

求解特定条件下的 Helmholtz 方程的修正有限体积方法^{*}

张 娟, 冯秀芳

(宁夏大学 数学统计学院, 银川 750021)

摘要:【目的】由于界面问题所导出的偏微分方程的解在通过界面时一般是不连续的,这使得大多数传统数值方法不能很好地适用于求解界面问题,而有限体积方法因保持物理量的局部守恒性,而且计算简单,于是成为解决界面问题的有效方法。因此,研究利用有限体积方法对求解界面问题具有重要意义。【方法】首先基于一种修正的有限体积方法对带有不连续波数和奇异源项的 Helmholtz 方程进行整体逼近。然后,通量采用泰勒级数展开,积分项利用多项式插值进行逼近,对于界面问题利用跳跃条件将负侧的点转化到正侧,从而构造了连续问题以及界面问题的六阶紧致有限差分格式。【结果】格式在连续波数和界面处都可以达到六阶精度。【结论】数值实验验证了格式的有效性和精确性。

关键词: Helmholtz 方程;有限体积方法;紧致格式;不连续波数

中图分类号: O241.82

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2021)04-0069-11

Helmholtz 方程通常出现在涉及时间和空间相关的偏微分方程的物理问题研究中。电磁学中,当函数随时间谐波变化时,波动方程变为 Helmholtz 方程。因为它和波动方程之间的关系,所以经常出现在电磁辐射、地震学和物理学中的声学^[1]等领域。Helmholtz 方程的特征和数学模型的复杂性给数值计算带来了挑战,尤其是无界域和大波数问题。因此,建立高效、快速、稳定的数值计算具有十分重要的意义。

近些年来,众多国内外学者基于有限差分方法对求解 Helmholtz 方程做了大量研究,构造了不同精度的差分格式。1983 年,Manohar 等人^[2]提出了一类新型求解 Helmholtz 方程的有限差分格式,该格式可以达到四阶和六阶精度,但是该格式对导数的要求过高且计算量大。1998 年,Turkel 等人^[3]基于均匀网格构造了一维和二维的高阶格式,采用两种方案,第一种是基于 Padé 逼近,第二种方案则是从 Helmholtz 方程本身出发,给出导数项的高阶精度逼近。但是在高维以及大波数的情况下,以上两种格式的计算量都十分庞大。为了克服这一困难,许多学者提出了高精度紧致有限差分格式。对于紧致差分格式,它的优势在于可以用尽可能少的点达到尽可能高的精度。2007 年,Nabavi 等人^[4]对二维问题提出一种新的九点六阶精度的紧致有限差分方法。在求解 Helmholtz 方程时遇到的另一个常见问题是存在波数不连续的情况。以上研究工作都是基于波数连续情况下的,但是当波数为分段常数时也具有十分重要物理意义。2010 年,冯秀芳等人^[5-6]在直角坐标系中基于浸入界面方法的思想构造了波数为分段常数的一维和二维 Helmholtz 方程的高阶紧致有限差分格式,且对波数为分段常数的 Helmholtz 方程利用有限差分方法通过对方程进行离散,构造了四阶格式,而本文则是利用有限体积与有限差分方法的结合,研究构造六阶格式。2019 年,王芝等人^[7]利用泰勒级数展开并结合紧致差分格式的思想构造了变波数 Helmholtz 方程的六阶精致差分格式。孙晓峰和姜子文^[8]针对一维 Helmholtz 方程,通过有限体积方法构造了四阶紧致格式。曹姣姣^[9]通过修正的有限体积方法构造波数连续问题以及波数间断问题的一维和二维四阶紧致格式。本文接下来提出的格式能够达到六阶精度。

本文内容主要是针对 Helmholtz 方程利用有限体积方法建立一维波数连续和波数间断的六阶紧致有限差分格式。最后通过数值算例验证本文方法的有效性。

^{*} 收稿日期:2020-12-02 修回日期:2021-06-14 网络出版时间:2021-06-30 09:39

资助项目:国家自然科学基金(No. 11961054);宁夏自然科学基金(No. NZ16011)

第一作者简介:张娟,女,研究方向为偏微分方程数值解法,E-mail:zhangj0827@163.com;通信作者:冯秀芳,女,教授,博士生导师,E-mail:xf_feng@nxu.edu.cn

网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20210630.0903.012.html

1 一维 Helmholtz 方程连续问题的六阶紧致有限差分格式

1.1 问题描述

考虑如下 Helmholtz 方程:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + k_0^2 v(z)u = f(z), z \in D. \quad (1)$$

其中: $v(z)$ 是材料系数, k_0 是波数, 求解区间为 $D=[a, b]$ 。为了方便计算, 令 $k_0^2 v(z) = k^2$, 则方程可以改写为:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + k^2 u = f(z), z \in D. \quad (2)$$

其中 $u(z)$ 满足 Dirichlet 边界条件: $u(z) = g(z), z \in \partial D$ 。

1.2 六阶紧致差分格式的构造

在区间 $D=[a, b]$ 上对(2)式进行积分可得:

$$\frac{du(b)}{dz} - \frac{du(a)}{dz} + k^2 \int_a^b u dz = \int_a^b f(z) dz. \quad (3)$$

下面对区间 $D=[a, b]$ 进行均匀网格剖分, 网格节点共 M 个:

$$z_m = a + (m-1)h, h = \frac{b-a}{M-1}, n=1, 2, \dots, M. \quad (4)$$

对划分的网格(4), 取 $[z_{m-\frac{1}{2}}, z_{m+\frac{1}{2}}]$ 为控制体, 应用到(3)式的积分项上, 即取: $[a, b] = [z_{m-\frac{1}{2}}, z_{m+\frac{1}{2}}], m=1, 2, \dots, M$ 。网格划分如图 1 所示:

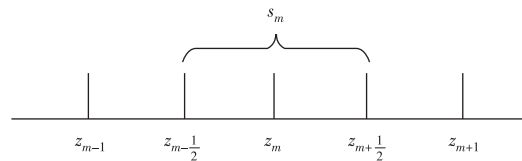


图 1 s_m 是控制体

Fig. 1 s_m is control body

从而方程(3)就可变为:

$$\left. \frac{du}{dz} \right|_{z_{m-\frac{1}{2}}}^{z_{m+\frac{1}{2}}} + k^2 \int_{z_{m-\frac{1}{2}}}^{z_{m+\frac{1}{2}}} u dz = \int_{z_{m-\frac{1}{2}}}^{z_{m+\frac{1}{2}}} f(z) dz. \quad (5)$$

对(5)式中的通量 $u'_{m \pm \frac{1}{2}}$ 的计算, 由泰勒公式可得:

$$u'_{m+\frac{1}{2}} = \frac{u_{m+1} - u_m}{h} - \frac{h^2}{24} u^{(3)}_{m+\frac{1}{2}} - \frac{h^4}{1920} u^{(5)}_{m+\frac{1}{2}} + O(h^6). \quad (6)$$

$$u'_{m-\frac{1}{2}} = \frac{u_m - u_{m-1}}{h} - \frac{h^2}{24} u^{(3)}_{m-\frac{1}{2}} - \frac{h^4}{1920} u^{(5)}_{m-\frac{1}{2}} + O(h^6). \quad (7)$$

由(1)式可得:

$$u''_{m+1} = \left. \frac{d^2 u}{dz^2} \right|_{z=z_{m+1}} = -k^2 u_{m+1} + f_{m+1}.$$

则有:

$$u^{(3)}_{m+\frac{1}{2}} = -k^2 u'_{m+\frac{1}{2}} + f'_{m+\frac{1}{2}}, \quad (8)$$

$$u^{(5)}_{m+\frac{1}{2}} = k^4 u'_{m+\frac{1}{2}} - k^2 f'_{m+\frac{1}{2}} + f^{(3)}_{m+\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

将(8),(9)式代入(6)式可得:

$$\begin{aligned} u'_{m+\frac{1}{2}} &= \frac{u_{m+1} - u_m}{h} - \frac{h^2}{24} u^{(3)}_{m+\frac{1}{2}} - \frac{h^4}{1920} u^{(5)}_{m+\frac{1}{2}} + O(h^6) = \\ &\left(1 + \frac{h^2 k^2}{24} + \frac{7h^4 k^4}{5760} \right) \frac{u_{m+1} - u_m}{h} - \frac{7h^3 k^2}{5760} (f_{m+1} - f_m) - \frac{h^2}{24} f'_{m+\frac{1}{2}} - \frac{h^4}{1920} (f''_{m+1} - f''_m) + O(h^6). \end{aligned} \quad (10)$$

同理可得:

$$u'_{m-\frac{1}{2}} = \frac{u_m - u_{m-1}}{h} - \frac{h^2}{24} u^{(3)}_{m-\frac{1}{2}} - \frac{h^4}{1\ 920} u^{(5)}_{m-\frac{1}{2}} + O(h^6) =$$

$$\left(1 + \frac{h^2 k^2}{24} + \frac{7h^4 k^4}{5\ 760}\right) \frac{u_m - u_{m-1}}{h} - \frac{7h^3 k^2}{5\ 760} (f_m - f_{m-1}) - \frac{h^2}{24} f'_{m-\frac{1}{2}} - \frac{h^3}{1\ 920} (f''_m - f''_{m-1}) + O(h^6). \quad (11)$$

然后,利用(10)和(11)式,就可以得到(5)式的第一项:

$$\left. \frac{du}{dz} \right|_{z_{m-\frac{1}{2}}}^{z_{m+\frac{1}{2}}} = u'_{m+\frac{1}{2}} - u'_{m-\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{h^2 k^2}{24} + \frac{7h^4 k^4}{5\ 760}\right) \frac{u_{m+1} - 2u_m - u_{m-1}}{h} - \frac{7h^3 k^2}{5\ 760} (f_{m+1} - 2f_m - f_{m-1}) -$$

$$\frac{h^2}{24} (f'_{m+\frac{1}{2}} - f'_{m-\frac{1}{2}}) - \frac{h^3}{1\ 920} (f''_{m+1} - 2f''_m - f''_{m-1}) + O(h^6).$$

为了近似(5)式中的积分项,这里使用五次插值多项式来近似被积函数 $u(z)$,使它保持六阶精度。

定理^[10] 设 $u(z) \in C^8[z_m, z_{m+1}]$, 其中 C^8 是连续可导(最高可以求 8 阶导数)的空间。给出 $\{u_m, u_{m+1}\}$ 的值及它的二阶导数 $\{u''_m, u''_{m+1}\}$ 和它的四阶导数 $\{u^{(4)}_m, u^{(4)}_{m+1}\}$ 的值,就可以得到具有六阶精度的 $u(z)$:

$$u(z_m + \zeta h) = p_5(\zeta) + O(h^6), \zeta \in [0, 1].$$

其中 $p_5(\zeta)$ 为五次 Hermite-Birkhoff 插值多项式:

$$p_5(\zeta) = \left(u_m - \frac{h^2}{6} u''_m + \frac{7h^4}{360} u^{(4)}_m\right) (1-\zeta) + \left(\frac{h^2}{6} u''_m - \frac{h^4}{36} u^{(4)}_m\right) (1-\zeta)^3 + \frac{h^4}{120} u^{(4)}_m (1-\zeta)^5 +$$

$$\left(u_{m+1} - \frac{h^2}{6} u''_{m+1} + \frac{7h^4}{360} u^{(4)}_{m+1}\right) \zeta + \left(\frac{h^2}{6} u''_{m+1} - \frac{h^4}{36} u^{(4)}_{m+1}\right) \zeta^3 + \frac{h^4}{120} u^{(4)}_{m+1} \zeta^5. \quad (12)$$

$p_5(\zeta)$ 是五次 Hermite-Birkhoff 插值多项式,此外 6 个参数唯一地决定了 6 个系数,故多项式 $p_5(\zeta)$ 是唯一的。由于 ζ 的取值,所以插值多项式只在一个区间,而积分区间 $[z_{m-\frac{1}{2}}, z_{m+\frac{1}{2}}]$ 跨两个区间,利用积分区间的可加性把它分成两个部分,如下:

$$k_0^2 \int_{z_{m-\frac{1}{2}}}^{z_{m+\frac{1}{2}}} v(z) u dz = k_0^2 v(z) \left(\int_{z_{m-\frac{1}{2}}}^{z_m} u dz + \int_{z_m}^{z_{m+\frac{1}{2}}} u dz \right).$$

将 $u''_m, u^{(4)}_m$ 代入(12)式可得:

$$u(z_m + \zeta h) = \left[\left(1 + \frac{h^2 k^2}{6} + \frac{7h^4 k^4}{360}\right) u_m - \left(\frac{h^2}{6} + \frac{7h^4 k^2}{360}\right) f_m + \frac{7h^4}{360} f''_m \right] (1-\zeta) -$$

$$\left[\left(\frac{h^2 k^2}{6} + \frac{h^4 k^4}{36}\right) u_m - \left(\frac{h^2}{6} + \frac{h^4 k^2}{36}\right) f_m + \frac{h^4}{36} f''_m \right] (1-\zeta)^3 + \left(\frac{h^4 k^4}{120} u_m - \frac{h^4 k^2}{120} f_m + \frac{h^4}{120} f''_m\right) (1-\zeta)^5 +$$

$$\left[\left(1 + \frac{h^2 k^2}{6} + \frac{7h^4 k^4}{360}\right) u_{m+1} - \left(\frac{h^2}{6} + \frac{7h^4 k^2}{360}\right) f_{m+1} + \frac{7h^4}{360} f''_{m+1} \right] \zeta -$$

$$\left[\left(\frac{h^2 k^2}{6} + \frac{h^4 k^4}{36}\right) u_{m+1} - \left(\frac{h^2}{6} + \frac{h^4 k^2}{36}\right) f_{m+1} + \frac{h^4}{36} f''_{m+1} \right] \zeta^3 + \left(\frac{h^4 k^4}{120} u_{m+1} - \frac{h^4 k^2}{120} f_{m+1} + \frac{h^4}{120} f''_{m+1}\right) \zeta^5 + O(h^6). \quad (13)$$

再对(13)式进行积分可得:

$$\int_{z_m}^{z_{m+\frac{1}{2}}} u dz = h \int_0^{\frac{1}{2}} u(z_m + \zeta h) d\zeta = \left(\frac{3h}{8} + \frac{3h^3 k^2}{128} + \frac{11h^5 k^4}{5\ 120}\right) u_m + \left(\frac{h}{8} + \frac{7h^3 k^2}{384} + \frac{31h^5 k^4}{15\ 360}\right) u_{m+1} -$$

$$\left(\frac{3h^3}{128} + \frac{11h^5 k^2}{5\ 120}\right) f_m - \left(\frac{7h^3}{384} + \frac{31h^5 k^2}{15\ 360}\right) f_{m-1} + \frac{11h^5}{5\ 120} f''_m + \frac{31h^5}{15\ 360} f''_{m+1} + O(h^7). \quad (14)$$

同理可得:

$$\int_{z_{m-\frac{1}{2}}}^{z_m} u dz = h \int_{\frac{1}{2}}^1 u(z_{m-1} + \zeta h) d\zeta = \left(\frac{h}{8} + \frac{7h^3 k^2}{384} + \frac{31h^5 k^4}{15\ 360}\right) u_{m-1} + \left(\frac{3h}{8} + \frac{3h^3 k^2}{128} + \frac{11h^5 k^4}{5\ 120}\right) u_m -$$

$$\left(\frac{7h^3}{384} + \frac{31h^5 k^2}{15\ 360}\right) f_{m-1} - \left(\frac{3h^3}{128} + \frac{11h^5 k^2}{5\ 120}\right) f_m + \frac{31h^5}{15\ 360} f''_{m-1} + \frac{11h^5}{5\ 120} f''_m + O(h^7). \quad (15)$$

将(14)和(15)相加,可得到(5)式的第 2 项为:

$$k_0^2 \int_{z_{m-\frac{1}{2}}}^{z_{m+\frac{1}{2}}} v(z) u dz = k_0^2 v(z) \left(\int_{z_{m-\frac{1}{2}}}^{z_m} u dz + \int_{z_m}^{z_{m+\frac{1}{2}}} u dz \right) = \left(\frac{hk^2}{8} + \frac{7h^3 k^4}{384} + \frac{31h^5 k^6}{15\ 360}\right) u_{m-1} +$$

$$\left(\frac{3hk^2}{4} + \frac{3h^3 k^4}{64} + \frac{11h^5 k^6}{2\ 560}\right) u_m = \left(\frac{hk^2}{8} + \frac{7h^3 k^4}{384} + \frac{31h^5 k^6}{15\ 360}\right) u_{m-1} + \left(\frac{3hk^2}{4} + \frac{3h^3 k^4}{64} + \frac{11h^5 k^6}{2\ 560}\right) u_m +$$

$$\left(\frac{hk^2}{8} + \frac{7h^3 k^4}{384} + \frac{31h^5 k^6}{15\ 360}\right) u_{m+1} - \left(\frac{7h^3 k^2}{384} + \frac{31h^5 k^4}{15\ 360}\right) f_{m-1} - \left(\frac{3h^3 k^2}{64} + \frac{11h^5 k^4}{2\ 560}\right) f_m -$$

$$\left(\frac{7h^3k^2}{384} + \frac{31h^5k^4}{15\,360}\right)f_{m+1} + \frac{31h^5k^2}{15\,360}f_{m-1}'' + \frac{11h^5k^2}{2\,560}f_m'' + \frac{31h^5k^2}{15\,360}f_{m+1}'' + O(h^7)。$$

最后把(5)式的各项逼近合起来,就可以得到如下的六阶格式:

$$au_{m-1} + bu_m + au_{m+1} = g_m。 \quad (16)$$

其中: $a = 1 + \frac{h^2k^2}{6} + \frac{7h^4k^4}{360} + \frac{31h^6k^6}{15\,360}$, $b = -2 + \frac{2h^2k^2}{3} + \frac{2h^4k^4}{45} + \frac{11h^6k^6}{2\,560}$, $g_m = \left(\frac{7h^4k^2}{360} + \frac{31h^6k^4}{15\,360}\right)f_{m-1} + \left(\frac{2h^4k^2}{45} + \frac{11h^6k^4}{2\,560}\right)f_m + \left(\frac{7h^4k^2}{360} + \frac{31h^6k^4}{15\,360}\right)f_{m+1} + \frac{h^3}{24}(f_{m+\frac{1}{2}}' - f_{m-\frac{1}{2}}') + \left(\frac{h^4}{1\,920} - \frac{31h^6k^2}{15\,360}\right)f_{m-1}'' - \left(\frac{h^4}{960} - \frac{11h^6k^2}{2\,560}\right)f_m'' + \left(\frac{h^4}{1\,920} - \frac{31h^6k^2}{15\,360}\right)f_{m+1}'' + hF_m$, 且 $k^2 = k_0^2 v(z)$, $F_m = \int_{z_{m-\frac{1}{2}}}^{z_{m+\frac{1}{2}}} f(z) dz$ 。

1.3 数值算例

为了验证本文格式的精确性以及可靠性,考虑以下具有精确解的 Dirichlet 边界条件的问题。规定误差为

$$L_\infty = \max_{m=1,2,\dots,n+1} |u(z_m) - u_m|, \text{精度为 } P_{\text{order}} = \frac{\ln(L_\infty(M_1)/L_\infty(M_2))}{\ln(M_2/M_1)}。 \text{其中: } M \text{ 为网格数, } u(z_m) \text{ 表示精确解, } u_m \text{ 表示数值解。}$$

表 1~6 分别给出了不同网格下不同算例的 L_∞ 误差以及收敛阶。从这 6 个表中可以看出本文格式在波数 k^2 取不同值时,都能很好的达到六阶精度。波数较小时,精度随网格剖分越细时,结果越好。当波数较大时,本文格式也能达到六阶精度。表 7 对出了文献中的算例进行计算,并与之进行比较,发现本文格式可以达到六阶精度,并且误差比文献中的结果更加小。

算例 1 源项: $f(z) = (k^2 - 1)z \cos(z) - 2 \sin(z) - k^4 \left(z - \frac{1}{2}\right)$, $z \in [-1, 1]$ 。

精确解: $u(z) = z \cos(z) - k^2 \left(z - \frac{1}{2}\right)$ 。

边界条件: $u(-1) = -\cos(-1) - k^2 \left(-\frac{3}{2}\right)$, $u(1) = \cos(1) - k^2 \left(\frac{1}{2}\right)$ 。

表 1 波数 $k^2 = 1$, $k^2 = 5$ 时,在不同网格下的误差和收敛阶

Tab. 1 The error and convergence order under different grids when the wave number is $k^2 = 1, k^2 = 5$

M	$k^2 = 1$		$k^2 = 5$	
	误差	收敛阶	误差	收敛阶
4	5.502 2e-06		4.512 8e-05	
8	8.877 7e-08	5.953 7	7.811 0e-07	5.852 4
16	1.398 2e-09	5.988 5	1.250 2e-08	5.965 3
32	2.230 3e-11	5.970 2	1.972 0e-10	5.986 4
64	3.542 7e-13	5.976 2	3.283 6e-12	5.908 2

表 2 波数 $k^2 = 10$, $k^2 = 30$ 时,在不同网格下的误差和收敛阶

Tab. 2 The error and convergence order under different grids when the wave number is $k^2 = 10, k^2 = 30$

M	$k^2 = 10$		$k^2 = 30$	
	误差	收敛阶	误差	收敛阶
4	0.008 5		4.010 8e-05	
8	5.824 8e-05	7.189 1	1.569 4e-06	4.675 6
16	9.390 1e-07	5.954 9	2.854 3e-08	5.780 9
32	1.483 0e-08	5.984 6	4.800 6e-10	5.893 8
64	2.567 2e-10	5.852 2	7.646 3e-12	5.972 3

表 3 波数 $k^2=50$, $k^2=100$ 时,在不同网格下的误差和收敛阶Tab. 3 The error and convergence order under different grids when the wave number is $k^2=50, k^2=100$

M	$k^2=50$		$k^2=100$	
	误差	收敛阶	误差	收敛阶
8	1.730 5e-06		2.401 6e-06	
16	3.354 5e-08	5.688 9	3.837 3e-08	5.967 8
32	5.790 1e-10	5.856 4	6.861 4e-10	5.805 4
64	8.148 1e-12	6.151 0	1.263 3e-11	5.763 2

算例 2 源项: $f(z) = (k^4 - k^2 \pi^2)z \sin(\pi z) + 2\pi k^2 \cos(\pi z)$, $z \in [-1, 1]$ 。精确解: $u(z) = k^2 z \sin(\pi z)$ 。边界条件: $u(-1) = 0, u(1) = 0$ 。表 4 波数 $k^2=1$, $k^2=5$ 时,在不同网格下的误差和收敛阶Tab. 4 The error and convergence order under different grids when the wave number is $k^2=1, k^2=5$

M	$k^2=1$		$k^2=5$	
	误差	收敛阶	误差	收敛阶
4	0.004 9		0.041 5	
8	9.259 6e-05	5.725 7	8.789 5e-04	5.561 2
16	1.502 2e-06	5.945 8	1.539 1e-05	5.835 6
32	2.368 4e-08	5.987 0	2.442 4e-07	5.977 6
64	3.708 9e-10	5.996 8	3.840 8e-09	5.990 7
128	5.892 6e-12	5.975 9	5.979 4e-11	6.005 3

表 5 波数 $k^2=10$, $k^2=30$ 时,在不同网格下的误差和收敛阶Tab. 5 The error and convergence order under different grids when the wave number is $k^2=10, k^2=30$

M	$k^2=10$		$k^2=30$	
	误差	收敛阶	误差	收敛阶
8	0.003 0		0.036 9	
16	5.263 2e-05	5.832 9	6.758 9e-04	5.770 7
32	8.541 2e-07	5.945 4	1.099 2e-05	5.942 3
64	1.341 3e-08	5.992 7	1.734 6e-07	5.985 7
128	2.113 0e-10	5.998 2	2.717 0e-09	5.996 4
256	4.010 4e-12	5.719 5	4.234 0e-11	6.003 8

表 6 波数 $k^2=50$, $k^2=100$ 时,在不同网格下的误差和收敛阶Tab. 6 The error and convergence order under different grids when the wave number is $k^2=50, k^2=100$

M	$k^2=50$		$k^2=100$	
	误差	收敛阶	误差	收敛阶
8	0.040 5		0.033 7	
16	8.387 4e-04	5.593 6	0.001 0	5.074 7
32	1.394 2e-05	5.910 7	1.799 3e-05	5.796 4
64	2.211 2e-07	5.978 5	2.958 1e-07	5.926 6
128	3.468 3e-09	5.994 5	4.652 4e-09	5.990 6
256	5.855 8e-11	5.888 2	7.214 9e-11	6.010 9

表 7 波数 $k^2=1$, 本文格式与文献[7]格式对比结果Tab. 7 The result of comparison between the format of this paper and reference [7] when the wave number is $k^2=1$

M	文献[7]结果		本文格式(16)	
	误差	收敛阶	误差	收敛阶
20	1.128 3e-05		3.805 8e-08	
40	1.178 7e-07	6.58	5.957 7e-10	6.00
80	9.958 9e-10	6.89	9.338 3e-12	6.00
160	8.066 0e-12	6.95	8.371 1e-14	6.81

2 一维 Helmholtz 方程界面问题的六阶紧致有限差分格式

2.1 问题描述

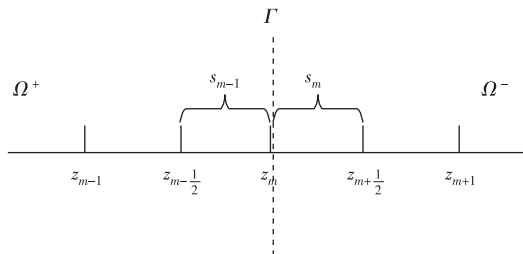
考虑如下 Helmholtz 方程:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + k_0 v(z)u = f(z), z \in D.$$

其中: k_0 是波数, $v(z)$ 是材料系数: $v(z) = \begin{cases} v_1(z), & z \in D_1 \\ v_2(z), & z \in D_2 \end{cases}$, $D_1 = [z_{m-1}, z_m]$, $D_2 = (z_m, z_{m+1}]$, $D = D_1 \cup D_2$, $u(z)$ 满足 Dirichlet 边界条件: $u(z) = g(z)$, $z \in \partial D$. $u(z)$, $f(z)$ 在界面处 $\Gamma \subseteq D$ 满足跳跃条件: $[u]|_\Gamma = C_1$, $[u']|_\Gamma = C_2$, $[f]|_\Gamma = C_3$, $[f']|_\Gamma = C_4$. 记号 $[u]$ 表示 $u(z)$ 在界面 Γ 上的跳跃, 对于 $\forall z \in \Gamma$: $[u]|_\Gamma = \lim_{z \rightarrow \Gamma, z \in D_2} u(z) - \lim_{z \rightarrow \Gamma, z \in D_1} u(z) = u^+ - u^-$. 需要指出, 除了界面上的点, 材料系数 $v(z)$ 分别在区间 D_1, D_2 是连续的.

2.2 界面处的六阶紧致差分格式的构造

对于规则区域的格式离散和(16)式一样, 网格划分见图 2. 下面直接考虑界面处的格式的推导.

图 2 s_m, s_{m-1} 是控制体Fig. 2 s_m, s_{m-1} is control body

对于材料系数 $v(z)$ 是分段常数, 因此在界面处的两个小区间上可以表示为: $v(z) = v_2, z \in (z_m, z_{m+1})$, $v(z) = v_1, z \in (z_{m-1}, z_m)$. 与连续类似, 在区间 $[z_{m-1/2}, z_{m+1/2}]$ 上对方程进行积分:

$$\frac{du}{dz} \Big|_{z_{m-1/2}}^{z_{m+1/2}} + k_0^2 \int_{z_{m-1/2}}^{z_{m+1/2}} v(z)u dz = \int_{z_{m-1/2}}^{z_{m+1/2}} f(z) dz. \quad (17)$$

假设在点 z_m 处存在界面 Γ , (17) 式可改写为:

$$\frac{du}{dz} \Big|_{z_{m-1/2}}^{z_m^-} + \frac{du}{dz} \Big|_{z_m^+}^{z_{m+1/2}} + k_0^2 v_{m-1/2} \int_{z_{m-1/2}}^{z_m^-} u dz + k_0^2 v_{m+1/2} \int_{z_m^+}^{z_{m+1/2}} u dz = \int_{z_{m-1/2}}^{z_m^-} f(z) dz + \int_{z_m^+}^{z_{m+1/2}} f(z) dz. \quad (18)$$

要求解(18)式, 只需求出 $u'_{m \pm 1/2}$ 以及积分项即可. 对于通量 $u'_{m \pm 1/2}$, 利用泰勒公式来逼近, 积分项利用插值多项式来逼近.

对于通量 $u'_{m \pm 1/2}$, 利用公式, 将 u_{m+1}, u_m^+ 在点 $z_{m+1/2}$ 处展开, 将 u_{m-1}, u_m^- 在点 $z_{m-1/2}$ 处展开:

$$u_{m+1} = u_{m+1/2} + \frac{h}{2} u'_{m+1/2} + \frac{h^2}{8} u''_{m+1/2} + \frac{h^3}{48} u^{(3)}_{m+1/2} + \frac{h^4}{384} u^{(4)}_{m+1/2} + \frac{h^5}{3840} u^{(5)}_{m+1/2} + \frac{h^6}{46080} u^{(6)}_{m+1/2} + O(h^7), \quad (19)$$

$$u_m^+ = u_{m+\frac{1}{2}} - \frac{h}{2} u'_{m+\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{8} u''_{m+\frac{1}{2}} - \frac{h^3}{48} u^{(3)}_{m+\frac{1}{2}} + \frac{h^4}{384} u^{(4)}_{m+\frac{1}{2}} - \frac{h^5}{3\,840} u^{(5)}_{m+\frac{1}{2}} + \frac{h^6}{46\,080} u^{(6)}_{m+\frac{1}{2}} + O(h^7), \quad (20)$$

$$u_{m-1} = u_{m-\frac{1}{2}} - \frac{h}{2} u'_{m-\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{8} u''_{m-\frac{1}{2}} - \frac{h^3}{48} u^{(3)}_{m-\frac{1}{2}} + \frac{h^4}{384} u^{(4)}_{m-\frac{1}{2}} - \frac{h^5}{3\,840} u^{(5)}_{m-\frac{1}{2}} + \frac{h^6}{46\,080} u^{(6)}_{m-\frac{1}{2}} + O(h^7), \quad (21)$$

$$u_m^- = u_{m-\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} u'_{m-\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{8} u''_{m-\frac{1}{2}} + \frac{h^3}{48} u^{(3)}_{m-\frac{1}{2}} + \frac{h^4}{384} u^{(4)}_{m-\frac{1}{2}} + \frac{h^5}{3\,840} u^{(5)}_{m-\frac{1}{2}} + \frac{h^6}{46\,080} u^{(6)}_{m-\frac{1}{2}} + O(h^7). \quad (22)$$

由(19)~(22)式可得:

$$u'_{m+\frac{1}{2}} = \frac{u_{m+1} - u_m^+}{h} - \frac{h^2}{24} u^{(3)}_{m+\frac{1}{2}} - \frac{h^4}{1\,920} u^{(5)}_{m+\frac{1}{2}} + O(h^6), \quad (23)$$

$$u'_{m-\frac{1}{2}} = \frac{u_m^- - u_{m-1}}{h} - \frac{h^2}{24} u^{(3)}_{m-\frac{1}{2}} - \frac{h^4}{1\,920} u^{(5)}_{m-\frac{1}{2}} + O(h^6). \quad (24)$$

对于通量 $u'_{m\pm\frac{1}{2}}$ 的求解,此时只需求出 $u_{m\pm\frac{1}{2}}^{(3)}$ 和 $u_{m\pm\frac{1}{2}}^{(5)}$,利用原方程,可以得到:

$$u''_{m+1} = -k_0^2 v_2 u_{m+1} + f_{m+1}, (u''_m)^+ = -k_0^2 v_2 u_m^+ + f_m^+, (u''_m)^- = -k_0^2 v_1 u_m^- + f_m^-, u''_{m-1} = -k_0^2 v_1 u_{m-1} + f_{m-1}.$$

则:

$$u_{m+\frac{1}{2}}^{(3)} = -k_0^2 v_2 u'_{m+\frac{1}{2}} + f'_{m+\frac{1}{2}}, \quad (25)$$

$$u_{m-\frac{1}{2}}^{(3)} = -k_0^2 v_1 u'_{m-\frac{1}{2}} + f'_{m-\frac{1}{2}}, \quad (26)$$

$$u_{m+\frac{1}{2}}^{(5)} = k_0^4 v_2^2 u'_{m+\frac{1}{2}} - k_0^2 v_2 f'_{m+\frac{1}{2}} + f_{m+\frac{1}{2}}^{(3)}, \quad (27)$$

$$u_{m-\frac{1}{2}}^{(5)} = k_0^4 v_1^2 u'_{m-\frac{1}{2}} - k_0^2 v_1 f'_{m-\frac{1}{2}} + f_{m-\frac{1}{2}}^{(3)}. \quad (28)$$

把(25)和(27)式代入(23)式可得:

$$\begin{aligned} u'_{m+\frac{1}{2}} &= \frac{u_{m+1} - u_m^+}{h} - \frac{h^2}{24} (-k_0^2 v_2 u'_{m+\frac{1}{2}} + f'_{m+\frac{1}{2}}) - \frac{h^4}{1\,920} (k_0^4 v_2^2 u'_{m+\frac{1}{2}} - k_0^2 v_2 f'_{m+\frac{1}{2}} + f_{m+\frac{1}{2}}^{(3)}) + O(h^6) = \\ &\left(1 + \frac{h^2 k_0^2 v_2}{24} + \frac{7h^4 k_0^4 v_2^2}{5\,760}\right) \frac{u_{m+1} - u_m^+}{h} - \frac{7h^3 k_0^2 v_2}{5\,760} (f_{m+1} - f_m^+) - \frac{h^2}{24} f'_{m+\frac{1}{2}} - \frac{h^3}{1\,920} (f_{m+1}'' - (f_m'')^+) + O(h^6). \end{aligned} \quad (29)$$

同理把(26)和(28)式代入(24)式可得:

$$\begin{aligned} u'_{m-\frac{1}{2}} &= \left(1 + \frac{h^2 k_0^2 v_1}{24} + \frac{7h^4 k_0^4 v_1^2}{5\,760}\right) \frac{u_m^- - u_{m-1}}{h} - \frac{7h^3 k_0^2 v_1}{5\,760} (f_m^- - f_{m-1}) - \\ &\frac{h^2}{24} f'_{m-\frac{1}{2}} - \frac{h^3}{1\,920} ((f_m'')^- - f_{m-1}'') + O(h^6). \end{aligned} \quad (30)$$

将(29),(30)两项加起来可以得到(18)式的前两项近似:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dz} \Big|_{z_{m-\frac{1}{2}}^-} + \frac{du}{dz} \Big|_{z_{m+\frac{1}{2}}^+} &= (u'_m)^- - u'_{m-\frac{1}{2}} + u'_{m+\frac{1}{2}} - (u'_m)^+ = u'_{m+\frac{1}{2}} - u'_{m-\frac{1}{2}} - [u'] = \\ &\left(1 + \frac{h^2 k_0^2 v_2}{24} + \frac{7h^4 k_0^4 v_2^2}{5\,760}\right) \frac{u_{m+1} - u_m^+}{h} - \frac{7h^3 k_0^2 v_2}{5\,760} (f_{m+1} - f_m^+) - \frac{h^2}{24} f'_{m+\frac{1}{2}} - \frac{h^3}{1\,920} (f_{m+1}'' - (f_m'')^+) - \\ &\left(1 + \frac{h^2 k_0^2 v_1}{24} + \frac{7h^4 k_0^4 v_1^2}{5\,760}\right) \frac{u_m^- - u_{m-1}}{h} + \frac{7h^3 k_0^2 v_1}{5\,760} (f_m^- - f_{m-1}) + \frac{h^2}{24} f'_{m-\frac{1}{2}} + \frac{h^3}{1\,920} ((f_m'')^- - f_{m-1}'') - [u'] + O(h^6). \end{aligned}$$

接下来,为了求解(18)式中的两个积分项,使用五次插值多项式来近似被积函数 $u(z)$,使它保持六阶精度。

对界面两侧分别用插值多项式进行积分,可得到:

$$\begin{aligned} \int_{z_{m-\frac{1}{2}}}^{z_m} u dz &= \left(\frac{h}{8} + \frac{7h^3 k_0^2 v_1}{384} + \frac{31h^5 k_0^4 v_1^2}{15\,360}\right) u_{m-1} + \left(\frac{3h}{8} + \frac{3h^3 k_0^2 v_1}{128} + \frac{11h^5 k_0^4 v_1^2}{5\,120}\right) u_m^- - \\ &\left(\frac{7h^3}{384} + \frac{31h^5 k_0^2 v_1}{15\,360}\right) f_{m-1} - \left(\frac{3h^3}{128} + \frac{11h^5 k_0^2 v_1}{5\,120}\right) f_m^- + \frac{31h^5}{15\,360} f_{m-1}'' + \frac{11h^5}{5\,120} (f_m'')^- + O(h^7). \\ \int_{z_m}^{z_{m+\frac{1}{2}}} u dz &= \left(\frac{3h}{8} + \frac{3h^3 k_0^2 v_2}{128} + \frac{11h^5 k_0^4 v_2^2}{5\,120}\right) u_m^+ + \left(\frac{h}{8} + \frac{7h^3 k_0^2 v_2}{384} + \frac{31h^5 k_0^4 v_2^2}{15\,360}\right) u_{m+1} - \\ &\left(\frac{3h^3}{128} + \frac{11h^5 k_0^2 v_2}{5\,120}\right) f_m^+ - \left(\frac{7h^3}{384} + \frac{31h^5 k_0^2 v_2}{15\,360}\right) f_{m+1} + \frac{11h^5}{5\,120} (f_m'')^+ + \frac{31h^5}{15\,360} f_{m+1}'' + O(h^7). \end{aligned}$$

最后把(23)式里面的各项近似合并起来,可得到界面处的六阶格式:

$$a_1 u_{m-1} + c_1 u_m^- + c_2 u_m^+ + a_2 u_{m+1} - [u'] = g_m.$$

由于 $[u] = (u_m^+ - u_m^-)$, 所以 $a_1 u_{m-1} + (c_1 + c_2) u_m^- + a_2 u_{m+1} + c_2 [u] - [u'] = g_m$, 再利用跳跃条件 $[f] = f_m^+ - f_m^-$, $[f''] = (f_m'')^+ - (f_m'')^-$, 故 $f_m^+ = [f] + f_m^-$, $(f_m'')^+ = [f''] + (f_m'')^-$. 将 g_m 转化为:

$$\begin{aligned} g_m' &= \left(\frac{7h^4 k_1^2}{360} + \frac{31h^6 k_1^4}{15 \cdot 360} \right) f_{m-1} + \left[\frac{h^4}{45} (k_1^2 + k_2^2) + \frac{11h^6}{5 \cdot 120} (k_1^4 + k_2^4) \right] f_m^- + \left(\frac{7h^4 k_2^2}{360} + \frac{31h^6 k_2^4}{15 \cdot 360} \right) f_{m+1} + \\ &\frac{h^3}{24} (f_{m+\frac{1}{2}}' - f_{m-\frac{1}{2}}') + \left(\frac{h^4}{1 \cdot 920} - \frac{31h^6 k_1^2}{15 \cdot 360} \right) f_{m-1}'' - \left[\frac{h^4}{960} - \frac{11h^6}{5 \cdot 120} (k_1^2 + k_2^2) \right] (f_m'')^- + \left(\frac{h^4}{1 \cdot 920} - \frac{31h^6 k_2^2}{15 \cdot 360} \right) f_{m+1}'' + \\ &(I_{FM1} - F_{m-\frac{1}{2}}) + (F_{m+\frac{1}{2}} - I_{FM2}) + \left(\frac{h^4 k_2^2}{45} + \frac{11h^6 k_2^4}{5 \cdot 120} \right) [f] - \left(\frac{h^4}{1 \cdot 920} - \frac{11h^6 k_2^2}{5 \cdot 120} \right) [f''] - c_2 [u] + h[u']. \end{aligned}$$

因此,界面处的六阶格式为:

$$a_1 u_{m-1} + c b u_m^- + a_2 u_{m+1} = g_m'. \quad (31)$$

其中:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + \frac{h^2 k_1^2}{6} + \frac{7h^4 k_1^4}{360} + \frac{31h^6 k_1^6}{15 \cdot 360}, c_1 = -1 + \frac{h^2 k_1^2}{3} + \frac{h^4 k_1^4}{45} + \frac{11h^6 k_1^6}{5 \cdot 120}, \\ c_2 &= -1 + \frac{h^2 k_2^2}{3} + \frac{h^4 k_2^4}{45} + \frac{11h^6 k_2^6}{5 \cdot 120}, a_2 = 1 + \frac{h^2 k_2^2}{6} + \frac{7h^4 k_2^4}{360} + \frac{31h^6 k_2^6}{15 \cdot 360}, b = c_1 + c_2, \\ g_m' &= \left(\frac{7h^4 k_1^2}{360} + \frac{31h^6 k_1^4}{15 \cdot 360} \right) f_{m-1} + \left[\frac{h^4}{45} (k_1^2 + k_2^2) + \frac{11h^6}{5 \cdot 120} (k_1^4 + k_2^4) \right] f_m^- + \left(\frac{7h^4 k_2^2}{360} + \frac{31h^6 k_2^4}{15 \cdot 360} \right) f_{m+1} + \\ &\frac{h^3}{24} (f_{m+\frac{1}{2}}' - f_{m-\frac{1}{2}}') + \left(\frac{h^4}{1 \cdot 920} - \frac{31h^6 k_1^2}{15 \cdot 360} \right) f_{m-1}'' - \left[\frac{h^4}{960} - \frac{11h^6}{5 \cdot 120} (k_1^2 + k_2^2) \right] (f_m'')^- + \left(\frac{h^4}{1 \cdot 920} - \frac{31h^6 k_2^2}{15 \cdot 360} \right) f_{m+1}'' + \\ &(I_{FM1} - F_{m-\frac{1}{2}}) + (F_{m+\frac{1}{2}} - I_{FM2}) + \left(\frac{h^4 k_2^2}{45} + \frac{11h^6 k_2^4}{5 \cdot 120} \right) [f] - \left(\frac{h^4}{1 \cdot 920} - \frac{11h^6 k_2^2}{5 \cdot 120} \right) [f''] - c_2 [u] + h[u']. \end{aligned}$$

这里 I_{FM1} 和 I_{FM2} 分别表示 $f(z)$ 在点 z_m^- , z_m^+ 处的积分值, $k_1^2 = k_0^2 v_{m-\frac{1}{2}}$, $k_2^2 = k_0^2 v_{m+\frac{1}{2}}$, $[u'] = (u_m' - u_{m-1}') - (u_{m+1}' - u_m')$.

2.3 数值算例

为了验证本文格式的精确性以及可靠性,考虑以下具有精确解的 Dirichlet 边界条件的问题. 规定误差为

$$L_\infty = \max_{m=1,2,\dots,n+1} |u(z_m) - u_m|, \text{精度为 } P_{\text{order}} = \frac{\ln(L_\infty(M_1)/L_\infty(M_2))}{\ln(M_2/M_1)}. \text{ 其中: } M \text{ 为网格数, } u(z_m) \text{ 表示精确解, } u_m$$

表示数值解。

$$\text{算例 3 源项: } f(z) = \begin{cases} (k_1^2 - 25)z \cos(5z) - 10 \sin(5z) - k_1^4 \left(z - \frac{1}{2} \right), & z \in [-1, 0] \\ (k_2^2 - 25)z \cos(5z) - 10 \sin(5z) - k_1^4 \left(z + \frac{1}{2} \right), & z \in (0, 1] \end{cases}.$$

$$\text{精确解: } u(z) = \begin{cases} z \cos(z) - k_1^2 \left(z - \frac{1}{2} \right), & z \in [-1, 0] \\ z \cos(z) - k_2^2 \left(z + \frac{1}{2} \right), & z \in (0, 1] \end{cases}.$$

$$\text{边界条件: } u(-1) = -\cos(-5) - k_1^2 \left(-\frac{3}{2} \right), u(1) = \cos(5) + k_2^2 \left(\frac{3}{2} \right).$$

$$\text{跳跃条件: } [u] = \frac{1}{2} (k_2^2 - k_1^2), [u'] = k_2^2 + k_1^2, [f] = \frac{1}{2} (k_2^4 - k_1^4).$$

表 8~12 分别给出了不同网格下不同间断的 L_∞ 误差. 在波数 k^2 为分段波数时, 本文的界面格式(31)都能很好地达到六阶精度. 随着 k^2 的差值逐渐增大时, 本文格式也可以达到六阶精度. 当跳跃条件 $[u]$, $[u']$ 含有波数 k^2 时, 格式仍能很好的达到六阶精度. 当 $k_1^2 < k_2^2$ 时, 本文的格式能达到六阶精度, 当 $k_1^2 > k_2^2$ 时, 如表 12 所示, 本文格式的误差以及精度都符合理论推导. 由图 3~4 可以看出, 数值解可以很好地逼近精确解, 不论 k_1^2 , k_2^2 的大小关系。

表 8 在系数间断($k_1^2=1, k_2^2=5; k_1^2=1, k_2^2=10$)的情况下,在不同网格下的误差和收敛阶Tab. 8 The error and convergence order under different meshes with discontinuous coefficients ($k_1^2=1, k_2^2=5; k_1^2=1, k_2^2=10$)

M	$k_1^2=1, k_2^2=5$		$k_1^2=1, k_2^2=10$	
	误差	收敛阶	误差	收敛阶
8	0.003 4		0.002 9	
16	5.473 9e-05	5.956 8	5.016 5e-05	5.853 2
32	8.632 2e-07	5.986 7	8.279 9e-07	5.920 9
64	1.352 4e-08	5.996 1	1.300 0e-08	5.993 0
128	2.142 6e-10	5.980 0	2.028 7e-10	6.001 8

表 9 在系数间断($k_1^2=1, k_2^2=30; k_1^2=1, k_2^2=50$)的情况下,在不同网格下的误差和收敛阶Tab. 9 The error and convergence order under different meshes with discontinuous coefficients ($k_1^2=1, k_2^2=30; k_1^2=1, k_2^2=50$)

M	$k_1^2=1, k_2^2=30$		$k_1^2=1, k_2^2=50$	
	误差	收敛阶	误差	收敛阶
8	0.013 2		0.010 2	
16	2.447 8e-04	5.752 9	2.381 3e-04	5.420 7
32	4.001 4e-06	5.934 8	4.056 9e-06	5.875 2
64	6.356 9e-08	5.976 0	6.472 7e-08	5.969 9
128	9.984 2e-10	5.992 5	1.017 5e-09	5.991 3
256	2.246 4e-11	5.474 0	1.730 5e-11	5.877 7

表 10 在系数间断($k_1^2=25, k_2^2=100; k_1^2=25, k_2^2=400$)的情况下,在不同网格下的误差和收敛阶Tab. 10 The error and convergence order under different meshes with discontinuous coefficients ($k_1^2=25, k_2^2=100; k_1^2=25, k_2^2=400$)

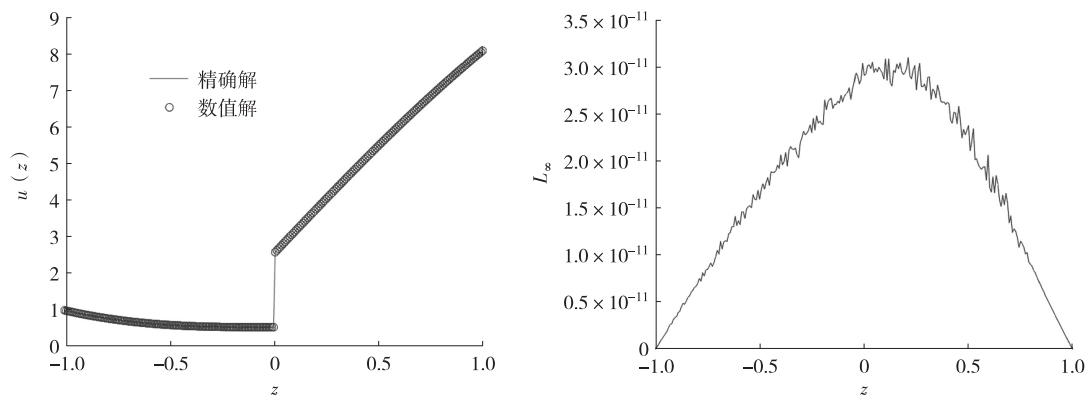
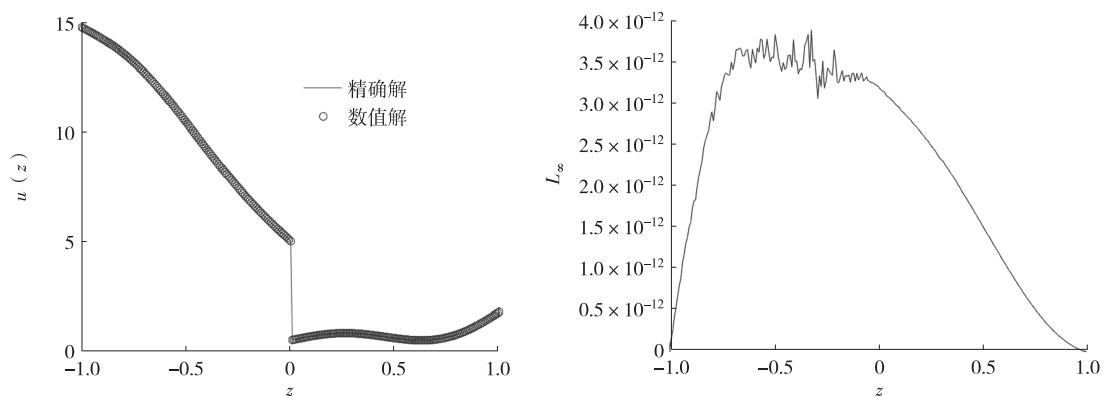
M	$k_1^2=25, k_2^2=100$		$k_1^2=25, k_2^2=400$	
	误差	收敛阶	误差	收敛阶
8	0.006 9		0.005 8	
16	1.618 2e-04	5.414 1	1.567 7e-04	5.209 3
32	3.004 9e-06	5.750 9	4.793 7e-06	5.031 4
64	4.864 6e-08	5.948 9	8.540 4e-08	5.810 7
128	7.687 8e-10	5.983 6	1.368 0e-09	5.964 2

表 11 在系数间断($k_1^2=25, k_2^2=500; k_1^2=100, k_2^2=400$)的情况下,在不同网格下的误差和收敛阶Tab. 11 The error and convergence order under different meshes with discontinuous coefficients ($k_1^2=25, k_2^2=500; k_1^2=100, k_2^2=400$)

M	$k_1^2=25, k_2^2=500$		$k_1^2=100, k_2^2=400$	
	误差	收敛阶	误差	收敛阶
8	0.005 8		0.009 8	
16	7.752 0e-05	6.225 3	3.292 9e-04	4.895 4
32	1.542 6e-06	5.651 1	3.796 8e-06	6.438 4
64	2.759 8e-08	5.804 7	6.176 6e-08	5.941 8
128	4.444 0e-10	5.956 6	9.635 4e-10	6.002 3

表 12 在系数间断($k_1^2=100, k_2^2=5; k_1^2=10, k_2^2=1$)的情况下,在不同网格下的误差和收敛阶Tab. 12 The error and convergence order under different meshes with discontinuous coefficients ($k_1^2=100, k_2^2=5; k_1^2=10, k_2^2=1$)

M	$k_1^2=100, k_2^2=5$		$k_1^2=10, k_2^2=1$	
	误差	收敛阶	误差	收敛阶
8	0.004 4		0.002 9	
16	1.184 1e-04	5.215 6	5.016 5e-05	5.853 2
32	2.140 9e-06	5.789 4	8.279 9e-07	5.920 9
64	3.466 6e-08	5.948 6	1.300 1e-08	5.992 9
128	5.460 0e-10	5.988 5	2.039 1e-10	5.994 5
256	1.307 4e-11	5.384 1	3.888 4e-12	5.712 6

图 3 波数 $k_1^2=1, k_2^2=5$, 网格数为 256 时的数值解、精确解以及误差图Fig. 3 Numerical solution, exact solution and error diagram with wave number $k^2=1, k^2=5$ and mesh number 256图 4 波数 $k_1^2=10, k_2^2=1$, 网格数为 256 时的数值解、精确解以及误差图Fig. 4 Numerical solution, exact solution and error diagram with wave number $k^2=10, k^2=1$ and mesh number 256

3 结论

本文利用有限体积方法对 Helmholtz 方程进行离散,构造了带有连续波数以及不连续波数的 Helmholtz 方程的六阶紧致有限差分格式。当波数连续时直接使用格式(16),当波数为分段常数,即存在界面时,需要对界面两侧以及界面处单独处理,界面负侧使用连续格式(16),对于界面正侧的点需要利用跳跃条件转化为负侧的点,进行修正。对于界面处则使用界面格式(31),从而构造出一种新的六阶三点紧致格式。最后通过数值算例验证了本文格式的有效性和精确性。此外,本文提出的方法可直接推广到高维情况,这在后续工作中会进一步研究。

参考文献:

- [1] PLESSIX R E, MULDER W A. Frequency-domain finite-difference amplitude-preserving migration[J]. Geophysical Journal International, 2004(3): 975-987.
- [2] MANOHAR R P, STEPHENSON J W. Single cell high order difference methods for the Helmholtz equation[J]. Journal of Computational Physics, 1983, 51(3): 444-453.
- [3] SINGER I, TURKEL E. High-order finite difference methods for the Helmholtz equation[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, 163(1/2/3/4): 343-358.
- [4] NABAVI M, SIDDIQUI M H K, DARGAHI J. A new 9-point sixth-order accurate compact finite-difference method for the Helmholtz equation[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 307(3/4/5): 972-982.
- [5] FENG X F. A high-order compact scheme for the one-dimensional Helmholtz equation with a discontinuous coefficient[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2012, 89(5): 618-624.
- [6] FENG X F, LI Z L, QIAO Z. High order compact finite difference schemes for the Helmholtz equation with discontinuous coefficients[J]. Journal of Computer Mathematics, 2011, 29(3): 324-340.
- [7] 王芝, 葛永斌. 一种求解变波数 Helmholtz 方程的高精度有限差分格式[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2019, 36(5): 92-97.
WANG Z, GE Y B. A high-order compact difference method for solving the Helmholtz with variable wave number[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2019, 36(5): 92-97.
- [8] 孙晓峰, 姜子文. 一维 Helmholtz 方程的四阶紧致有限体积方法[J]. 山东师范大学学报(自然科学版), 2016, 31(4): 7-11.
SUN X F, JIANG Z W. Fourth-order compact finite volume schemes for 1D Helmholtz equation[J]. Journal of Shandong Normal University (Natural Science), 2016, 31(4): 7-11.
- [9] 曹姣姣. 求解 Helmholtz 方程界面问题的有限体积方法研究[D]. 银川: 宁夏大学, 2015.
CAO J J. Finite volume method for solving the Helmholtz equation with interface problem[D]. Yinchuan: Ningxia University, 2015.
- [10] BARUCH G, FIBICH G, TSYNKOV S, et al. Fourth order schemes for time-harmonic wave equations with discontinuous coefficients[J]. Communications in Computational Physics, 2008, 5(2/3/4): 442-455.

Modified Finite Volume Method for Solving Helmholtz Equation under Specialized Conditions

ZHANG Juan, FENG Xiufang

(School of Mathematics and Statistics, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

Abstract: [Purposes] Since the solutions of partial differential equations derived from interface problems are generally discontinuous when pass through the interface, most of the traditional numerical methods are not suitable for solving interface problems, while the finite volume method is effective for solving interface problems because of its local conservation of physical quantities and simple calculation. Therefore, the finite volume method is of great significance to solve the interface problem. [Methods] Firstly, a modified finite volume method is used to approximate the Helmholtz equation with discontinuous wave numbers and singular source terms. Then, the flux is expanded by Taylor series, and the integral term is approximated by polynomial interpolation. For the interface problem, the points on the negative side are transformed to the positive side by using the jump condition. [Findings] The scheme can achieve sixth order accuracy at both continuous wave number and interface. [Conclusions] Numerical experiments verify the effectiveness and accuracy of the scheme.

Keywords: Helmholtz equation; finite volume method; compact scheme; discontinuous wave number

(责任编辑 许 甲)