

# 转移速率部分未知的模糊广义 Markov 跳变系统的稳定性<sup>\*</sup>

郑佳丽, 罗洪林

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

**摘要:**【目的】为了得到时变时滞 T-S 模糊随机广义系统的稳定性与耗散性, 建立一个符合现实情况的 Markov 跳变系统。【方法】设计一个积分型滑动曲面函数, 选择一个适当的 Lyapunov 函数, 通过线性矩阵不等式技术, 得到系统的稳定性。通过运用加减项的等价处理方法, 得到的结果降低了保守性。通过对滑模动力学的分析, 设计一个滑模控制器。针对匹配不确定性上界未知的情况, 设计一个自适应滑模控制器。【结果】在转移速率不完全已知的情况下得到系统的随机容许性条件并且系统受限于滑动曲面具有良好的稳定性和耗散性。在有限时间内系统的状态轨迹驱动到预先定义的滑动曲面并保持运动。【结论】数值实验结果表明该方法是有效的。

**关键词:** T-S 模糊模型; Markov 跳变系统; 耗散性; 转移速率

**中图分类号:** O231.2; O231.3

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1672-6693(2021)04-0057-12

广义系统也称为奇异系统、半状态系统, 它可以自然地描述工程系统、电力系统和经济系统<sup>[1]</sup>等, 它不仅存在于状态空间系统中的有限动力模态, 还包含在脉冲模态和非动力模态中, 这使得对它们的分析更加复杂<sup>[2]</sup>。然而, 在实际的控制过程中经常含有不确定性、时滞和不同程度的非线性, 因此, 难以建立精确的数学模型, 且分析过程比线性情况更复杂。有鉴于此, 最近有学者提出了 Takagi-Sugeno(T-S)模糊模型方法<sup>[3]</sup>来处理复杂的非线性系统。该方法取得了巨大成果, T-S 模糊广义系统的性能由此也受到了广泛地关注<sup>[4-6]</sup>。

另一方面, 日趋复杂的自动控制系统在长时间工作中, 广义系统的结构和参数可能会发生突变。突变可能来自参数的随机跳变, 严重降低系统性能, 甚至导致不稳定<sup>[7]</sup>。针对这一现象, Krasovskii 等人<sup>[8]</sup>建立了最早的 Markov 跳变模型。广义 Markov 跳变系统是一类特殊的随机混杂系统, 具有较好地描述具有突变的物理系统的优点, 在控制和通信领域有着成功的应用, 如直流电机、电路和生产系统等<sup>[9-10]</sup>。最近, Gao 等人<sup>[11]</sup>研究了具有转移概率完全已知的广义 Markov 跳变系统的稳定性问题。Mathiyalagan 等人<sup>[12]</sup>研究了一类转移概率完全已知的离散时间 Markov 网络化系统的鲁棒混合  $H_\infty$  滤波和无源性问题。Chen 等人<sup>[13]</sup>讨论了具有时变时滞的非脆弱模糊广义 Markov 跳变系统的耗散控制问题。利用 Lyapunov-Krasovskii 函数和互凸组合引理, 得到了系统稳定的充分条件。

以上关于模糊广义 Markov 跳变系统的结果大多数是基于转移概率完全已知的假设条件, 而这一假设在实际应用中很难获得完整的信息。因此, 许多学者研究了关于部分转移概率未知的 Markov 跳变系统<sup>[14-17]</sup>。Zhang 等人<sup>[15]</sup>对部分未知转移概率的马尔可夫跳跃系统的稳定性进行了研究。赵霞等人<sup>[16]</sup>研究了一类部分未知转移概率的非线性马尔可夫跳变系统的  $H_\infty$  控制问题。但关于具有时变的部分转移概率未知的模糊 Markov 跳变系统的研究工作还比较少, 基于此, 本文以跳变系统为研究对象, 研究转移速率不完全已知的时滞 T-S 模糊随机广义 Markov 跳变系统的稳定性与耗散性。对于给定的模糊随机广义 Markov 跳变系统, 为了更好地适应模型的特点, 避免输入矩阵的约束, 设计了一种具有变时滞的模糊积分曲面函数, 假设转移概率部分未知, 利用添减项的方法, 得到了滑模控制系统的可容许性和耗散性。最后考虑到匹配不确定性上界未知的情况, 设计了一个自适应滑模控制器, 以保证在存在匹配不确定性和干扰信号的情况下滑模运动的可达性。

\* 收稿日期: 2020-09-26 修回日期: 2020-11-13 网络出版时间: 2021-06-30 10:29

资助项目: 国家自然科学基金(No. 11601050; No. 11771064); 重庆市科学技术委员会基础研究与前沿探索项目(No. cstc2016jcyjA0116)

第一作者简介: 郑佳丽, 女, 研究方向为最优控制, E-mail: 136542894@qq.com; 通信作者: 罗洪林, 男, 教授, 博士, E-mail: luohonglin@cqnu.edu.cn

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20210629.1757.002.html>

## 1 系统描述

考虑如下具有时滞的 T-S 模糊模型随机广义 Markov 跳变系统。

模糊规则为  $i$ : 若  $\theta_1(t)$  是  $M_{i1} \cdots$  且  $\theta_p(t)$  是  $M_{ip}$ , 则有:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{A}}_i(r_t)\mathbf{x}(t) + \bar{\mathbf{A}}_{di}(r_t)\mathbf{x}(t-d(t)) + \mathbf{B}_i(r_t)(\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-d(t)))) + \mathbf{B}_{wi}\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{z}(t) = \bar{\mathbf{C}}_i(r_t)\mathbf{x}(t) + \bar{\mathbf{C}}_{di}(r_t)\mathbf{x}(t-d(t)) + \mathbf{D}_{wi}\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{x}(t) = \varphi(t) \end{cases}, i \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

其中:  $M_{i1}, M_{i2}, \dots, M_{ip}$  是模糊集,  $\boldsymbol{\theta}(t) = [\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_p(t)]$  是前件变量,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$  是状态向量,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$  是控制输入,  $\mathbf{w}(t) \in \mathbf{R}^q$  是干扰信号且属于  $L_2[0, \infty)$ ,  $\mathbf{z}(t) \in \mathbf{R}^p$  是控制输出,  $\varphi(t) \in [-d, 0]$  是已知相容的初始函数,  $d(t)$  是变时滞且  $0 \leq d(t) \leq d$  ( $d$  为已知常数),  $\dot{d}(t) \leq \mu$ , 矩阵  $\mathbf{E} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  是奇异矩阵,  $\text{rank}(\mathbf{E}) = r \leq n$ 。

令  $\{r_t, t \geq 0\}$  是一个连续时间离散状态的带有右连续轨迹的 Markov 过程, 它在一个有限的集合中取值, 即  $r_t \in \mathbf{N}$ 。后面概率转移矩阵  $\boldsymbol{\Pi} = (\pi_{pq})_{n \times n}$  满足  $\Pr\{r_{t+\Delta} = q | r_t = p\} = \begin{cases} \pi_{pq}\Delta + o(\Delta), q \neq p \\ 1 + \pi_{pp}\Delta + o(\Delta), q = p \end{cases}$ , 其中:  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left( \frac{o(\Delta)}{\Delta} \right) = 0$  ( $\Delta > 0$ ),  $\pi_{pq}$  表示从  $t$  时刻的模式  $p$  到  $t + \Delta$  时刻的模式  $q$  的转移概率。当  $p \neq q$  时,  $\pi_{pq} \geq 0$ ; 当  $p = q$  时,  $\pi_{pp} =$

$$-\sum_{q=1, q \neq p}^N \pi_{pq} (p, q \in \mathbf{N}).$$

(1) 式中:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}_i(r_t) &= \mathbf{A}_i(r_t) + \Delta \mathbf{A}_i(t, r_t), \bar{\mathbf{A}}_{di}(r_t) = \mathbf{A}_{di}(r_t) + \Delta \mathbf{A}_{di}(t, r_t), \\ \bar{\mathbf{C}}_i(r_t) &= \mathbf{C}_i(r_t) + \Delta \mathbf{C}_i(t, r_t), \bar{\mathbf{C}}_{di}(r_t) = \mathbf{C}_{di}(r_t) + \Delta \mathbf{C}_{di}(t, r_t). \end{aligned}$$

为了方便书写, 记:

$$\mathbf{A}_i(r_t) = \mathbf{A}_{pi}, \Delta \mathbf{A}_i(t, r_t) = \Delta \mathbf{A}_{pi}, \mathbf{A}_{di}(r_t) = \mathbf{A}_{pdi}, \Delta \mathbf{A}_{di}(t, r_t) = \Delta \mathbf{A}_{pdi}, \mathbf{C}_i(r_t) = \mathbf{C}_{pi}, \Delta \mathbf{C}_i(t, r_t) = \Delta \mathbf{C}_{pi},$$

$$\mathbf{C}_{di}(r_t) = \mathbf{C}_{pdi}, \Delta \mathbf{C}_{di}(t, r_t) = \Delta \mathbf{C}_{pdi}, \mathbf{B}_i(r_t) = \mathbf{B}_{pi}, \bar{\mathbf{A}}_i(r_t) = \bar{\mathbf{A}}_{pi}, \bar{\mathbf{A}}_{di}(r_t) = \bar{\mathbf{A}}_{pdi}, \bar{\mathbf{C}}_i(r_t) = \bar{\mathbf{C}}_{pi}, \bar{\mathbf{C}}_{di}(r_t) = \bar{\mathbf{C}}_{pdi}.$$

其中:  $\mathbf{A}_{pi}, \mathbf{A}_{pdi}, \mathbf{C}_{pi}, \mathbf{C}_{pdi}, \mathbf{B}_{pi}, \mathbf{B}_{wi}, \mathbf{D}_{wi}$  是具有适当维数的已知常矩阵,  $\Delta \mathbf{A}_{pi}, \Delta \mathbf{A}_{pdi}, \Delta \mathbf{C}_{pi}, \Delta \mathbf{C}_{pdi}$  是描述系统未知的不

匹配不确定性矩阵, 它满足:  $\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{A}_{pi} & \Delta \mathbf{A}_{pdi} \\ \Delta \mathbf{C}_{pi} & \Delta \mathbf{C}_{pdi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{pi} \\ \mathbf{M}_{pdi} \end{bmatrix} \mathbf{F}(t) \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{pi} & \mathbf{N}_{pdi} \end{bmatrix}$ , 式中:  $\mathbf{M}_{pi}, \mathbf{M}_{pdi}, \mathbf{N}_{pi}, \mathbf{N}_{pdi}$  是具有适当维数

的常数矩阵,  $\mathbf{F}(t)$  是未知的时变矩阵, 满足  $\mathbf{F}^T(t) \mathbf{F}(t) \leq \mathbf{I}$ 。  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-d(t))) \in \mathbf{R}^m$  是描述系统的匹配不确定性满足  $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-d(t)))\| \leq \kappa_1 \|\mathbf{x}(t)\| + \kappa_2 \|\mathbf{x}(t-d(t))\|$ 。其中:  $\kappa_1 > 0, \kappa_2 > 0$  是已知的标量。

采用模糊推理方法, 即使用单点模糊化和中心平均解模糊器, 模糊系统(1)可以更简洁地表示为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) [\bar{\mathbf{A}}_{pi}\mathbf{x}(t) + \bar{\mathbf{A}}_{pdi}\mathbf{x}(t-d(t)) + \mathbf{B}_{pi}(\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-d(t)))) + \mathbf{B}_{wi}\mathbf{w}(t)] \\ \mathbf{z}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) [\bar{\mathbf{C}}_{pi}\mathbf{x}(t) + \bar{\mathbf{C}}_{pdi}\mathbf{x}(t-d(t)) + \mathbf{D}_{wi}\mathbf{w}(t)] \\ \mathbf{x}(t) = \varphi(t) \end{cases}, i \in \mathbf{R}. \quad (2)$$

其中:  $h_i(\theta(t)) = \frac{\prod_{j=1}^n M_{ij}(\theta_j(t))}{\sum_{l=1}^r \prod_{j=1}^n M_{lj}(\theta_j(t))}$ ,  $M_{ij}(\theta_j(t))$  是  $\theta_j(t)$  在  $M_{ij}$  的隶属度。对于所有  $t$  有  $h_i(\theta(t)) \geq 0$ ,

$$\sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) = 1.$$

此外, 本文考虑跳跃过程的转移概率是部分未知的。例如, 对于具有  $N$  个操作模式的系统(2), 转移概率矩

阵可定义为  $\boldsymbol{\Pi} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \lambda & \lambda & \cdots & \pi_{1N} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \lambda & \cdots & \pi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda & \pi_{N2} & \lambda & \cdots & \pi_{NN} \end{bmatrix}$ , 其中:  $\lambda$  表示未知的转移速率。对  $\forall p \in \mathbf{N}, \mathbf{N} = \mathbf{N}_k^p + \mathbf{N}_{\text{unk}}^p$ , 且  $\mathbf{N}_k^p \in \{q:$

$\pi_{pq}$  已知,  $q \in \mathbf{N}$ ,  $\mathbf{N}_{pk}^p \in \{q; \pi_{pq} \text{ 未知}, q \in \mathbf{N}\}$ 。

**注 1** 在现有文献中,跳变过程  $\{r_i, t \geq 0\}$  的有效性通常被假设为完全已知 ( $\mathbf{N}_{ik}^p = \emptyset, \mathbf{N}_k^p = \mathbf{N}$ ) 或完全未知 ( $\mathbf{N}_k^p = \emptyset, \mathbf{N}_{ik}^p = \mathbf{N}$ )。但在控制系统中,转移速率的信息很难测量,这使得信息具有不完整性,也不够精准,导致设计的控制器无法镇定实际系统。因此,这里考虑转移概率矩阵是 Markov 跳变系统的一个更自然的假设。

为了方便后面的研究,首先给出下面几个定义和引理。

**定义 1**<sup>[18]</sup> 对于一个非受迫广义时滞 Markov 跳变系统:

$$\begin{cases} \mathbf{E} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{pd} \mathbf{x}(t-d(t)) \\ \mathbf{x}(t) = \varphi(t), t \in [-d, 0], d > 0 \end{cases}, \quad (3)$$

1) 如果  $(\mathbf{E}, \mathbf{A}_p)$  与  $(\mathbf{E}, \mathbf{A}_p + \mathbf{A}_{pd})$  是正则的、无脉冲的,则系统(3)是正则的、无脉冲的。

2) 若对于任意初始量  $r_0$ , 存在一个标量  $\psi(\varphi, d, r_0) > 0$ , 使得  $\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon \left\{ \int_0^t \|\mathbf{x}(t)\|^2 dt \right\} \leq \psi(\varphi, d, r_0)$ , 则系统(3)是随机稳定的。

3) 若同时满足 1) 和 2), 则系统(3)是随机容许的。

**定义 2**<sup>[19]</sup> 对于任意的  $\gamma > 0$ , 在零初始状态下, 如果以下不等式成立:

$$\epsilon \left\{ \int_0^t \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{Y} \\ * & \mathbf{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix} dt \right\} \geq \gamma \epsilon \left\{ \int_0^t \mathbf{w}(t)^T \mathbf{w}(t) dt \right\}.$$

其中:  $\mathbf{Z}, \mathbf{Y}, \mathbf{X}$  是具有适当维数的实矩阵,  $\mathbf{Z} \leq 0, \mathbf{Z}, \mathbf{X}$  为对称矩阵,  $*$  表示对称的项。则系统(2)称为严格  $(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}, \mathbf{X})$ - $\gamma$  耗散的。

**引理 1**<sup>[20]</sup> 对于任意常数矩阵  $\mathbf{O} > 0$ , 任意标量  $d_1, d_2 (0 < d_1 < d_2)$  和向量函数  $\mathbf{x}(t): [-d_2, -d_1] \rightarrow \mathbf{R}^n$  满足不等式:  $-\bar{d} \int_{t-d_2}^{t-d_1} \mathbf{x}^T(\theta) \mathbf{O} \mathbf{x}(\theta) d\theta \leq - \left( \int_{t-d_2}^{t-d_1} \mathbf{x}(\theta) d\theta \right)^T \mathbf{O} \left( \int_{t-d_2}^{t-d_1} \mathbf{x}(\theta) d\theta \right)$ , 其中  $\bar{d} = d_2 - d_1$ 。

**引理 2**<sup>[21]</sup> 若  $\mathbf{M}, \mathbf{N}$  具有适当维数的实矩阵, 则对于任意矩阵  $\mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X} \leq \mathbf{I})$  和标量  $\epsilon > 0$ , 使得  $\text{sym}(\mathbf{M} \mathbf{X} \mathbf{N}) \leq \epsilon^{-1} \mathbf{M} \mathbf{M}^T + \epsilon \mathbf{N}^T \mathbf{N}$  成立。

## 2 主要结果

本节将讨论时变时滞随机广义 Markov 跳变系统的滑模控制问题。首先构造一个积分型模糊滑动曲面, 然后给出系统具有随机容许性和耗散性的充分条件, 最后针对系统设计一个滑模控制器, 并考虑到当匹配不确定性上界未知的情况下, 设计一个自适应滑模控制器。

### 2.1 滑模面设计

对于系统(2), 设计如下模糊积分滑动曲面函数:

$$s(t, p) = \mathbf{S}^T \mathbf{E}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0)) - \mathbf{S}^T \int_0^t \sum_{i=1}^r h_i(\theta(\alpha)) \sum_{j=1}^r h_j(\theta(\alpha)) [\mathbf{A}_{pi} \mathbf{x}(\alpha) + \mathbf{A}_{pdi} \mathbf{x}(\alpha - d(\alpha)) + \mathbf{B}_{pi} \mathbf{K}_{pij} \mathbf{x}(\alpha)] d\alpha, \quad (4)$$

其中:  $\mathbf{S}$  是具有适当维数的矩阵, 且满足  $\mathbf{S}^T \mathbf{B}_{pi}$  是非奇异的;  $\sum_{j=1}^r h_j(\theta(t)) \mathbf{K}_{pij} \mathbf{x}(t)$  用于稳定滑动运动;  $\mathbf{K}_{pij} \in \mathbf{R}^{m \times n}$  是需要设计的参数矩阵。

采用等效控制方法由  $\dot{s}(t, p) = 0$ , 得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{eq}(t) = & -(\mathbf{S}^T \mathbf{B}_p)^{-1} \mathbf{S}^T \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) [\Delta \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \Delta \mathbf{A}_{di} \mathbf{x}(t-d(t)) + \mathbf{B}_{wi} \mathbf{w}(t)] - \\ & \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-d(t))) + \sum_{j=1}^r h_j(\theta(t)) \mathbf{K}_{pij} \mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (5)$$

将(5)式代入(2)式得到滑模动态系统:

$$\begin{cases} \mathbf{E} \dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) \sum_{j=1}^r h_j(\theta(t)) [\tilde{\mathbf{A}}_{pij} \mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{A}}_{pdi} \mathbf{x}(t-d(t)) + \tilde{\mathbf{B}}_{wi} \mathbf{w}(t)] \\ \mathbf{z}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) [\bar{\mathbf{C}}_{pi} \mathbf{x}(t) + \bar{\mathbf{C}}_{pdi} \mathbf{x}(t-d(t)) + \mathbf{D}_{wi} \mathbf{w}(t)] \\ \mathbf{x}(t) = \varphi(t) \end{cases}. \quad (6)$$

其中:  $\tilde{\mathbf{A}}_{pij} = \mathbf{A}_{pij} + \bar{\mathbf{S}}\Delta\mathbf{A}_{pi}$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}_{pdi} = \mathbf{A}_{pdi} + \bar{\mathbf{S}}\Delta\mathbf{A}_{pdi}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}_{wi} = \bar{\mathbf{S}}\mathbf{B}_{wi}$ ,  $\mathbf{A}_{pij} = \mathbf{A}_{pi} + \mathbf{B}_{pi}\mathbf{K}_{pij}$ ,  $\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{I} - \mathbf{B}_{pi}(\mathbf{S}^T\mathbf{B}_{pi})^{-1}\mathbf{S}^T$ 。

## 2.2 随机容许性和耗散性分析

本节的目的是在定义 1 和定义 2 的基础上,得到一个充分的时滞相关条件,以确保滑模动态系统(6)是随机容许的和严格  $(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}, \mathbf{X})$ - $\gamma$  耗散的。

**定理 1** 对于给定的标量  $0 \leq d(t) \leq d$ ,  $\mu > 0$  和  $\gamma > 0$ , 若存在适当维数的正定对称矩阵  $\mathbf{P}_{pi}$ ,  $\mathbf{Q}_{1p}$ ,  $\mathbf{Q}_1$ ,  $\mathbf{Q}_{2p}$ ,  $\mathbf{Q}_2$ ,  $\mathbf{Q}_3$  满足以下不等式, 则系统(6)是随机容许的并且是严格  $(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}, \mathbf{X})$ - $\gamma$  耗散的。

$$\mathbf{E}^T \mathbf{P}_{pi} = \mathbf{P}_{pi}^T \mathbf{E} \geq 0. \quad (7)$$

$$\mathbf{E}^T \mathbf{P}_{qi} - \mathbf{E}^T \mathbf{P}_{pi} - \mathbf{M}_p \leq 0, p \in \mathbf{N}, q \in \mathbf{N}_{pk}^p, q \neq p. \quad (8)$$

$$\mathbf{A}_{ij1} < 0, i, j = 1, 2, \dots, r; p \in \mathbf{N}_k^p. \quad (9)$$

$$\mathbf{A}_{ij2} < 0, i, j = 1, 2, \dots, r; p \in \mathbf{N}_{uk}^p. \quad (10)$$

$$\sum_{q=1}^N \pi_{pq} \mathbf{Q}_{1q} - \mathbf{Q}_1 < 0. \quad (11)$$

$$\sum_{q=1}^N \pi_{pq} \mathbf{Q}_{2q} - \mathbf{Q}_2 < 0. \quad (12)$$

其中:

$$\mathbf{A}_{ij1} = \begin{bmatrix} \Xi_{1ij}^1 & \Xi_i^{12} & d\Gamma_{1ij}\mathbf{Q}_3 & \Gamma_{2i}\sqrt{\mathbf{Z}} \\ * & \Xi_i^{22} & d\tilde{\mathbf{B}}_{wi}^T\mathbf{Q}_3 & \mathbf{D}_{wi}\sqrt{\mathbf{Z}} \\ * & * & -\mathbf{Q}_3 & 0 \\ * & * & * & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{ij2} = \begin{bmatrix} \Xi_{2ij}^1 & \Xi_i^{12} & d\Gamma_{1ij}\mathbf{Q}_3 & \Gamma_{2i}\sqrt{\mathbf{Z}} \\ * & \Xi_i^{22} & d\tilde{\mathbf{B}}_{wi}^T\mathbf{Q}_3 & \mathbf{D}_{wi}\sqrt{\mathbf{Z}} \\ * & * & -\mathbf{Q}_3 & 0 \\ * & * & * & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{1ij}^1 = \begin{bmatrix} \Xi_{1ij}^{11} & \mathbf{P}_{pi}^T\mathbf{A}_{pdi} & \mathbf{E}^T\mathbf{Q}_3\mathbf{E} \\ * & \Xi_{ij}^{22} & 0 \\ * & * & \Xi_{ij}^{33} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E}_{2ij}^1 = \begin{bmatrix} \Xi_{2ij}^{11} & \mathbf{P}_{pi}^T\mathbf{A}_{pdi} & \mathbf{E}^T\mathbf{Q}_3\mathbf{E} \\ * & \Xi_{ij}^{22} & 0 \\ * & * & \Xi_{ij}^{33} \end{bmatrix}, \mathbf{E}_i^{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{pi}^T\tilde{\mathbf{B}}_{wi} - \mathbf{C}_{pi}^T\mathbf{Y}^T \\ -\mathbf{C}_{pdi}^T\mathbf{Y}^T \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_{1ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{pij}^T \\ \mathbf{A}_{pdi}^T \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_{2i} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{pi} \\ \mathbf{C}_{pdi} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E}_i^2 = -(\mathbf{X} - \gamma\mathbf{I}) - \text{sym}(\mathbf{Y}\mathbf{D}_{wi}), \mathbf{E}_{ij}^{22} = -(1 - \mu)\mathbf{Q}_{1p}, \mathbf{E}_{ij}^{33} = -\mathbf{Q}_{2p} - \mathbf{E}^T\mathbf{Q}_3\mathbf{E},$$

$$\mathbf{E}_{1ij}^{11} = \text{sym}(\mathbf{P}_{pi}^T\mathbf{A}_{pij}) + \mathbf{Q}_{1p} + \mathbf{Q}_{2p} + d^2\mathbf{Q}_1 + d^2\mathbf{Q}_2 + \sum_{q \in \mathbf{N}_k^p, q \neq p}^N \pi_{pq} (\mathbf{E}^T\mathbf{P}_{qi} - \mathbf{E}^T\mathbf{P}_{pi} - \mathbf{M}_p) - \pi_{pp}\mathbf{M}_p,$$

$$\mathbf{E}_{2ij}^{11} = \text{sym}(\mathbf{P}_{pi}^T\mathbf{A}_{pij}) + \mathbf{Q}_{1p} + \mathbf{Q}_{2p} + d^2\mathbf{Q}_1 + d^2\mathbf{Q}_2 + \sum_{q \in \mathbf{N}_k^p, q \neq p}^N \pi_{pq} (\mathbf{E}^T\mathbf{P}_{qi} - \mathbf{E}^T\mathbf{P}_{pi} - \mathbf{M}_p) - d\mathbf{M}_p, |\pi_{pp}| \leq -c, p \in \mathbf{N}.$$

**证明** 这个证明分为两部分,假设不匹配不确定性  $\Delta\mathbf{A}_{pi}$ ,  $\Delta\mathbf{A}_{pdi}$ ,  $\Delta\mathbf{C}_{pi}$ ,  $\Delta\mathbf{C}_{pdi}$  均为 0。

首先,证明系统(6)是随机容许的。如果条件(7)、(8)和  $\mathbf{E}_{1ij}^{11} < 0$ ,  $\mathbf{E}_{2ij}^{11} < 0$  成立,可得系统(6)是随机容许的。

由于  $\text{rank}(\mathbf{E}) = r < n$ , 存在两个可逆矩阵  $\mathbf{M}, \mathbf{N} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  使得:

$$\mathbf{M}\mathbf{E}\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{M}\mathbf{A}_{pij}\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{p1ij} & \mathbf{A}_{p2ij} \\ \mathbf{A}_{p3ij} & \mathbf{A}_{p4ij} \end{bmatrix}, \mathbf{M}^{-T}\mathbf{P}_{pi}\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{p1i} & \mathbf{P}_{p2i} \\ \mathbf{P}_{p3i} & \mathbf{P}_{p4i} \end{bmatrix}.$$

由条件(7)得  $\mathbf{P}_{p2i} = 0$ 。在  $\mathbf{E}_{1ij}^{11} < 0$ ,  $\mathbf{E}_{2ij}^{11} < 0$  两端左边乘以  $\mathbf{N}^T$ , 右边乘以  $\mathbf{N}$ , 对于  $\forall p \in \mathbf{N}$ , 得  $\mathbf{A}_{p4ij}^T\mathbf{P}_{pi} + \mathbf{P}_{pi}^T\mathbf{A}_{p4ij} < 0$ 。

所以  $\mathbf{A}_{p4ij}$  是非奇异的。由定义 1 可得系统(6)是正则的、无脉冲的。

下面证明系统(6)是随机稳定的。选择随机 Lyapunov 函数:

$$V(\mathbf{x}_t, p, t) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) \sum_{j=1}^r h_j(\theta(t)) \{ \mathbf{x}^T(t) \mathbf{E}^T \mathbf{P}_{pi} \mathbf{x}(t) + \int_{t-d(t)}^t \mathbf{x}^T(s) \mathbf{Q}_{1p} \mathbf{x}(s) ds + d \int_{-d}^0 \int_{t+\theta}^t \mathbf{x}^T(s) \mathbf{Q}_1 \mathbf{x}(s) ds + \int_{t-d}^t \mathbf{x}^T(s) \mathbf{Q}_{2p} \mathbf{x}(s) ds + d \int_{-d}^0 \int_{t+\theta}^t \mathbf{x}^T(s) \mathbf{Q}_2 \mathbf{x}(s) ds + d \int_{-d}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{E}^T \mathbf{Q}_3 \mathbf{E} \dot{\mathbf{x}}(s) ds \}.$$

令  $\ell$  是无穷算子, 则可以得到:

$$\ell V(\mathbf{x}(t), p, t) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) \sum_{j=1}^r h_j(\theta(t)) \{ 2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}_{pi}^T \mathbf{E} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{x}^T(t) \left[ \sum_{q=1}^N \pi_{pq} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_{qi} \right] \mathbf{x}(t) \} + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_{1p} \mathbf{x}(t) - (1 - \dot{d}(t)) \mathbf{x}^T(t - d(t)) \mathbf{Q}_{1p} \mathbf{x}(t - d(t)) +$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{q=1}^N \pi_{pq} \int_{t-d(t)}^t \mathbf{x}^T(s) \mathbf{Q}_{1q} \mathbf{x}(s) ds + d^2 \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_1 \mathbf{x}(t) - \int_{t-d}^t \mathbf{x}^T(s) \mathbf{Q}_1 \mathbf{x}(s) ds + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_{2p} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^T(t-d) \mathbf{Q}_{2p} \mathbf{x}(t-d) + \\
& \sum_{q=1}^N \pi_{pq} \int_{t-d}^t \mathbf{x}^T(s) \mathbf{Q}_{2q} \mathbf{x}(s) ds + d^2 \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_2 \mathbf{x}(t) - \int_{t-d}^t \mathbf{x}^T(s) \mathbf{Q}_2 \mathbf{x}(s) ds + \\
& d^2 \dot{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{E}^T \mathbf{Q}_3 \mathbf{E} \dot{\mathbf{x}}(t) - d \int_{t-d}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{E}^T \mathbf{Q}_3 \mathbf{E} \dot{\mathbf{x}}(s) ds. \quad (13)
\end{aligned}$$

由  $0 \leq d(t) \leq d$  得:  $-\int_{t-d}^t \mathbf{x}^T(s) \mathbf{Q}_1 \mathbf{x}(s) ds \leq -\int_{t-d(t)}^t \mathbf{x}^T(s) \mathbf{Q}_1 \mathbf{x}(s) ds$ 。由引理 1 得:

$$-d \int_{t-d}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{E}^T \mathbf{Q}_3 \mathbf{E} \dot{\mathbf{x}}(s) ds \leq -[\mathbf{x}^T(t) - \mathbf{x}^T(t-d)] \mathbf{E}^T \mathbf{Q}_3 \mathbf{E} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t-d)].$$

当转移速率部分未知时,利用添项方法,由  $\sum_{q=1}^N \pi_{pq} = 0, \pi_{pp} = -\sum_{q \in \mathbf{N}, q \neq p} \pi_{pq}$  得:

$$\begin{aligned}
\sum_{q=1}^N \pi_{pq} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_{qi} &= \sum_{q=1}^N \pi_{pq} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_{qi} - \sum_{q=1}^N \pi_{pq} \mathbf{M}_p = \sum_{q \in \mathbf{N}_k^p, q \neq p} \pi_{pq} (\mathbf{E}^T \mathbf{P}_{qi} - \mathbf{M}_p) + \\
&\sum_{q \in \mathbf{N}_{ik}^p, q \neq p} \pi_{pq} (\mathbf{E}^T \mathbf{P}_{qi} - \mathbf{M}_p) + \pi_{pp} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_{pi} - \pi_{pp} \mathbf{M}_p = \\
&\sum_{q \in \mathbf{N}_k^p, q \neq p} \pi_{pq} (\mathbf{E}^T \mathbf{P}_{qi} - \mathbf{E}^T \mathbf{P}_{pi} - \mathbf{M}_p) + \sum_{q \in \mathbf{N}_{ik}^p, q \neq p} \pi_{pq} (\mathbf{E}^T \mathbf{P}_{qi} - \mathbf{E}^T \mathbf{P}_{pi} - \mathbf{M}_p) - \pi_{pp} \mathbf{M}_p.
\end{aligned}$$

由不等式(8),当  $p \in \mathbf{N}_k^p$  时,  $\sum_{q=1}^N \pi_{pq} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_{qi} \leq \sum_{q \in \mathbf{N}_k^p} \pi_{pq} (\mathbf{E}^T \mathbf{P}_{qi} - \mathbf{E}^T \mathbf{P}_{pi} - \mathbf{M}_p) - \pi_{pp} \mathbf{M}_p$ 。

将以上代入(13)式,当  $w(t)=0$  时可得:

$$\begin{aligned}
\ell V(\mathbf{x}(t), p, t) &\leq \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) \sum_{j=1}^r h_j(\theta(t)) \xi_1^T(t) (\Xi_{1ij} + d \mathbf{F}_{1ij} \mathbf{Q}_3 \mathbf{F}_{1ij}^T) \xi_1(t), \\
\xi_1(t) &= [\mathbf{x}^T(t) \quad \mathbf{x}^T(t-d(t)) \quad \mathbf{x}^T(t-d)]^T.
\end{aligned}$$

利用 Schur 补定理和(9)式,可得  $\Xi_{1ij} + d \mathbf{F}_{1ij} \mathbf{Q}_3 \mathbf{F}_{1ij}^T < 0$ , 则  $\ell V(\mathbf{x}(t), p, t) \leq -\lambda_1 \min \|\mathbf{x}(t)\|^2$  ( $\lambda_1 \geq 0$ )。所以系统(6)是随机稳定的。

同理,由不等式(8),当  $p \in \mathbf{N}_{ik}^p$  时,  $\sum_{q=1}^N \pi_{pq} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_{qi} \leq \sum_{q \in \mathbf{N}_{ik}^p} \pi_{pq} (\mathbf{E}^T \mathbf{P}_{qi} - \mathbf{E}^T \mathbf{P}_{pi} - \mathbf{M}_p) - c \mathbf{M}_p$ , 其中:  $|\pi_{pp}| \leq -c, p \in \mathbf{N}$ 。

可得  $\ell V(\mathbf{x}(t), p, t) \leq \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) \sum_{j=1}^r h_j(\theta(t)) \xi_1^T(t) (\Xi_{2ij} + d \mathbf{F}_{1ij} \mathbf{Q}_3 \mathbf{F}_{1ij}^T) \xi_1(t)$ 。利用 Schur 补定理和(10)式,可得  $\Xi_{2ij} + d \mathbf{F}_{1ij} \mathbf{Q}_3 \mathbf{F}_{1ij}^T < 0$ , 当  $w(t)=0$  时,存在一个标量  $\lambda_2 \geq 0$  使得  $\ell V(\mathbf{x}(t), p, t) \leq -\lambda_2 \min \|\mathbf{x}(t)\|^2$ , 则系统(6)是随机稳定的,系统(6)是随机容许的。

下面进行第 2 步,证明系统(6)具有严格  $(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}, \mathbf{X})$ - $\gamma$  耗散性。

当  $p \in \mathbf{N}_k^p$  时,有:

$$\ell V(\mathbf{x}(t), p, t) - \mathbf{z}^T(t) \mathbf{Z} \mathbf{z}(t) - 2\mathbf{w}(t)^T \mathbf{Y} \mathbf{z}(t) - \mathbf{w}(t)^T (\mathbf{X} - \gamma \mathbf{I}) \mathbf{w}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) \sum_{j=1}^r h_j(\theta(t)) \xi^T(t) \mathbf{A}_{ij1} \xi(t) < 0,$$

其中:  $\xi(t) = [\mathbf{x}^T(t) \quad \mathbf{x}^T(t-d(t)) \quad \mathbf{x}^T(t-d) \quad \mathbf{w}^T(t)]^T$ 。对  $\forall t^* > 0$ , 有:

$$\epsilon \left\{ \int_0^{t^*} \ell V(\mathbf{x}(t), p, t) dt \right\} - \epsilon \left\{ \int_0^{t^*} \mathbf{z}^T(t) \mathbf{Z} \mathbf{z}(t) - 2\mathbf{w}(t)^T \mathbf{Y} \mathbf{z}(t) - \mathbf{w}(t)^T (\mathbf{X} - \gamma \mathbf{I}) \mathbf{w}(t) dt \right\} \leq 0. \quad (14)$$

在零初始条件下,  $V(\mathbf{x}(t^*), p^*, t^*) \geq 0$ , 由(14)式可得:

$$\epsilon \left\{ \int_0^{t^*} \mathbf{z}^T(t) \mathbf{Z} \mathbf{z}(t) + 2\mathbf{w}(t)^T \mathbf{Y} \mathbf{z}(t) + \mathbf{w}(t)^T \mathbf{X} \mathbf{w}(t) dt \right\} \geq \gamma \epsilon \left\{ \int_0^{t^*} \mathbf{w}(t)^T \mathbf{w}(t) dt \right\}. \quad (15)$$

同理,当  $p \in \mathbf{N}_{ik}^p$  时可得(15)式成立。所以系统(6)具有严格  $(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}, \mathbf{X})$ - $\gamma$  耗散性。

证毕

在定理 1 的基础上,系统(6)中加入不匹配不确定性,仍然可以得到(6)式是严格  $(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}, \mathbf{X})$ - $\gamma$  耗散的。

**定理 2** 对于给定的标量  $0 \leq d(t) \leq d, \mu > 0, \gamma > 0$ , 若存在适当维数的正定对称矩阵  $\mathbf{P}_{pi}, \mathbf{Q}_{1p}, \mathbf{Q}_{2p}, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3$ , 正标量  $\epsilon_i, i=1, 2, \dots, r$  使得(7), (8), (11), (12)式和以下不等式成立, 则系统(6)是严格  $(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}, \mathbf{X})$ - $\gamma$  耗散的。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ij1} & \epsilon_i \mathbf{A}_i^{12} & \mathbf{A}_i^{13} \\ * & -\epsilon_i \mathbf{I} & 0 \\ * & * & -\epsilon_i \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, i, j = 1, 2, \dots, r; p \in \mathbf{N}_k^p. \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ij2} & \epsilon_i \mathbf{A}_i^{12} & \mathbf{A}_i^{13} \\ * & -\epsilon_i \mathbf{I} & 0 \\ * & * & -\epsilon_i \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, i, j = 1, 2, \dots, r; p \in \mathbf{N}_{ik}^p. \quad (17)$$

其中:  $\mathbf{A}_i^{12} = [\mathbf{M}_{pi}^T \bar{\mathbf{S}}^T \mathbf{P}_{pi} \quad 0 \quad 0 \quad \mathbf{M}_{pdi}^T \quad d\mathbf{M}_{pi}^T \bar{\mathbf{S}}^T \bar{\mathbf{Q}}_3 \quad \mathbf{M}_{pdi}^T \sqrt{\mathbf{Z}}]^T$ ,  $\mathbf{A}_i^{13} = [\mathbf{N}_{pi}^T \quad \mathbf{N}_{pdi}^T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ .

**证明** 用  $\tilde{\mathbf{A}}_{pij}$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}_{pdi}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}_{pi}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}_{pdi}$  代替(9),(10)式的  $\mathbf{A}_{pij}$ ,  $\mathbf{A}_{pdi}$ ,  $\mathbf{C}_{pi}$ ,  $\mathbf{C}_{pdi}$ , 由(16),(17)式利用 Schur 补定理得到以下不等式:  $\mathbf{A}_{ij1} + \text{sym}(\mathbf{A}_i^{12} F(t) \mathbf{A}_i^{13}) < 0$ ,  $\mathbf{A}_{ij2} + \text{sym}(\mathbf{A}_i^{12} F(t) \mathbf{A}_i^{13}) < 0$ . 则不确定系统(6)是严格  $(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}, \mathbf{X})$ - $\gamma$  耗散的。

证毕

根据定理 1 和定理 2, 下面讨论(4)式中的增益  $\mathbf{K}_{pij}$ , 使得系统(6)是随机容许且严格  $(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}, \mathbf{X})$ - $\gamma$  耗散的。

**定理 3** 对于给定的标量  $0 \leq d(t) \leq d$ ,  $\mu > 0$ ,  $\gamma > 0$ , 若存在正定对称矩阵  $\bar{\mathbf{P}}_{pi} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $\bar{\mathbf{Q}}_p \in \mathbf{R}^{(n-g) \times (n-g)}$ ,  $\bar{\mathbf{Q}}_{1p}$ ,  $\bar{\mathbf{Q}}_1, \bar{\mathbf{Q}}_{2p}, \bar{\mathbf{Q}}_2, \bar{\mathbf{Q}}_3$ , 矩阵  $\mathbf{W}_{pi} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{U}_{pij}, \mathbf{V}_{pij}, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ , 对称矩阵  $\tilde{\mathbf{P}}_{pi} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 非奇异矩阵  $\tilde{\mathbf{Q}}_p \in \mathbf{R}^{(n-g) \times (n-g)}$  和标量  $\bar{\epsilon}_i > 0$ , 使得以下不等式成立, 则不确定系统(6)是随机容许且严格  $(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}, \mathbf{X})$ - $\gamma$  耗散的。

$$\mathbf{E}^T \mathbf{P}_{pi} = \mathbf{P}_{pi}^T \mathbf{E} \geq 0. \quad (18)$$

$$\mathbf{W}_{pi}^T \mathbf{E}^T \mathbf{P}_{qi} \mathbf{W}_{pi} - \mathbf{W}_{pi}^T \mathbf{E}^T - \bar{\mathbf{M}}_p \leq 0, p \in \mathbf{N}, q \in \mathbf{N}_{ik}^p, q \neq p. \quad (19)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{ij1} < 0, i, j = 1, 2, \dots, r; p \in \mathbf{N}_k^p. \quad (20)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{ij2} < 0, i, j = 1, 2, \dots, r; p \in \mathbf{N}_{ik}^p. \quad (21)$$

$$\sum_{q=1}^N \pi_{pq} \bar{\mathbf{Q}}_{1q} - \bar{\mathbf{Q}}_1 < 0. \quad (22)$$

$$\sum_{q=1}^N \pi_{pq} \bar{\mathbf{Q}}_{2q} - \bar{\mathbf{Q}}_2 < 0. \quad (23)$$

其中:

$$\bar{\mathbf{A}}_{ij1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}}_{1ij}^1 & \bar{\mathbf{E}}_i^{12} & d \bar{\mathbf{F}}_{1ij} \mathbf{Q}_3 & \bar{\mathbf{F}}_{2i} \sqrt{\mathbf{Z}} & \bar{\epsilon}_i \bar{\mathbf{A}}_i^{15} & \bar{\mathbf{A}}_i^{16T} \\ * & \bar{\mathbf{E}}_i^{22} & d \mathbf{W}_{pi}^T \tilde{\mathbf{B}}_{wi}^T \mathbf{Q}_3 & \mathbf{W}_{pi}^T \mathbf{D}_{wi} \sqrt{\mathbf{Z}} \\ * & * & -\mathbf{Q}_3 & 0 \\ * & * & * & -\mathbf{I} \\ * & * & * & * & -\bar{\epsilon}_i \mathbf{I} \\ * & * & * & * & * & -\bar{\epsilon}_i \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{ij2} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}}_{2ij}^1 & \bar{\mathbf{E}}_i^{12} & d \bar{\mathbf{F}}_{1ij} \mathbf{Q}_3 & \bar{\mathbf{F}}_{2i} \sqrt{\mathbf{Z}} & \bar{\epsilon}_i \bar{\mathbf{A}}_i^{15} & \bar{\mathbf{A}}_i^{16T} \\ * & \bar{\mathbf{E}}_i^{22} & d \mathbf{W}_{pi}^T \tilde{\mathbf{B}}_{wi}^T \mathbf{Q}_3 & \mathbf{W}_{pi}^T \mathbf{D}_{wi} \sqrt{\mathbf{Z}} \\ * & * & -\mathbf{Q}_3 & 0 \\ * & * & * & -\mathbf{I} \\ * & * & * & * & -\bar{\epsilon}_i \mathbf{I} \\ * & * & * & * & * & -\bar{\epsilon}_i \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{1ij}^1 = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}}_{1ij}^{11} & \mathbf{A}_{pdi} & \mathbf{E} \mathbf{W}_{pi} + \mathbf{W}_{pi}^T \mathbf{E}^T - \mathbf{Q}^{-1} \\ * & \bar{\mathbf{E}}_{ij}^{22} & 0 \\ * & * & \bar{\mathbf{E}}_{ij}^{33} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{E}}_{2ij}^1 = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}}_{2ij}^{11} & \mathbf{A}_{pdi} & \mathbf{E} \mathbf{W}_{pi} + \mathbf{W}_{pi}^T \mathbf{E}^T - \mathbf{Q}^{-1} \\ * & \bar{\mathbf{E}}_{ij}^{22} & 0 \\ * & * & \bar{\mathbf{E}}_{ij}^{33} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{E}}_i^{12} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{wi} - \mathbf{W}_{pi}^T \mathbf{C}_{pi}^T \mathbf{Y}^T \\ -\mathbf{W}_{pi}^T \mathbf{C}_{pdi}^T \mathbf{Y}^T \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{F}}_{1ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{pi}^T \mathbf{A}_{pi}^T + (\mathbf{E} \mathbf{U}_{pij}^T + \mathbf{R}_1^T \mathbf{V}_{pij}^T) \mathbf{B}_{pi}^T \\ \mathbf{W}_{pi}^T \mathbf{A}_{pdi}^T \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{F}}_{2i} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{pi}^T \mathbf{C}_{pi} \\ \mathbf{W}_{pi}^T \mathbf{C}_{pdi} \\ 0 \end{bmatrix},$$



$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{E}}_{1ij}^{11} &= \text{sym}(\mathbf{A}_{pi}\mathbf{W}_{pi} + \mathbf{B}_{pi}(\mathbf{U}_{pij}\mathbf{E}^T + \mathbf{V}_{pij}\mathbf{R}_1)) + \bar{\mathbf{Q}}_{1p} + \bar{\mathbf{Q}}_{2p} + d^2\bar{\mathbf{Q}}_1 + d^2\bar{\mathbf{Q}}_2 - \mathbf{E}\mathbf{W}_{pi} - \mathbf{W}_{pi}^T\mathbf{E}^T + \mathbf{Q}_3^{-1} + \\
&\quad \sum_{q \in \mathbf{N}_k^p, q \neq p}^N \pi_{pq}(\mathbf{W}_{pi}^T\mathbf{E}^T\bar{\mathbf{P}}_{qi}\mathbf{E}\mathbf{W}_{pi} - \mathbf{W}_{pi}^T\mathbf{E}^T - \bar{\mathbf{M}}_p) - \pi_{pp}\bar{\mathbf{M}}_p, \\
\bar{\mathbf{E}}_{2ij}^{11} &= \text{sym}(\mathbf{A}_{pi}\mathbf{W}_{pi} + \mathbf{B}_{pi}(\mathbf{U}_{pij}\mathbf{E}^T + \mathbf{V}_{pij}\mathbf{R}_1)) + \bar{\mathbf{Q}}_{1p} + \bar{\mathbf{Q}}_{2p} + d^2\bar{\mathbf{Q}}_1 + d^2\bar{\mathbf{Q}}_2 - \mathbf{E}\mathbf{W}_{pi} - \mathbf{W}_{pi}^T\mathbf{E}^T + \mathbf{Q}_3^{-1} + \\
&\quad \sum_{q \in \mathbf{N}_k^p, q \neq p}^N \pi_{pq}(\mathbf{W}_{pi}^T\mathbf{E}^T\bar{\mathbf{P}}_{qi}\mathbf{E}\mathbf{W}_{pi} - \mathbf{W}_{pi}^T\mathbf{E}^T - \bar{\mathbf{M}}_p) - c\bar{\mathbf{M}}_p, \\
\bar{\mathbf{E}}_{ij}^{22} &= -(1-\mu)\bar{\mathbf{Q}}_{1p}, \bar{\mathbf{E}}_{ij}^{33} = -\bar{\mathbf{Q}}_{2p} - \mathbf{E}\mathbf{W}_{pi} - \mathbf{W}_{pi}^T\mathbf{E}^T + \mathbf{Q}_3^{-1}, \\
\bar{\mathbf{A}}_i^{15} &= [\mathbf{M}_{pi}^T\bar{\mathbf{S}}^T \quad 0 \quad 0 \quad \mathbf{M}_{pdi}^T \quad d\mathbf{M}_{pi}^T\bar{\mathbf{S}}^T\mathbf{Q}_3^T \quad \mathbf{M}_{pdi}\sqrt{\mathbf{Z}}]^T, \bar{\mathbf{A}}_i^{13} = [\mathbf{N}_{pi}^T\mathbf{W}_{pi} \quad \mathbf{N}_{pdi}^T\mathbf{W}_{pi} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0].
\end{aligned}$$

在这种情况下,给出如下控制增益矩阵:

$$\mathbf{K}_{pij} = (\mathbf{U}_{pij}\mathbf{E}^T + \mathbf{V}_{pij}\mathbf{R}_1)\mathbf{W}_{pi}^{-1}, \quad (24)$$

令  $\mathbf{P}_{pi} = \bar{\mathbf{P}}_{pi}\mathbf{E} + \mathbf{R}_1^T\mathbf{Q}_p\mathbf{R}_2^T$ ,  $\mathbf{W}_{pi} = \mathbf{P}_{pi}^{-1} = \tilde{\mathbf{P}}_{pi}\mathbf{E}^T + \mathbf{R}_2\tilde{\mathbf{Q}}_p^T\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{U}_{pij} = \mathbf{K}_{pij}\tilde{\mathbf{P}}_{pi}$ ,  $\mathbf{V}_{pij} = \mathbf{K}_{pij}\mathbf{R}_2\tilde{\mathbf{Q}}_p$ , 且  $\mathbf{E}\mathbf{R}_2 = 0$ ,  $\mathbf{R}_1\mathbf{E} = 0$ 。

**证明** 证明与定理 1 证明过程类似。

因为  $\mathbf{P}_{pi}$  是非奇异的,并且它的逆为  $\mathbf{W}_{pi}$ 。在(8),(11),(12)式左边乘以  $\mathbf{W}_{pi}^T$ ,右边乘以  $\mathbf{W}_{pi}$  得到(19),(22),(23)式。其中:  $\mathbf{W}_{pi}^T\mathbf{O}\mathbf{W}_{pi} = \bar{\mathbf{O}}$ ,  $\bar{\mathbf{O}} = \mathbf{Q}_{1p}$ ,  $\mathbf{Q}_{2p}$ ,  $\mathbf{Q}_1$ ,  $\mathbf{Q}_2$ ,  $\mathbf{M}_p$ 。

在(16),(17)式两端左边乘以  $\text{diag}(\mathbf{W}_{pi}^T, \mathbf{W}_{pi}^T, \mathbf{W}_{pi}^T, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I})$ ,右边乘以  $\text{diag}(\mathbf{W}_{pi}, \mathbf{W}_{pi}, \mathbf{W}_{pi}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I})$ 。

由于

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -\mathbf{W}_{pi}^T\mathbf{E}^T\mathbf{Q}_3\mathbf{E}\mathbf{W}_{pi} & \mathbf{W}_{pi}^T\mathbf{E}^T\mathbf{Q}_3\mathbf{E}\mathbf{W}_{pi} \\ \mathbf{W}_{pi}^T\mathbf{E}^T\mathbf{Q}_3\mathbf{E}\mathbf{W}_{pi} & -\mathbf{W}_{pi}^T\mathbf{E}^T\mathbf{Q}_3\mathbf{E}\mathbf{W}_{pi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} [-\mathbf{W}_{pi}^T\mathbf{E}^T\mathbf{Q}_3\mathbf{E}\mathbf{W}_{pi}] \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix}^T \leq \\
&[\mathbf{I} \quad -\mathbf{I}]^T [-\mathbf{W}_{pi}^T\mathbf{E}^T - \mathbf{E}\mathbf{W}_{pi} + \mathbf{Q}_3^{-1}] [\mathbf{I} \quad -\mathbf{I}],
\end{aligned}$$

再利用 Schur 补定理,经过上述对(16),(17)式的处理,得到(20),(21)式成立。

证毕

**注 2** 由于滑模动态系统(6)是一个全阶模糊系统,本文选择一个正则随机 Lyapunov 函数来获得它的容许条件。与文献[22]不同的是,本文构造的模糊随机 Lyapunov 函数  $V(x_i, p, t)$  中的矩阵  $\mathbf{P}_{pi}$  是不同的,这样降低了函数的保守性。并且考虑到转移概率矩阵不完全已知时,分情况讨论系统的稳定性和耗散性,增加实用性。

**注 3** 文中  $\mathbf{E}^T\mathbf{P}_{pi} = \mathbf{P}_{pi}^T\mathbf{E} \geq 0$  式是等式约束矩阵,这里提出一种求解这类等式约束的线性矩阵不等式的算法。考虑  $\mathbf{E}^T\mathbf{P}_{pi} - \mathbf{P}_{pi}^T\mathbf{E} = 0$ , 其中  $\mathbf{P}_{pi}$  满足线性矩阵不等式(20)和(21),可以将等式转换为

$$\text{tr}[(\mathbf{E}^T\mathbf{P}_{pi} - \mathbf{P}_{pi}^T\mathbf{E})^T(\mathbf{E}^T\mathbf{P}_{pi} - \mathbf{P}_{pi}^T\mathbf{E})] = 0.$$

约束条件为  $(\mathbf{E}^T\mathbf{P}_{pi} - \mathbf{P}_{pi}^T\mathbf{E})^T(\mathbf{E}^T\mathbf{P}_{pi} - \mathbf{P}_{pi}^T\mathbf{E}) \leq \zeta\mathbf{I}$ , 通过 Schur 补,相当于  $\begin{bmatrix} -\zeta\mathbf{I} & \mathbf{P}_{pi}^T\mathbf{E} - \mathbf{E}^T\mathbf{P}_{pi} \\ \mathbf{E}^T\mathbf{P}_{pi} - \mathbf{P}_{pi}^T\mathbf{E} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0$ 。因此

现在改为寻找以下最小化问题的全局解的问题:

$$\begin{aligned}
&\min \zeta, \\
&\text{s. t. (8)~(10)式}, i=1, 2, \dots.
\end{aligned}$$

### 2.3 自适应滑模控制器设计

现在设计一个自适应滑模控制器,由于不确定向量函数  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-d(t)))$  可能表示物理设备中的未建模动态或增加的偏差输入,在一些实际情况中很难得到它的上界。针对这种情况,设计一个适用于系统(2)的自适应模糊积分滑模控制率是有必要的。

**定理 4** 考虑模糊的带有时滞的随机广义 Markov 跳变系统(2),假设  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-d(t)))$  的上界  $\kappa_1, \kappa_2$  是不可行的。采用模糊积分滑动曲面函数(4)和增益矩阵(24),利用自适应模糊积分滑模控制率(25)式,将系统(2)的轨迹驱动到预先给定的滑动面  $\mathbf{s}(t) = 0$  上。

$$u(t) = \sum_{j=1}^r h_j(\theta(t)) \left[ \mathbf{K}_{pij}\mathbf{x}(t) - \hat{\rho}(t) \frac{\mathbf{s}(t)}{\|\mathbf{s}(t)\|} \right]. \quad (25)$$

其中:

$$\hat{\rho}(t) = \nu + \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) [\|(\mathbf{S}^T\mathbf{B}_{pi})^{-1}\mathbf{S}^T\mathbf{M}_{pi}\| (\|\mathbf{N}_{pi}\mathbf{x}(t)\| + \|\mathbf{N}_{pdi}\mathbf{x}(t-d(t))\|) + \hat{\kappa}_1\|\mathbf{x}(t)\| +$$

$$\hat{\kappa}_2 \| \mathbf{x}(t-d(t)) \| + \| (\mathbf{S}^T \mathbf{B}_{pi})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{B}_{wi} \| \| \mathbf{w}(t) \| + \frac{1}{2} \left\| \sum_{q \in \mathbf{N}_k^p} \pi_{pq} (\mathbf{S}^T \mathbf{B}_{qi})^{-1} \| \mathbf{s}(t) \| \right\|.$$

这里  $\hat{\kappa}_1, \hat{\kappa}_2$  分别是  $\kappa_1, \kappa_2$  的估计值, 偏差分别为  $\tilde{\kappa}_1 = \hat{\kappa}_1 - \kappa_1, \tilde{\kappa}_2 = \hat{\kappa}_2 - \kappa_2$ , 且自适应率分别为:

$$\dot{\hat{\kappa}}_1(t) = m_1(-\alpha_1 \hat{\kappa}_1(t) + \| \mathbf{x}(t) \| \| \mathbf{s}(t) \|), \dot{\hat{\kappa}}_2(t) = m_2(-\alpha_2 \hat{\kappa}_2(t) + \| \mathbf{x}(t-d(t)) \| \| \mathbf{s}(t) \|).$$

**证明** 考虑下面 Lyapunov 函数,  $\bar{U}(\mathbf{s}(t), p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) \mathbf{s}^T(t) (\mathbf{S}^T \mathbf{B}_{pi})^{-1} \mathbf{s}(t) + \frac{1}{2m_1} \tilde{\kappa}_1^2 + \frac{1}{2m_2} \tilde{\kappa}_2^2$ ,  $\ell$  是无穷小算子, 则:

$$\begin{aligned} \ell \bar{U}(\mathbf{s}(t), p) &= \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) \sum_{j=1}^r h_j(\theta(t)) \left[ \mathbf{s}^T(t) (\mathbf{S}^T \mathbf{B}_{pi})^{-1} \dot{\mathbf{s}}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T(t) \sum_{q=1}^N \pi_{pq} (\mathbf{S}^T \mathbf{B}_{qi})^{-1} \mathbf{s}(t) \right] + \\ &\quad \frac{1}{m_1} \tilde{\kappa}_1 \dot{\tilde{\kappa}}_1 + \frac{1}{m_2} \tilde{\kappa}_2 \dot{\tilde{\kappa}}_2 \leq \\ &\quad \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) \sum_{j=1}^r h_j(\theta(t)) \{ \mathbf{s}^T(t) (\mathbf{S}^T \mathbf{B}_{pi})^{-1} \mathbf{S}^T [\Delta \mathbf{A}_{pi} \mathbf{x}(t) + \Delta \mathbf{A}_{pdi} \mathbf{x}(t-d(t)) + \mathbf{B}_{wi} \mathbf{w}(t) - \mathbf{B}_{pi} \mathbf{K}_{pij} \mathbf{x}(t) + \\ &\quad \mathbf{B}_{pi} f(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-d(t)) + \mathbf{s}^T(t) (\mathbf{K}_{pij} \mathbf{x}(t) - \hat{\rho}(t) \frac{\mathbf{s}(t)}{\| \mathbf{s}(t) \|})] - \alpha_1 \tilde{\kappa}_1 \hat{\kappa}_1(t) - \alpha_2 \tilde{\kappa}_2 \hat{\kappa}_2(t) + \tilde{\kappa}_1 \| \mathbf{x}(t) \| \| \mathbf{s}(t) \| + \\ &\quad \tilde{\kappa}_2 \| \mathbf{x}(t-d(t)) \| \| \mathbf{s}(t) \| + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T(t) \sum_{q \in \mathbf{N}_k^p} \pi_{pq} (\mathbf{S}^T \mathbf{B}_{qi})^{-1} \mathbf{s}(t) \} \leq \\ &\quad \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) \sum_{j=1}^r h_j(\theta(t)) \{ \mathbf{s}^T(t) (\mathbf{S}^T \mathbf{B}_{pi})^{-1} \mathbf{S}^T [\Delta \mathbf{A}_{pi} \mathbf{x}(t) + \Delta \mathbf{A}_{pdi} \mathbf{x}(t-d(t)) + \\ &\quad \mathbf{B}_{wi} \mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_{pi} f(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-d(t))] + \mathbf{s}^T(t) [-\nu - \| (\mathbf{S}^T \mathbf{B}_{pi})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{M}_{pi} \| (\| \mathbf{N}_{pi} \mathbf{x}(t) \| + \\ &\quad \| \mathbf{N}_{pdi} \mathbf{x}(t-d(t)) \|) - \hat{\kappa}_1 \| \mathbf{x}(t) \| - \hat{\kappa}_2 \| \mathbf{x}(t-d(t)) \| - \| (\mathbf{S}^T \mathbf{B}_{pi})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{B}_{wi} \| \| \mathbf{w}(t) \| + \\ &\quad \frac{1}{2} \left\| \sum_{q \in \mathbf{N}_k^p} \pi_{pq} (\mathbf{S}^T \mathbf{B}_{qi})^{-1} \| \mathbf{s}(t) \| \right\| - \alpha_1 \left( \hat{\kappa}_1(t) - \frac{1}{2} \kappa_1 \right)^2 + \frac{1}{4} \alpha_1 \kappa_1^2 - \alpha_2 \left( \hat{\kappa}_2(t) - \frac{1}{2} \kappa_2 \right)^2 + \frac{1}{4} \alpha_2 \kappa_2^2 + \\ &\quad \tilde{\kappa}_1 \| \mathbf{x}(t) \| \| \mathbf{s}(t) \| + \tilde{\kappa}_2 \| \mathbf{x}(t-d(t)) \| \| \mathbf{s}(t) \| + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T(t) \sum_{q \in \mathbf{N}_k^p} \pi_{pq} (\mathbf{S}^T \mathbf{B}_{qi})^{-1} \mathbf{s}(t) \leq -\nu \| \mathbf{s}(t) \| + \frac{1}{4} \alpha_1 \kappa_1^2 + \frac{1}{4} \alpha_2 \kappa_2^2. \end{aligned}$$

最终一致有界。

证毕

### 3 数值实验

考虑一个单连杆机械臂<sup>[23]</sup>, 模型受时间影响延迟。那么延迟模型由下式给出:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1(t) = \eta \mathbf{x}_2(t) + (1-\eta) \mathbf{x}_2(t-d(t)) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) = -\frac{M_p g l}{J_p} \sin(\mathbf{x}_1(t)) - \frac{\eta D(t)}{J_p} \mathbf{x}_2(t) + 0.1 \mathbf{w}(t) - \frac{(1-\eta) D(t)}{J_p} \mathbf{x}_2(t-d(t)) + \frac{1}{J_p} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}(t) = \eta \mathbf{x}_1(t) + (1-\eta) \mathbf{x}_1(t-d(t)) + 0.2 \mathbf{w}(t), p=1, 2, 3 \end{cases} \quad (26)$$

其中:  $\eta \in [0, 1]$  是表示延迟系数的常数, 这里令  $\eta = 0.5$ ;  $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{z}(t)$  分别是臂的角度位置、角速度、控制输入和控制输出;  $M_p$  是有效载荷的质量;  $J_p$  是惯性矩;  $g = 9.81$  为重力加速度;  $l = 0.5$  为臂长;  $D(t) \in [1.8, 2.2]$  为粘滞摩擦不确定系数。

$M_p$  和  $J_p$  有 3 种模式:  $M_1 = J_1 = 1, M_2 = J_2 = 5, M_3 = J_3 = 10$ 。转换概率矩阵假设为:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} -0.3 & * & * \\ 0.1 & -0.2 & * \\ * & 0.07 & -0.1 \end{bmatrix}.$$

隶属度函数如下所示:

$$h_1(\mathbf{x}_1(t)) = \begin{cases} \frac{\sin(\mathbf{x}_1(t)) - \sigma \mathbf{x}_1(t)}{\mathbf{x}_1(t)(1-\sigma)}, & \mathbf{x}_1(t) \neq 0 \\ 1, & \mathbf{x}_1(t) = 0 \end{cases}, h_2(\mathbf{x}_1(t)) = \begin{cases} \frac{\mathbf{x}_1(t) - \sin(\mathbf{x}_1(t))}{\mathbf{x}_1(t)(1-\sigma)}, & \mathbf{x}_1(t) \neq 0 \\ 1, & \mathbf{x}_1(t) = 0 \end{cases}.$$

其中  $\sigma = \frac{10^{-2}}{\pi}$ 。然后, 带有时滞的非线性 Markov 跳变系统(26)可表示为具有 3 个模型和两个模糊规则的 T-S



模糊模型。

若  $\theta_i(t)$  是  $M_{i1}(i=1,2)$ , 则有:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A}_{pi} + \Delta\mathbf{A}_{pi})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{A}_{pdi} + \Delta\mathbf{A}_{pdi})\mathbf{x}(t-d(t)) + \mathbf{B}_{pi}(u(t) + f(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-d(t)))) + \mathbf{B}_{wi}\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{z}(t) = (\mathbf{C}_{pi} + \Delta\mathbf{C}_{pi})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{C}_{pdi} + \Delta\mathbf{C}_{pdi})\mathbf{x}(t-d(t)) + \mathbf{D}_{wi}\mathbf{w}(t) \end{cases}。$$

其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \mathbf{I}, d=1, \mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & \eta \\ -gl & -2\eta \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & \eta \\ -\sigma gl & -2\eta \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & \eta \\ -gl & -0.4\eta \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & \eta \\ -\sigma gl & -0.4\eta \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{31} &= \begin{bmatrix} 0 & \eta \\ -gl & -0.2\eta \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{32} = \begin{bmatrix} 0 & \eta \\ -\sigma gl & -0.2\eta \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{1d1} = \mathbf{A}_{1d2} = \begin{bmatrix} 0 & 1-\eta \\ 0 & -2(1-\eta) \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{2d1} = \mathbf{A}_{2d2} = \begin{bmatrix} 0 & 1-\eta \\ 0 & -0.4(1-\eta) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{3d1} &= \mathbf{A}_{3d2} = \begin{bmatrix} 0 & 1-\eta \\ 0 & -0.2(1-\eta) \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{11} = \mathbf{B}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{21} = \mathbf{B}_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{31} = \mathbf{B}_{32} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{w1} = \mathbf{B}_{w2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_{pi} &= \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{pdi} = \begin{bmatrix} 1-\eta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{w1} = \mathbf{D}_{w2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{pdi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{N}_{pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix}, \\ \mathbf{N}_{pdi} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-\eta \end{bmatrix}, i=1,2, p=1,2,3, f(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-d(t))) = 0.1\mathbf{x}_1(t) + 0.1\mathbf{x}_1(t-d(t)). \end{aligned}$$

这里选择  $\mathbf{Z}=1.3, \mathbf{Y}=9.1, \mathbf{X}=8.1, \gamma=0.1, \mu=0.5$ , 解定理 3 中的线性矩阵不等式条件, 然后由 (24) 式得:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{111} &= [-8.147 \ 2 \quad -9.571 \ 7], \mathbf{K}_{121} = [-9.057 \ 9 \quad -4.853 \ 8], \mathbf{K}_{112} = [-1.269 \ 9 \quad -8.002 \ 8], \\ \mathbf{K}_{122} &= [-9.133 \ 8 \quad -1.418 \ 9], \mathbf{K}_{211} = [-6.323 \ 6 \quad -4.217 \ 6], \mathbf{K}_{221} = [-0.975 \ 4 \quad -9.157 \ 4], \\ \mathbf{K}_{212} &= [-2.785 \ 0 \quad -7.922 \ 1], \mathbf{K}_{222} = [-5.468 \ 8 \quad -9.594 \ 9], \mathbf{K}_{311} = [-9.575 \ 1 \quad -6.557 \ 4], \\ \mathbf{K}_{321} &= [-9.648 \ 9 \quad -0.357 \ 1], \mathbf{K}_{312} = [-1.576 \ 1 \quad -8.491 \ 3], \mathbf{K}_{322} = [-9.705 \ 9 \quad -9.339 \ 9]. \end{aligned}$$

令  $\mathbf{S}=[1 \ 1], \nu=0.1, m_1=0.1, \alpha_1=0.2, m_2=0.1, \alpha_2=0.1$ , 滑动面可由 (4) 式计算, 则由 (25) 式滑模控制器可得。为便于模拟, 设初始条件  $\boldsymbol{\varphi}(t)=[0.5\pi \ -2]^T$ 。图 1 为操作模式, 图 2 和图 3 是函数  $f(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-d(t)))$  上界的参数估计, 系统的状态响应曲线见图 4, 滑动曲面函数见图 5, 自适应滑模控制器见图 6。图 4b, 5b, 6b 分别表示在 8~18 s 之间, 状态轨迹、滑模曲面函数、控制输入有轻微的波动, 但不影响“稳定”这一结果。

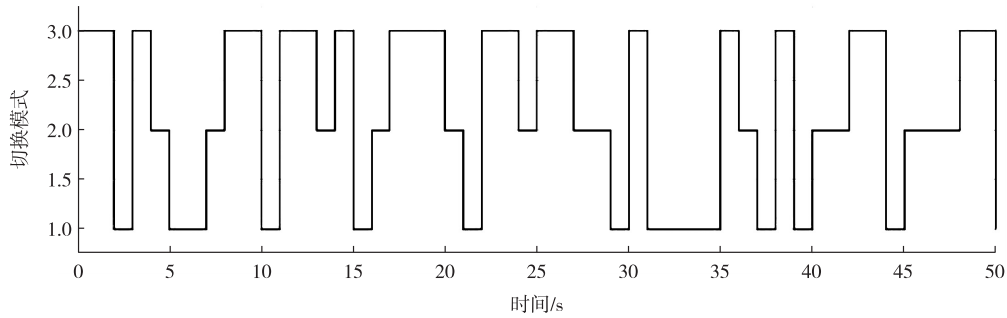


图 1 操作模式

Fig. 1 The operation modes

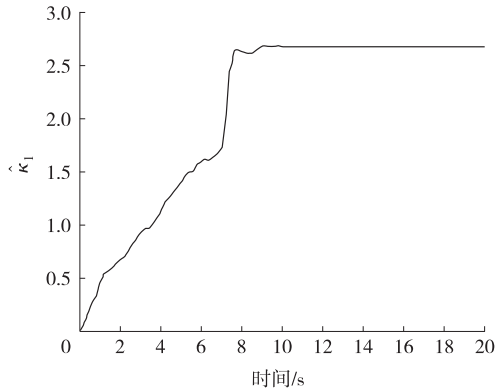


图 2 参数估计  $\hat{\kappa}_1$

Fig. 2 Estimated parameter  $\hat{\kappa}_1$

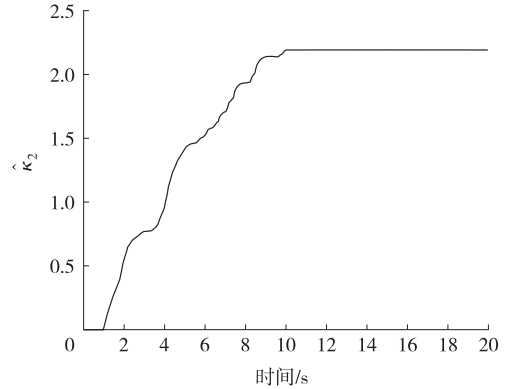
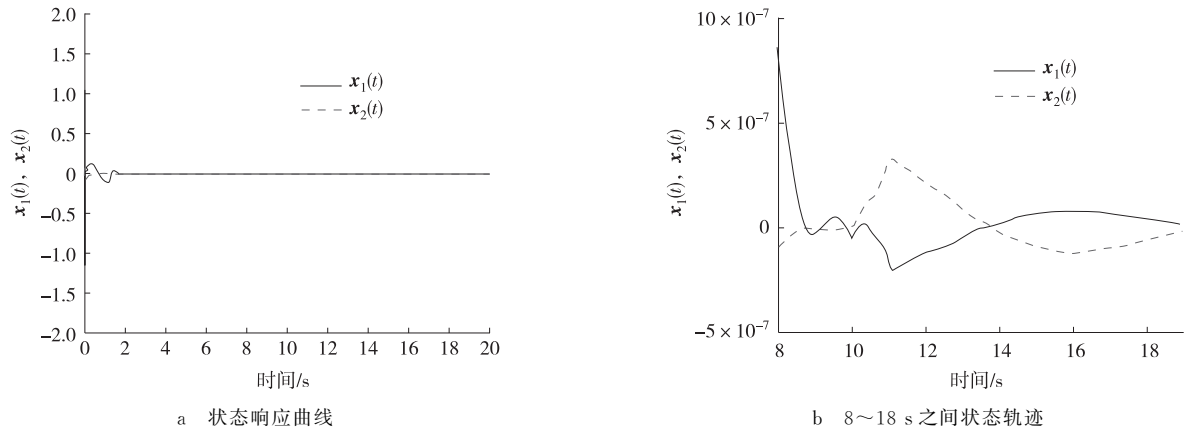
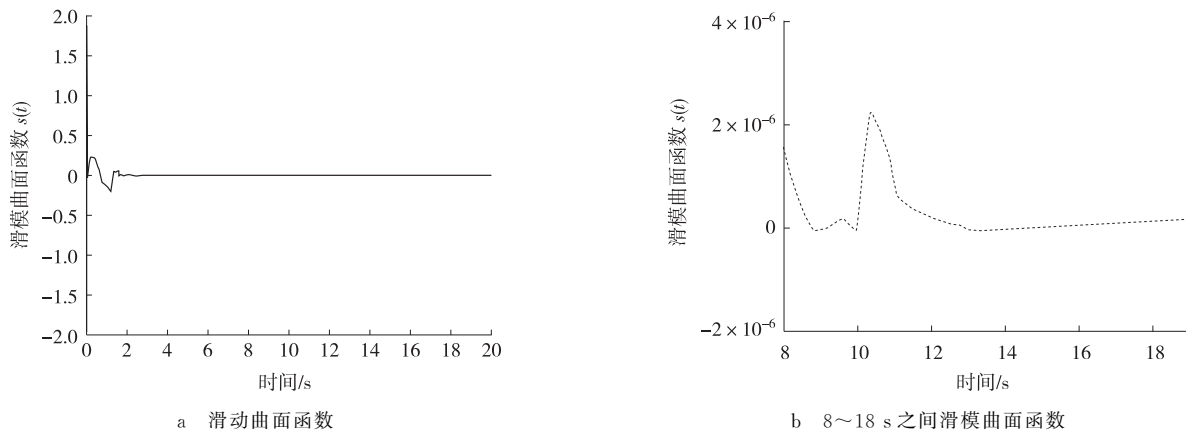
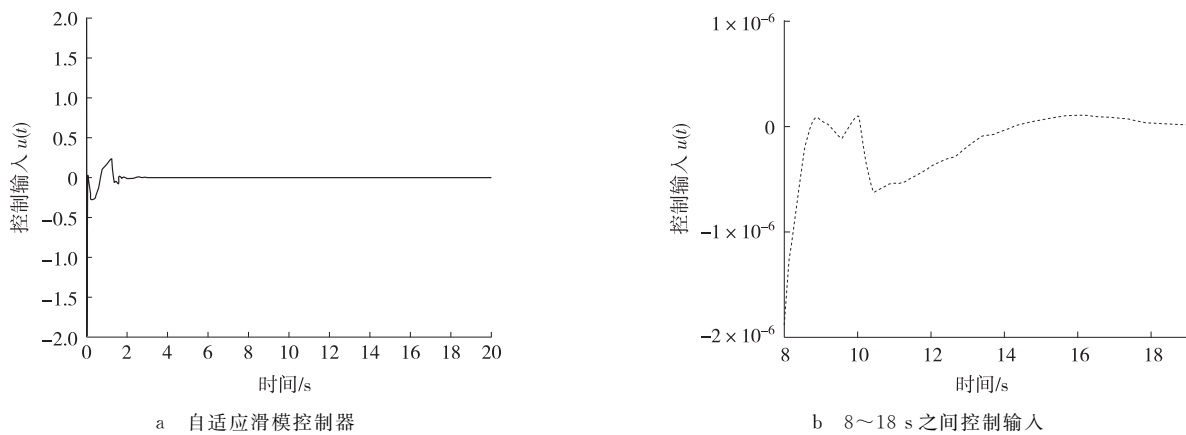


图 3 参数估计  $\hat{\kappa}_2$

Fig. 3 Estimated parameter  $\hat{\kappa}_2$

图 4  $x_1(t), x_2(t)$  的状态轨迹Fig. 4 Responses of  $x_1(t)$  and  $x_2(t)$ 图 5 滑模曲面函数  $s(t)$ Fig. 5 Sliding mode surface  $s(t)$ 图 6 控制输入  $u(t)$ Fig. 6 Control input  $u(t)$ 

与文献[23-24]的方法相比,本文的方法有 3 个优点:

- 1) 考虑到状态轨迹的收敛速度,本文的方法比文献[23]的方法收敛速度快,并且状态轨迹比文献[23]中的结果更平滑。这一点在实际应用过程中是比较重要的,如果收敛速度过陡,可能会破坏系统;
- 2) 从图 6 中可以看出,控制输出收敛速度比文献[24]的收敛速度快;
- 3) 文献[24]状态轨迹的超调量很大,但从图 4 可以看出,状态轨迹的超调量小于文献[24]的结果。

从仿真结果可以看出,系统的状态轨迹在有限时间内被驱动到期望的滑动曲面上,这证实了本文提出的方法,充分说明本文方法的先进性和正确性。实际工程系统中必须考虑系统的稳定性、收敛速度和超调量,因此本文从以上几个方面对滑模曲面函数和控制器进行了改进。

#### 参考文献:

- [1] DAI L Y. Singular control systems[M]. Heidelberg:Springer-Verlag,1989.
- [2] XU S, LAM J. Robust control and filtering of singular systems[M]. Heidelberg:Springer-Verlag,2006.
- [3] DONG J, YANG G H. Controller synthesis via switched PDC scheme for discrete-time T-S fuzzy systems[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems,2009,17(3):544-555.
- [4] LEE D H, KIM D W. Relaxed LMI conditions for local stability and local stabilization of continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics,2014,44(3):394-405.
- [5] WANG N, ER M J, SUN J C, et al. Adaptive robust online constructive fuzzy control of a complex surface vehicle system[J]. IEEE Transactions on Cybernetics,2017,46(7):1511-1523.
- [6] LIU L, ZHOU Q, LIANG H J, et al. Stability and stabilization of nonlinear switched systems under average dwell time[J]. Applied Mathematics and Computation,2017,298(C):77-94.
- [7] LI H, GAO H, SHI P, et al. Fault-tolerant control of Markovian jump stochastic systems via the augmented sliding mode observer approach[J]. Automatica,2014,50(7):1825-1834.
- [8] KRASOVSKIĬ N N, LIDSKIĬ È A. Analytic design of controllers in systems with random attributes[J]. Automation and Remote Control,1961,22(1):1021-1025.
- [9] SHI P, XIA Y Q, LIU G P, et al. On designing of sliding-mode control for stochastic jump systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2006,51(1):97-103.
- [10] NIU Y G, HO D W C, WANG X Y. Sliding mode control for Itô stochastic systems with Markovian switching[J]. Automatica,2007,43(10):1784-1790.
- [11] GAO Q, LIU L, FENG G, et al. Universal fuzzy integral sliding-mode controllers based on T-S fuzzy models[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems,2014,22(2):350-362.
- [12] MATHIYALAGAN K, PARK J H, SAKTHIVEL R, et al. Robust mixed  $H_\infty$  and passive filtering for networked Markov jump systems with impulses[J]. Signal Processing,2014,101:162-173.
- [13] CHEN M H, MA Y C. Non-fragile fuzzy dissipative control for singular Markovian jump systems with time-varying delay[J]. Journal of Control, Automation and Electrical Systems,2017,28:715-726.
- [14] ZHANG L X, LAM J. Necessary and sufficient conditions for analysis and synthesis of Markov jump linear systems with incomplete transition descriptions[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2010,55(7):1695-1701.
- [15] ZHANG Y, HE Y, WU M, et al. Stabilization for Markovian jump systems with partial information on transition probability based on free-connection weighting matrices[J]. Automatica,2011,47(1):79-84.
- [16] 赵霞,田恩刚,李志. 部分转移概率未知的非线性马尔科夫跳变系统的  $H_\infty$  控制[J]. 南京师范大学学报(工程技术版),2012,12(1):47-51.  
ZHAO X, TIAN E G, LI Z.  $H_\infty$  control for Markov jump systems with partially unknown transition probabilities and nonlinearities[J]. Journal of Nanjing Normal University(Engineering Technology Edition),2012,12(1):47-51.
- [17] YANG H, JIANG B, TAO G, et al. Robust stability of switched nonlinear systems with switching uncertainties[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2016,61(9):2531-2537.
- [18] WU Z G, SU H Y, CHU J.  $H_\infty$  filtering for singular Markovian jump systems with time delay[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control,2010,20(8):939-957.
- [19] CUI W X, FANG J A, SHEN Y L, et al. Dissipativity analysis of singular systems with Markovian jump parameters and mode-dependent mixed time-delays[J]. Neurocomputing,2013,110:121-127.
- [20] GU K. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems[C]//Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, December 12-15, 2000, Sydney Convention and Exhibition Centre, Sydney, Australia. Piscataway: IEEE, 2002.
- [21] KHARGONEKAR P P, PETERSEN I R, ZHOU K M. Robust stabilization of uncertain linear systems:quadratic stabilizability

- and  $H_\infty$  control theory[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1990, 35(3): 356-361.
- [22] JIANG B P, GAO C C, XIE J. Passivity based sliding mode control of uncertain singular Markovian jump systems with time-varying delay and nonlinear perturbations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 271: 187-200.
- [23] ZHANG Y S, XU S Y, ZHANG J H. Delay-dependent robust  $H_\infty$  control for uncertain fuzzy Markovian jump systems[J]. International Journal of Control Automation and Systems, 2009, 7(4): 520-529.
- [24] WU H N, CAI K Y. Mode-independent robust stabilization for uncertain Markovian jump nonlinear systems via fuzzy control [J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B, 2005, 36(3): 509-528.

## Stability of Fuzzy Generalized Markov Jump Systems with Partially Unknown Transition Rate

ZHENG Jiali, LUO Honglin

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

**Abstract:** [Purposes] In order to obtain the stability and dissipation of T-S fuzzy stochastic singular systems with time-varying delays, a Markov jump system is established. [Methods] An integral sliding surface function is designed and an appropriate Lyapunov function is selected. The stability of the system is obtained by linear matrix inequality (LMI) technique. By using the equivalent treatment method of addition and subtraction, the result reduces the conservatism. Through the analysis of sliding mode dynamics, a sliding mode controller is designed. An adaptive sliding mode controller is designed for the case that the upper bound of matching uncertainty is unknown. [Findings] When the transfer rate is not fully known, the stochastic admissibility condition of the system is obtained, and the system is constrained by the sliding surface, which has good stability and dissipation. In a finite time, the state trajectory of the system is driven to a predefined sliding surface and keeps moving. [Conclusions] Numerical experiments show that the method is effective.

**Keywords:** T-S fuzzy model; Markov jump system; dissipation; transfer rate

(责任编辑 黄 颖)