{e}^{-\mu\xi}\leqslant$$
$$\frac{\varepsilon}{D(\lambda_2-\lambda_1)}\left[\frac{2\mu}{\lambda_2^2-\mu^2}-\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(\mu+\lambda_1)(\lambda_2+\mu)}\right],$$

即$G_1:B_\mu(\mathbf{R},\mathbf{R}^3)\to B_\mu(\mathbf{R},\mathbf{R}^3)$在$|\cdot|_\mu$范数下是连续的。

用相同的计算，可得：$G_2:B_\mu(\mathbf{R},\mathbf{R}^3)\to B_\mu(\mathbf{R},\mathbf{R}^3)$和$G_3:B_\mu(\mathbf{R},\mathbf{R}^3)\to B_\mu(\mathbf{R},\mathbf{R}^3)$在$|\cdot|_\mu$范数下均是连续的。　　证毕

引理7　假设(PQM)成立，则$G(\Gamma((\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi}),(\overline{\omega},\overline{\varphi},\overline{\psi})))\subset\Gamma((\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi}),(\overline{\omega},\overline{\varphi},\overline{\psi}))$在$|\cdot|_\mu$范数意义下是紧的。

证明　由(10)式可直接计算：

$$G_1'(\omega,\varphi,\psi)(\xi)=\frac{\lambda_1\mathrm{e}^{\lambda_1\xi}}{D(\lambda_2-\lambda_1)}\int_{-\infty}^{\xi}\mathrm{e}^{-\lambda_1 s}H_1(\omega,\varphi,\psi)(s)\mathrm{d}s+\frac{\lambda_2\mathrm{e}^{\lambda_2\xi}}{D(\lambda_2-\lambda_1)}\int_{\xi}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_2 s}H_1(\omega,\varphi,\psi)(s)\mathrm{d}s,$$

由引理5可知$G_1'(\omega,\varphi,\psi)(\xi)\geqslant0$，且由引理3中的1)和条件$\lambda_1<0<\lambda_2$可得：

$$0\leqslant G_1'(\omega,\varphi,\psi)(\xi)\leqslant\frac{\lambda_2\mathrm{e}^{\lambda_2\xi}}{D(\lambda_2-\lambda_1)}\int_{\xi}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_2 s}H_1(\omega,\varphi,\psi)(s)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\frac{\lambda_2\mathrm{e}^{\lambda_2\xi}}{D(\lambda_2-\lambda_1)}H_1(\overline{\omega},\overline{\varphi},\overline{\psi})(\xi)\int_{\xi}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_2 s}\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{D(\lambda_2-\lambda_1)}H_1(\overline{\omega},\overline{\varphi},\overline{\psi})(\xi)。$$

因此,由(P1)可知,存在一个常数 N_1 使得 $|G_1'(\omega,\varphi,\psi)(\xi)|_\mu\leqslant N_1$。同样的方法可证存在一个常数 N_3 使得 $|G_3'(\omega,\varphi,\psi)(\xi)|_\mu\leqslant N_3$。

对任意的 $(\omega,\varphi,\psi)\in\Gamma((\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi}),(\overline{\omega},\overline{\varphi},\overline{\psi}))$,有:

$$G_2'(\omega,\varphi,\psi)(\xi)=\frac{\lambda_3 e^{\lambda_3\xi}}{D(\lambda_4-\lambda_3)}\int_{-\infty}^{\xi}e^{-\lambda_3 s}H_2(\omega,\varphi,\psi)(s)ds+\frac{\lambda_4 e^{\lambda_4\xi}}{D(\lambda_4-\lambda_3)}\int_{\xi}^{+\infty}e^{-\lambda_4 s}H_2(\omega,\varphi,\psi)(s)ds,$$

所以,有:

$$|G_2'(\omega,\varphi,\psi)(\xi)|_\mu=\sup_{\xi\in\mathbf{R}}\left|\frac{\lambda_3 e^{\lambda_3\xi}}{D(\lambda_4-\lambda_3)}\int_{-\infty}^{\xi}e^{-\lambda_3 s}H_1(\omega,\varphi,\psi)(s)ds+\frac{\lambda_4 e^{\lambda_4\xi}}{D(\lambda_4-\lambda_3)}\int_{\xi}^{+\infty}e^{-\lambda_4 s}H_1(\omega,\varphi,\psi)(s)ds\right|e^{-\mu|\xi|}\leqslant$$

$$\frac{|\lambda_3|}{D(\lambda_4-\lambda_3)}\left[\sup_{\xi\in\mathbf{R}}e^{\lambda_3 s-\mu|\xi|}\int_{-\infty}^{\xi}e^{-\lambda_3 s}e^{\mu|\xi|}e^{-\mu|\xi|}+\frac{\lambda_4}{D(\lambda_4-\lambda_3)}\sup_{\xi\in\mathbf{R}}e^{\lambda_4 s-\mu|\xi|}\int_{\xi}^{+\infty}e^{-\lambda_4 s}e^{\mu|\xi|}e^{-\mu|\xi|}\right]H_2(\omega,\varphi,\psi)(s)ds\leqslant$$

$$\frac{|\lambda_3|}{D(\lambda_4-\lambda_3)}|H_2(\omega,\varphi,\psi)(\xi)|_\mu\left[\sup_{\xi\in\mathbf{R}}e^{\lambda_3 s-\mu|\xi|}\int_{-\infty}^{\xi}e^{-\lambda_3 s}e^{\mu|\xi|}ds+\frac{\lambda_4}{D(\lambda_4-\lambda_3)}\sup_{\xi\in\mathbf{R}}e^{\lambda_4 s-\mu|\xi|}\int_{\xi}^{+\infty}e^{-\lambda_4 s}e^{\mu|\xi|}ds\right];$$

如果 $\xi>0$,得到:

$$|G_2'(\omega,\varphi,\psi)(\xi)|_\mu\leqslant\frac{|\lambda_3|}{D(\lambda_4-\lambda_3)}|H_2(\omega,\varphi,\psi)(\xi)|_\mu\sup_{\xi\in\mathbf{R}}e^{(\lambda_3-\mu)\xi}\left[\int_{-\infty}^{0}e^{-(\lambda_3+\mu)s}ds+\int_{0}^{\xi}e^{(-\lambda_3+\mu)s}ds\right]+$$

$$\frac{\lambda_4}{D(\lambda_4-\lambda_3)}|H_2(\omega,\varphi,\psi)(\xi)|_\mu\sup_{\xi\in\mathbf{R}}e^{(\lambda_4-\mu)\xi}\int_{\xi}^{+\infty}e^{(\mu-\lambda_4)s}ds\leqslant$$

$$\left[\frac{\lambda_3}{D(\mu+\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_3)}+\frac{\lambda_4}{D(\lambda_4-\mu)(\lambda_4-\lambda_3)}\right]|H_2(\omega,\varphi,\psi)(\xi)|_\mu=$$

$$\frac{1}{D(\lambda_4-\lambda_3)}\left[\frac{\lambda_3}{(\mu+\lambda_3)}+\frac{\lambda_4}{(\lambda_4-\mu)}\right]|H_2(\omega,\varphi,\psi)(\xi)|_\mu。$$

如果 $\xi<0$,得到:

$$|G_2'(\omega,\varphi,\psi)(\xi)|_\mu\leqslant\frac{|\lambda_3|}{D(\lambda_4-\lambda_3)}|H_2(\omega,\varphi,\psi)(\xi)|_\mu\sup_{\xi\in\mathbf{R}}e^{(\lambda_3+\mu)\xi}\left[\int_{-\infty}^{\xi}e^{-(\lambda_3+\mu)s}ds\right]+$$

$$\frac{\lambda_4}{D(\lambda_4-\lambda_3)}|H_2(\omega,\varphi,\psi)(\xi)|_\mu\sup_{\xi\in\mathbf{R}}e^{(\lambda_4+\mu)\xi}\left[\int_{\xi}^{0}e^{-(\lambda_4+\mu)s}ds+\int_{0}^{+\infty}e^{(\mu-\lambda_4)s}ds\right]\leqslant$$

$$\frac{1}{D(\lambda_4-\lambda_3)}\left[\frac{\lambda_3}{(\mu+\lambda_3)}+\frac{\lambda_4}{(\lambda_4-\mu)}\right]|H_2(\omega,\varphi,\psi)(\xi)|_\mu。$$

因此 $G_2:B_\mu(\mathbf{R},\mathbf{R}^3)\to B_\mu(\mathbf{R},\mathbf{R}^3)$ 在 $|\cdot|_\mu$ 范数下是连续的,且 $\Gamma((\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi}),(\overline{\omega},\overline{\varphi},\overline{\psi}))$ 是一致有界的,存在一个常数 N_2 使得 $|G_2'(\omega,\varphi,\psi)(\xi)|_\mu\leqslant N_2$。

对任意的 $G(\Gamma((\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi}),(\overline{\omega},\overline{\varphi},\overline{\psi})))$,需要证明 $G(\Gamma((\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi}),(\overline{\omega},\overline{\varphi},\overline{\psi})))$ 是等度连续且一致有界。令:

$$G^q(\omega,\varphi,\psi)(\xi)=\begin{cases}G(\omega,\varphi,\psi)(\xi),\xi\in[-q,q]\\G(\omega,\varphi,\psi)(q),\xi\in(q,\infty)\\G(\omega,\varphi,\psi)(-q),\xi\in(-\infty,-q)\end{cases},$$

对任意的 $q\geqslant1$,有 $G^q(\Gamma((\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi}),(\overline{\omega},\overline{\varphi},\overline{\psi})))$ 是等度连续且一致有界。在区间 $[-q,q]$,由 Ascoli-Alzela 定理可知,G^q 是紧的;另外,当 $q\to\infty$,在 $B_\mu(\mathbf{R},\mathbf{R}^3)$ 中,有 $G^q\to G$,因此,当 $q\to\infty$ 时,有:

$$\sup_{\xi\in\mathbf{R}}|G^q(\omega,\varphi,\psi)(\xi)-G(\omega,\varphi,\psi)(\xi)|e^{-\mu|\xi|}=$$

$$\sup_{q\in(-\infty,-q)\cup(q,\infty)}|G^q(\omega,\varphi,\psi)(\xi)-G(\omega,\varphi,\psi)(\xi)|e^{-\mu|\xi|}\leqslant2(M_2+M_3)e^{-\mu q}\to0。$$

对任意的 $(\omega,\varphi,\psi)\in\Gamma((\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi}),(\overline{\omega},\overline{\varphi},\overline{\psi}))$,由文献[13]中的命题 2.12 知:$G(\Gamma((\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi}),(\overline{\omega},\overline{\varphi},\overline{\psi})))\subset\Gamma((\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi}),(\overline{\omega},\overline{\varphi},\overline{\psi}))$ 在 $|\cdot|_\mu$ 范数意义下是紧的。 证毕

引理 8 假设(A1)、(A2)和(PQM)成立,由引理 2~7 可知。如果系统(6)有一对满足(P1)~(P3)的上下解 $(\underline{\omega}(\xi),\underline{\varphi}(\xi),\underline{\psi}(\xi))$ 和 $(\overline{\omega}(\xi),\overline{\varphi}(\xi),\overline{\psi}(\xi))$,则系统(5)的行波解存在。

3.2 模型(5)行波解的存在性

结合引理 8,构造一对满足条件(P1)~(P3)的上下解 $\underline{\Phi}(\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi})$ 和 $\overline{\Psi}(\overline{\omega},\overline{\varphi},\overline{\psi})$,以保证系统(6)行波解的存在性。令 $c>c^*$,经过简单计算,可得 $c^*=2\sqrt{(\gamma+d+m+\alpha)(R_0-1)}$。存在 $\eta_r>0(r=1,2,3)$,使得:

$$\begin{cases} D\eta_1^2 - c\eta_1 + \alpha\dfrac{M_2}{M_1} - d = 0 \\ D\eta_2^2 - c\eta_2 + \beta Y - (\gamma + d + m + \alpha) = 0, \\ D\eta_3^2 - c\eta_3 + \gamma\dfrac{M_2}{M_3} - d = 0 \end{cases} \tag{16}$$

其中：$Y>0$ 是系统(6)的第二个方程在平衡点(0,0,0)处线性化后所对应的系数。

当 $R_0>1$ 时，存在 $\varepsilon_l>0(l=1,2,3,\cdots,6)$ 满足 $\varepsilon_{1,2}\in(0,k_1)$，$\varepsilon_{3,4}\in(0,k_2)$，$\varepsilon_{5,6}\in(0,k_3)$，使得：

$$\alpha(k_2+\varepsilon_3)-d(k_1+\varepsilon_1)<0, \tag{17}$$

$$\gamma(k_2+\varepsilon_3)-d(k_3+\varepsilon_5)<0, \tag{18}$$

$$\alpha(k_2-\varepsilon_4)-d(k_1-\varepsilon_2)>0, \tag{19}$$

$$\gamma(k_2-\varepsilon_4)-d(k_3-\varepsilon_6)>0, \tag{20}$$

$$\beta g\left(\frac{A}{d}-(k_1-\varepsilon_2)-(k_2+\varepsilon_3)-(k_3-\varepsilon_6)\right)<\gamma+d+m+\alpha, \tag{21}$$

$$\beta g\left(\frac{A}{d}-(k_1+\varepsilon_1)-(k_2-\varepsilon_4)-(k_3+\varepsilon_5)\right)>\gamma+d+m+\alpha。 \tag{22}$$

因此，定义如下的连续函数 $\underline{\Phi}(\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi})$ 和 $\overline{\Psi}(\overline{\omega},\overline{\varphi},\overline{\psi})$：

$$\overline{\omega}(\xi)=\begin{cases}k_1\mathrm{e}^{\eta_1\xi},\xi\leqslant\xi_1\\ k_1+\varepsilon_1\mathrm{e}^{-\lambda\xi},\xi>\xi_1\end{cases},\underline{\omega}(\xi)=\begin{cases}0,\xi\leqslant\xi_2\\ k_1-\varepsilon_2\mathrm{e}^{-\lambda\xi},\xi>\xi_2\end{cases},\overline{\varphi}(\xi)=\begin{cases}k_2\mathrm{e}^{\eta_2\xi},\xi\leqslant\xi_3\\ k_2+\varepsilon_3\mathrm{e}^{-\lambda\xi},\xi>\xi_3\end{cases},$$

$$\underline{\varphi}(\xi)=\begin{cases}0,\xi\leqslant\xi_4\\ k_2-\varepsilon_4\mathrm{e}^{-\lambda\xi},\xi>\xi_4\end{cases},\overline{\psi}(\xi)=\begin{cases}k_3\mathrm{e}^{\eta_3\xi},\xi\leqslant\xi_5\\ k_3+\varepsilon_5\mathrm{e}^{-\lambda\xi},\xi>\xi_5\end{cases},\underline{\psi}(\xi)=\begin{cases}0,\xi\leqslant\xi_6\\ k_3-\varepsilon_6\mathrm{e}^{-\lambda\xi},\xi>\xi_6\end{cases}。$$

其中：$\xi_1,\xi_3,\xi_5>0$，$\xi_2,\xi_4,\xi_6<0$ 且 $\lambda>0$ 是一个充分小的常数。当 $\lambda>0$ 充分小，且 $\xi_1>0,\xi_3>0,\xi_5>0$ 满足：

$$k_1+\varepsilon_1>M_1=\sup_{\xi\in\mathbf{R}}\overline{\omega}(\xi)=k_1\mathrm{e}^{\eta_1\xi}>k_1,k_2+\varepsilon_3>M_2=\sup_{\xi\in\mathbf{R}}\overline{\varphi}(\xi)=k_2\mathrm{e}^{\eta_2\xi}>k_2,$$

$$k_3+\varepsilon_5>M_3=\sup_{\xi\in\mathbf{R}}\overline{\psi}(\xi)=k_3\mathrm{e}^{\eta_3\xi}>k_3。$$

接下来，证明前文所定义的上下解 $\underline{\Phi}(\underline{\omega},\underline{\varphi},\underline{\psi})$ 和 $\overline{\Psi}(\overline{\omega},\overline{\varphi},\overline{\psi})$ 是系统(6)的上下解。

引理 9　$\Phi(\xi)=(\underline{\omega}(\xi),\underline{\varphi}(\xi),\underline{\psi}(\xi))$ 是系统(6)的一个下解。

证明　当 $\xi\leqslant\xi_1$ 时，$\overline{\omega}(\xi)=k_1\mathrm{e}^{\eta_1\xi}$ 且 $\overline{\varphi}(\xi)=k_2\mathrm{e}^{\eta_2\xi}$，则由(11)式可得：

$$D\omega''(\xi)-c\omega'(\xi)+\alpha\varphi(\xi)-d\omega(\xi)=\left(D\eta_1^2-c\eta_1+\alpha\frac{k_2\mathrm{e}^{\eta_2\xi}}{k_1\mathrm{e}^{\eta_1\xi}}-d\right)k_1\mathrm{e}^{\eta_1\xi}\leqslant\left(\eta_1^2-c\eta_1+\alpha\frac{M_2}{M_1}-d\right)k_1\mathrm{e}^{\eta_1\xi}=0,$$

当 $\xi>\xi_1$ 时，$\overline{\omega}(\xi)=k_1+\varepsilon_1\mathrm{e}^{-\lambda\xi}$，$\overline{\varphi}(\xi)=k_2+\varepsilon_3\mathrm{e}^{-\lambda\xi}$ 有：

$P_1(\xi)=D\omega''(\xi)-c\omega'(\xi)+\alpha\varphi(\xi)-d\omega(\xi)=(D\varepsilon_1\lambda^2+c\varepsilon_1\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda\xi}-d(k_1+\varepsilon_1\mathrm{e}^{-\lambda\xi})+\alpha(k_2+\varepsilon_3\mathrm{e}^{-\lambda\xi})=I_1(\lambda)$，

由(17)式可得 $I_1(0)=-d(k_1+\varepsilon_1)+\alpha(k_2+\varepsilon_3)<0$，且存在 $\lambda_1^*>0$，对任意的 $\lambda\in(0,\lambda_1^*)$ 都有 $P_1(\xi)<0$。

当 $\xi\leqslant\xi_3$ 时，$\overline{\varphi}(\xi)=k_2\mathrm{e}^{\eta_2\xi}$，$\overline{\omega}(\xi)=k_1\mathrm{e}^{\eta_1\xi}$，$\overline{\psi}(\xi)=k_3\mathrm{e}^{\eta_3\xi}$，则有：

$$D\varphi''(\xi)-c\varphi'(\xi)+\beta g\left(\frac{A}{d}-\omega(\xi)-\varphi(\xi)-\psi(\xi)\right)\varphi(\xi)-(\gamma+d+m+\alpha)\varphi(\xi)\leqslant$$
$$[D\eta_2^2-c\eta_2+\beta Y-(\gamma+d+m+\alpha)]k_2\mathrm{e}^{\eta_2\xi}=0。$$

当 $\xi>\xi_3$ 时，$\overline{\varphi}(\xi)=k_2+\varepsilon_3\mathrm{e}^{-\lambda\xi}$，$\underline{\omega}(\xi)=k_1-\varepsilon_2\mathrm{e}^{-\lambda\xi}$，$\underline{\psi}(\xi)=k_3-\varepsilon_6\mathrm{e}^{-\lambda\xi}$，有：

$$P_2(\xi)=D\varphi''(\xi)-c\varphi'(\xi)+\beta g\left(\frac{A}{d}-\omega(\xi)-\varphi(\xi)-\psi(\xi)\right)\varphi(\xi)-(\gamma+d+m+\alpha)\varphi(\xi)=$$
$$(D\varepsilon_3\lambda^2+c\varepsilon_3\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda\xi}+\beta g\left(\frac{A}{d}-(k_1-\varepsilon_2)\mathrm{e}^{-\lambda\xi}-(k_2+\varepsilon_3)\mathrm{e}^{-\lambda\xi}-(k_3-\varepsilon_6)\mathrm{e}^{-\lambda\xi}\right)(k_2+\varepsilon_3\mathrm{e}^{-\lambda\xi})-$$
$$(\gamma+d+m+\alpha)(k_2+\varepsilon_3\mathrm{e}^{-\lambda\xi})=I_2(\lambda)。$$

由(21)式可得 $I_2(0)=\beta g\left(\dfrac{A}{d}-k_1+\varepsilon_2-k_2-\varepsilon_3-k_3+\varepsilon_6\right)(k_2+\varepsilon_3)-(\gamma+d+m+\alpha)(k_2+\varepsilon_3)<0$，且存在 $\lambda_2^*>0$，对任意的 $\lambda\in(0,\lambda_2^*)$ 都有 $P_2(\xi)<0$。

当 $\xi\leqslant\xi_5$ 时，$\overline{\psi}(\xi)=k_3\mathrm{e}^{\eta_3\xi}$，$\overline{\varphi}(\xi)=k_2\mathrm{e}^{\eta_2\xi}$，有：

$$D\psi''(\xi)-c\psi'(\xi)+\gamma\varphi(\xi)-d\psi(\xi)=(D\eta_3^2-c\eta_3-d)k_3\mathrm{e}^{\eta_3\xi}+\gamma k_2\mathrm{e}^{\eta_2\xi}\leqslant\left(D\eta_3^2-c\eta_3-d+\gamma\frac{M_2}{M_3}\right)k_3\mathrm{e}^{\eta_3\xi}=0。$$

当 $\xi>\xi_5$ 时,$\bar{\psi}(\xi)=k_3+\varepsilon_5\mathrm{e}^{-\lambda\xi}$,$\bar{\varphi}(\xi)=k_2+\varepsilon_3\mathrm{e}^{-\lambda\xi}$,有:

$$P_3(\xi)=D\psi''(\xi)-c\psi'(\xi)+\gamma\varphi(\xi)-d\psi(\xi)=D\varepsilon_5\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda\xi}+c\lambda\varepsilon_5\mathrm{e}^{-\lambda\xi}+\gamma(k_2+\varepsilon_3\mathrm{e}^{-\lambda\xi})-d(k_3+\varepsilon_5\mathrm{e}^{-\lambda\xi})=$$
$$(D\varepsilon_5\lambda^2+c\lambda\varepsilon_5)\mathrm{e}^{-\lambda\xi}+\gamma(k_2+\varepsilon_3\mathrm{e}^{-\lambda\xi})-d(k_3+\varepsilon_5\mathrm{e}^{-\lambda\xi})=I_3(\lambda);$$

由(18)式可得 $I_3(0)=\gamma(k_2+\varepsilon_3)-d(k_3+\varepsilon_5)<0$,且存在 $\lambda_3^*>0$,对任意的 $\lambda\in(0,\lambda_3^*)$ 都有 $P_3(\xi)<0$。 证毕

引理 10 $\Psi(\xi)=(\bar{\omega}(\xi),\bar{\varphi}(\xi),\bar{\psi}(\xi))$ 是系统(6)的一个上解。

证明 当 $\xi\leqslant\xi_2$ 时,$\underline{\omega}(\xi)=0$,则由(16)式可得 $D\omega''(\xi)-c\omega'(\xi)+\alpha\varphi(\xi)-d\omega(\xi)=\alpha\varphi(\xi)\geqslant0$;

当 $\xi>\xi_2$ 时,$\underline{\omega}(\xi)=k_1-\varepsilon_2\mathrm{e}^{-\lambda\xi}$,$\underline{\varphi}(\xi)=k_2-\varepsilon_4\mathrm{e}^{-\lambda\xi}$,有:

$$Q_1(\xi)=D\omega''(\xi)-c\omega'(\xi)+\alpha\varphi(\xi)-d\omega(\xi)=-(D\varepsilon_2\lambda^2+c\varepsilon_2\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda\xi}-d(k_1-\varepsilon_2\mathrm{e}^{-\lambda\xi})+\alpha(k_2-\varepsilon_4\mathrm{e}^{-\lambda\xi})=I_4(\lambda)。$$

由(19)式可得 $I_4(0)=-d(k_1-\varepsilon_2)+\alpha(k_2-\varepsilon_4\mathrm{e})>0$,且存在 $\lambda_4^*>0$,对任意的 $\lambda\in(0,\lambda_4^*)$ 都有 $Q_1(\xi)>0$。

当 $\xi\leqslant\xi_4$ 时,$\underline{\varphi}(\xi)=0$,则有:

$$D\varphi''(\xi)-c\varphi'(\xi)+\beta g\left(\frac{A}{d}-\omega(\xi)-\varphi(\xi)-\psi(\xi)\right)\varphi(\xi)-(\gamma+d+m+\alpha)\varphi(\xi)=0。$$

当 $\xi>\xi_4$ 时,$\underline{\varphi}(\xi)=k_2-\varepsilon_4\mathrm{e}^{-\lambda\xi}$,$\bar{\omega}(\xi)=k_1+\varepsilon_1\mathrm{e}^{-\lambda\xi}$,$\bar{\psi}(\xi)=k_3+\varepsilon_5\mathrm{e}^{-\lambda\xi}$,有:

$$Q_2(\xi)=D\varphi''(\xi)-c\varphi'(\xi)+\beta g\left(\frac{A}{d}-\omega(\xi)-\varphi(\xi)-\psi(\xi)\right)\varphi(\xi)-(\gamma+d+m+\alpha)\varphi(\xi)=$$
$$-(D\varepsilon_3\lambda^2+c\varepsilon_3\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda\xi}+\beta g\left(\frac{A}{d}-(k_2-\varepsilon_4)\mathrm{e}^{-\lambda\xi}-(k_1+\varepsilon_1)\mathrm{e}^{-\lambda\xi}-(k_3+\varepsilon_5)\mathrm{e}^{-\lambda\xi}\right)(k_2-\varepsilon_4)\mathrm{e}^{-\lambda\xi}-$$
$$(\gamma+d+m+\alpha)(k_2-\varepsilon_4)\mathrm{e}^{-\lambda\xi}=I_5(\lambda)。$$

由(22)式可得 $I_5(0)=\beta g\left(\frac{A}{d}-(k_2-\varepsilon_4)-(k_1+\varepsilon_1)-(k_3+\varepsilon_5)\right)(k_2-\varepsilon_4)-(\gamma+d+m+\alpha)(k_2-\varepsilon_4)>0$,且存在 $\lambda_5^*>0$,对任意的 $\lambda\in(0,\lambda_5^*)$ 都有 $Q_2(\xi)>0$。

当 $\xi\leqslant\xi_6$ 时,$\underline{\psi}(\xi)=0$,有 $D\psi''(\xi)-c\psi'(\xi)-d\psi(\xi)+\gamma\varphi(\xi)=\gamma\varphi(\xi)\geqslant0$。

当 $\xi>\xi_6$ 时,$\underline{\psi}(\xi)=k_3-\varepsilon_6\mathrm{e}^{-\lambda\xi}$,$\underline{\varphi}(\xi)=k_2-\varepsilon_4\mathrm{e}^{-\lambda\xi}$,有:

$$Q_3(\xi)=D\psi''(\xi)-c\psi'(\xi)+\gamma\varphi(\xi)-d\psi(\xi)=-(D\varepsilon_5\lambda^2+c\lambda\varepsilon_5)\mathrm{e}^{-\lambda\xi}+\gamma(k_2-\varepsilon_4\mathrm{e}^{-\lambda\xi})-d(k_3-\varepsilon_6)\mathrm{e}^{-\lambda\xi}=I_6(\lambda);$$

由(20)式得 $I_6(0)=P_3(\xi)=\gamma(k_2-\varepsilon_4)-d(k_3-\varepsilon_6)>0$,且存在 $\lambda_6^*>0$,对任意 $\lambda\in(0,\lambda_6^*)$ 有 $Q_3(\xi)>0$。 证毕

由引理1、引理9和引理10可得,当 $R_0>1$ 时,对任意的 $c>c^*$,系统(5)有连接衡点(0,0,0)和 (k_1,k_2,k_3) 的行波解。

定理 3 当 $R_0>1$ 时,对任意的 $c>c^*$,系统(3)有连接无病平衡点 $E_0\left(\frac{A}{d},0,0\right)$ 和地方病平衡点 $E^*(S^*,I^*,R^*)$ 的行波解,其中:$c^*=2\sqrt{(\gamma+d+m+\alpha)(R_0-1)}$。

4 结论

本文在考虑因病死亡率的情况下,讨论了一类由SIR和SIS组合的传染病模型行波解的存在性。首先,通过分析相应的特征方程,讨论系统(3)无病平衡点 E_0 和地方病平衡点 E^* 在一定条件下的稳定性。其次,利用Schauder不动点定理构造上下解,将行波解的存在性转化为一对上下解的存在性问题。通过构造一对合适的上下解,推导出系统(3)有连接无病平衡点 E_0 和地方病平衡点 E^* 的行波解。

参考文献:

[1] 马知恩,周义仓,王稳地,等.传染病动力学的数学建模与研究[M].北京:科学出版社,2004.
MA Z E,ZHOU Y C,WANG W D,et al. Mathematical modeling and research on dynamics of infectious diseases[M]. Beijing: Science Press,2004.

[2] 霍罡,靳祯,张芬芬.一类S-I传染病模型行波解的存在性[J].生物数学学报,2008,23(4):661-667.
HUO G,JIN Z,ZHANG F F. Travelling wave solutions in a type of SI epidemic model with diffusion[J]. Journal of Biomathematics,2008,23(4):661-667.

[3] 叶其孝,李正元.反应扩散方程引论[M].北京:科学出版社,1985.
YE Q X,LI Z Y. Introduction to reaction diffusion equation[M]. Beijing:Science Press,1985.

[4] MA S W. Traveling wave fronts for delayed reaction-diffusion systems via a fixed point theorem[J]. Journal of Differential Equations, 2001, 171(2): 294-314.

[5] 王明新. 抛物型方程的初边值问题[M]. 北京:科学出版社, 1993.
WANG M X. Initial boundary value problems for parabolic equations[M]. Beijing: Science Press, 1993.

[6] GAN Q T, XU R, YANG P H. Travelling waves of a delayed SIRS epidemic model with spatial diffusion[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2011, 12(1): 52-68.

[7] LI K, LI X. Travelling wave solutions in diffusive and competition-cooperation systems with delays[J]. IMA Journal of Applied Mathematics, 2009, 74(4): 604-621.

[8] HONG K, WENG P X. Stability and traveling waves of a stage-structured predator-prey model with Holling type-II functional response and harvesting[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2013, 14(1): 83-103.

[9] 刘晓宇, 吕琳. 一类 SIR 和 SIS 组合的复杂金融网络风险传染模型稳定性分析[J]. 东北农业大学学报(社会科学版), 2018, 16(2): 34-39.
LIU X Y, LÜ L. Stability analysis of a risk contagion model of complex financial network with SIR and SIS[J]. Journal of Northeast Agricultural University (Social Science Edition), 2018, 16(2): 34-39.

[10] WANG W D, RUAN S G. Bifurcations in an epidemic model with constant removal rate of the infectives[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2004: 775-793.

[11] 许必熙, 辅小荣, 陈小惠. 自动控制原理[M]. 南京:东南大学出版社, 2007.
XU B X, FU X R, CHEN X H. Principle of automatic control[M]. Nanjing: Southeast University Press, 2007.

[12] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义[M]. 北京:北京大学出版社, 2015.
ZHANG G Q, LIN Y Q. Handout of functional analysis[M]. Beijing: Beijing University Press, 2015.

[13] ZEIDLER E. Nonlinear functional analysis and its applications I: fixed-point theorems[M]. New York: Springer-Verlag, 1986.

The Existence of Travelling Wave Solutions in a Type of Combined SIR and SIS Infectious Disease Model

YANG Sanyan, LI Shumin

(College of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China)

Abstract: [**Purposes**] In order to study the existence of travelling wave solutions in a three-dimensional infectious disease model composed of SIR and SIS. [**Methods**] The stabilities, under certain conditions, of disease-free equilibrium point and endemic disease equilibrium point in this model are discussed by means of Routh-Hurwitz criterion. Moreover, using Schauder fixed point theorem, the existence of travelling wave solutions connecting those two equilibrium points is investigated via constructing appropriate upper-lower solutions. [**Findings**] When $R_0>1$, for any $c>c^*$, there exists travelling wave solution with the minimum wave speed c^*, which connect the disease-free equilibrium point and endemic equilibrium point in the epidemic model. [**Conclusions**] The existence of travelling wave solutions in this infectious disease model has been verified.

Keywords: travelling wave solution; locally asymptotic stability; Schauder fixed point theorem; upper-lower solution; minimum wave speed

(责任编辑　黄　颖)