

具有 DeJong 学习效应的两台机器流水作业排序问题^{*}

柏孟卓¹, 温学兵²

(1. 沈阳师范大学 数学与系统科学学院; 2. 沈阳师范大学 学报编辑部, 沈阳 110035)

摘要:【目的】讨论具有 DeJong 学习效应的两台机器流水作业排序问题。【方法】目标函数是极小化总完工时间。【结果】首先对一般情况,证明了 SPT 算法的界为 2。然后考虑了两种特殊情况:1) 两个工序的加工时间和与第 2 台机器工序实际加工时间同序;2) 第 2 台机器工序的加工时间相同。对于第 1 种特殊情况,给出了 SPT 算法一个改进的界。对于第 2 种特殊情况,给出了最优算法。【结论】推广了已有文献的结果。

关键词: 排序; DeJong 学习效应; 流水作业; SPT 规则

中图分类号: O223

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2021)05-0001-05

1 研究背景

在经典的排序模型中,通常假设工件的加工时间是固定的常数。在许多实际问题中,常常不能满足这一假设。工件的实际加工可能因为加工位置的变化而改变。在一个排序模型中,如果工件的加工位置越往后所需的加工时间越少,则称为具有学习效应。在 Ho 等人^[1]首先研究了具有学习效应的排序问题之后,具有学习效应的排序问题受到越来越多研究者的关注^[2-8]。Biskup^[9]对具有学习效应的排序问题做了综述。在众多具有学习效应的模型中,有一类模型更加具有实际意义,它是 DeJong^[10]提出的。Wang 等人^[11]首先将 DeJong 学习效应与排序问题结合,研究了具有 DeJong 学习效应的单机排序问题。文献[12]讨论了平行机极小化最大完工时间问题,给出了分支定界算法和贪婪算法。文献[13]对平行机极小化最大完工时间问题给出了全多项式近似策略,文献[14]对这个全多项式近似策略进行了改进。文献[15]研究了具有 DeJong 学习效应、并且机器有不可用时间的单机排序问题。上述研究均集中在单机或平行机模型,本文则考虑具有 DeJong 学习效应的两台机器流水作业排序问题。

问题可描述如下:有 n 个独立的工件 $J_1, J_2, \dots, J_n$, 每个工件 J_j 均有两道工序,按照同一顺序依次在两台机器 M_1, M_2 上加工。每台机器同一时间内只能加工一个工件,每个工件在同一时刻只能在一台机器上加工。工件 J_j 在 M_1 和 M_2 上的基本加工时间分别为 a_j 和 b_j ($j=1, 2, \dots, n$)。不失一般性,设 $a_1 + b_1 \leq a_2 + b_2 \leq \dots \leq a_n + b_n$ 。工件的加工具有 DeJong 学习效应,即:如果工件 J_j 排在第 r 个位置加工,则工件在两台机器上的实际加工时间分别为 $a_{j,[r]} = a_j[M + (1-M)r^a]$ 和 $b_{j,[r]} = b_j[M + (1-M)r^a]$ 。其中: a ($a \leq 0$)是与工件无关的学习因子, M ($0 \leq M \leq 1$)是确定的常数。目标函数是极小化总完工时间。用三参数表示法,问题可记为:

$$F2 \mid DLE \mid \sum C_j。$$

为叙述方便,对于给定的排序 $\pi = [J_{[1]}, J_{[2]}, \dots, J_{[n]}]$, $J_{[j]}$ 在 M_1 和 M_2 上的完工时间分别记为 $C_{1,[j]}(\pi)$ 和 $C_{2,[j]}(\pi)$, $J_{[j]}$ 的完工时间为 $C_{[j]}(\pi) = C_{2,[j]}(\pi)$ 。在不引起混淆的情况下,分别简记为 $C_{1,[j]}$, $C_{2,[j]}$ 和 $C_{[j]}$ 。此外,为叙述方便,记 $D(r) = [M + (1-M)r^a]$ 。

SPT 排序 工件按加工时间 $(a_j + b_j)$ 不减排列,即 $\pi = [J_1, J_2, \dots, J_n]$ 。

2 SPT 排序的界

当 DeJong 学习效应模型中的参数 $M=1$ 时,即为经典排序问题 $F2 \parallel \sum C_j$, 因此,问题 $F2 \parallel \sum C_j$ 是问题

* 收稿日期:2021-01-07 修回日期:2021-03-04 网络出版时间:2021-06-30 09:34

资助项目:国家自然科学基金(No. 11572146);辽宁省教育厅科学研究项目(No. LJC202002)

第一作者简介:柏孟卓,女,讲师,博士,研究方向为排序理论,E-mail:bmz_1978@163.com

网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20210630.0843.002.html

$F2 | DLE | \sum C_j$ 的特殊情况。由于问题 $F2 | \sum C_j$ 是强 NP-难的^[16], 因此问题 $F2 | DLE | \sum C_j$ 必定是强 NP-难的。由于 SPT 排序是单机问题 $1 | \sum C_j$ 的最优排序, 在讨论相应流水作业问题时通常把 SPT 排序作为近似解。

下面针对问题 $F2 | DLE | \sum C_j$, 分析 SPT 排序的误差界。

引理 1 设 $x_j, y_j (j=1, 2, \dots, n)$ 满足 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n, y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$, 则 $\sum_{j=1}^n x_j y_j$ 使和式 $\sum_{j=1}^n x_j y_{\sigma(j)}$ 取到最小值, 其中 $(\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \dots, \sigma_n)$ 是 $(1, 2, \dots, n)$ 的任意排列。

定理 1 对于问题 $F2 | DLE | \sum C_j$, SPT 排序的界为 2。

证明 设 SPT 排序为 $\pi = [J_1, J_2, \dots, J_n]$, 因此 $C_j(\pi) \leq \sum_{k=1}^j (a_k + b_k) D(k)$, 从而有:

$$\sum_{j=1}^n C_j(\pi) \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j (a_k + b_k) D(k) = \sum_{j=1}^n (n-j+1)(a_j + b_j) D(j).$$

设最优排序为 $\pi^* = [J_{[1]}, J_{[2]}, \dots, J_{[n]}]$, 则 $C_j(\pi^*) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^j (a_{[k]} + b_{[k]}) D(k)$, 所以有:

$$\sum_{j=1}^n C_j(\pi^*) \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j (a_{[k]} + b_{[k]}) D(k) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (n-j+1)(a_{[j]} + b_{[j]}) D(j).$$

因为 $(n-j+1)D(j)$ 关于 j 不减, 所以由引理 1, 有:

$$\sum_{j=1}^n (n-j+1)(a_{[j]} + b_{[j]}) D(j) \geq \sum_{j=1}^n (n-j+1)(a_j + b_j) D(j),$$

因此 $\sum_{j=1}^n C_j(\pi^*) \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (n-j+1)(a_j + b_j) D(j)$ 。由此得 $\sum_{j=1}^n C_j(\pi) \leq 2 \sum_{j=1}^n C_j(\pi^*)$ 。证毕

对于问题 $F2 | \sum C_j$, Hoogeveen 等人^[17]证明了: 即使假定 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, 仍然是强 NP-难的, 因此问题 $F2 | DLE | \sum C_j$ 也是强 NP-难的。可见分析特殊情况下 SPT 算法的界很有意义。下面考虑比 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 更广泛的一种情况: 两个工序的加工时间和与第 2 台机器工序实际加工时间同序。即: $a_1 + b_1 \leq a_2 + b_2 \leq \dots \leq a_n + b_n$, 意味着 $b_1 D(1) \leq b_2 D(2) \leq \dots \leq b_n D(n)$ 。

先给出这一情况下 $F2 | DLE | \sum C_j$ 最优值的下界。

定理 2 设 π^* 是 $F2 | DLE | \sum C_j$ 的最优解, 若 $a_j + b_j$ 与 $b_j D(j)$ 同序, 则:

$$\sum_{j=1}^n C_j(\pi^*) \geq \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^n (n-j+1)(a_j + b_j) D(j) + \sum_{j=1}^n b_j D(j) + n \min_{1 \leq j \leq n} \{a_j\} \right].$$

证明 设 $\pi = [J_{[1]}, J_{[2]}, \dots, J_{[n]}]$ 是一个给定的排序, 则有:

$$C_{2,[1]} = C_{1,[1]} + b_{[1]} D(1) = a_{[1]} + b_{[1]}, C_{2,[j]} = \max\{C_{2,[j-1]}, C_{1,[j]}\} + b_{[j]} D(j) (j=2, \dots, n).$$

记 $C_{2,[0]} = 0$, 因此, $C_{2,[j]} \geq C_{2,[j-1]} + b_{[j]} D(j)$ 且 $C_{2,[j]} \geq C_{1,[j]} + b_{[j]} D(j) (j=1, 2, \dots, n)$ 。

一方面, 由于 $C_{2,[j]} \geq C_{2,[j-1]} + b_{[j]} D(j)$, 所以有:

$$C_{2,[j]} \geq C_{2,[j-1]} + b_{[j]} D(j) \geq C_{2,[j-2]} + \sum_{k=j-1}^j b_{[k]} D(k) \geq \dots \geq C_{2,[1]} + \sum_{k=2}^j b_{[k]} D(k) = a_{[1]} + \sum_{k=1}^j b_{[k]} D(k).$$

因此, 有:

$$\sum_{j=1}^n C_j(\pi) \geq n a_{[1]} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j b_{[k]} D(k) = n a_{[1]} + \sum_{j=1}^n (n-j+1) b_{[j]} D(j). \quad (1)$$

另一方面, 由于 $C_{2,[j]} \geq C_{1,[j]} + b_{[j]} D(j)$, 所以:

$$C_{2,[j]} \geq C_{1,[j-1]} + a_{[j]} D(j) + b_{[j]} D(j) \geq C_{1,[j-2]} + \sum_{k=j-1}^j a_{[k]} D(k) + b_{[j]} D(j) \geq \dots \geq$$

$$C_{1,[1]} + \sum_{k=2}^j a_{[k]} D(k) + b_{[j]} D(j) = \sum_{k=1}^j a_{[k]} D(k) + b_{[j]} D(j).$$

因此, 有:

$$\sum_{j=1}^n C_j(\pi) \geq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j a_{[k]} D(k) + \sum_{j=1}^n b_{[j]} D(j) = \sum_{j=1}^n (n-j+1) a_{[j]} D(j) + \sum_{j=1}^n b_{[j]} D(j). \quad (2)$$

将(1),(2)式相加,得: $2 \sum_{j=1}^n C_j(\pi) \geq na_{[1]} + \sum_{j=1}^n (n-j+1)(a_{[j]} + b_{[j]}) D(j) + \sum_{j=1}^n b_{[j]} D(j)$ 。

注意到 $a_{[1]} \geq \min_{1 \leq j \leq n} \{a_j\}$, 所以有:

$$\sum_{j=1}^n C_j(\pi) \geq \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^n (n-j+1)(a_{[j]} + b_{[j]}) D(j) + \sum_{j=1}^n b_{[j]} D(j) + n \min_{1 \leq j \leq n} \{a_j\} \right]。$$

因为 $(n-j+1)D(j)$ 和 $D(j)$ 关于 j 不减, 所以根据引理 1, 有:

$$\sum_{j=1}^n (n-j+1)(a_{[j]} + b_{[j]}) D(j) \geq \sum_{j=1}^n (n-j+1)(a_j + b_j) D(j),$$

条件 $a_j + b_j$ 与 $b_j D(j)$ 同序, 意味着 $a_j + b_j$ 与 b_j 同序, 再根据引理 1, 有 $\sum_{j=1}^n b_{[j]} D(j) \geq \sum_{j=1}^n b_j D(j)$ 。因此有:

$$\sum_{j=1}^n C_j(\pi) \geq \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^n (n-j+1)(a_j + b_j) D(j) + \sum_{j=1}^n b_j D(j) + n \min_{1 \leq j \leq n} \{a_j\} \right]。$$

由于上述不等式对于任何排序均成立, 所以定理得证。 证毕

引理 2 对于 $F2 \mid DLE \mid \sum C_j$ 的 SPT 排序, 有 $|a_{k+1} D(k+1) - b_k D(k)| \leq \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} [a_{k+1} D(k+1) + b_k D(k)]$ 成

立, 其中: $\alpha = \min_{1 \leq j \leq n} \{a_j, b_j\}$, $\beta = \max_{1 \leq j \leq n} \{a_j, b_j\}$ 。

证明 反证法。

1) 先考虑 $|a_{k+1} D(k+1) - b_k D(k)| = a_{k+1} D(k+1) - b_k D(k)$ 情况。

若引理结论不真, 则有:

$$(\beta + \alpha) [a_{k+1} D(k+1) - b_k D(k)] > (\beta - \alpha) [a_{k+1} D(k+1) + b_k D(k)],$$

整理得 $\alpha a_{k+1} D(k+1) > \beta b_k D(k)$ 。

因为 $\alpha = \min_{1 \leq j \leq n} \{a_j, b_j\}$, $\beta = \max_{1 \leq j \leq n} \{a_j, b_j\}$, 所以 $\alpha \leq b_k$, $a_{k+1} \leq \beta$, 又因为 $D(k+1) \leq D(k)$, 因此 $\alpha a_{k+1} D(k+1) \leq \beta b_k D(k)$, 与 $\alpha a_{k+1} D(k+1) > \beta b_k D(k)$ 矛盾。

2) 下面考虑 $|a_{k+1} D(k+1) - b_k D(k)| = b_k D(k) - a_{k+1} D(k+1)$ 情况。

若引理结论不真, 则有:

$$(\beta + \alpha) [b_k D(k) - a_{k+1} D(k+1)] > (\beta - \alpha) [a_{k+1} D(k+1) + b_k D(k)],$$

整理得 $\alpha b_k D(k) > \beta a_{k+1} D(k+1)$ 。

因为 $\alpha = \min_{1 \leq j \leq n} \{a_j, b_j\}$, $\beta = \max_{1 \leq j \leq n} \{a_j, b_j\}$, 所以 $\alpha \leq a_{k+1}$, $b_{k+1} \leq \beta$, 因此 $\alpha b_k D(k) \leq \alpha b_{k+1} D(k+1) \leq \beta a_{k+1} D(k+1)$, 与 $\alpha b_k D(k) > \beta a_{k+1} D(k+1)$ 矛盾。

综合 1), 2) 两种情况, 引理得证。 证毕

定理 3 对于 $F2 \mid DLE \mid \sum C_j$, 若 $a_j + b_j$ 与 $b_j D(j)$ 同序, 则 SPT 排序的界为 $R_{\text{SPT}} = \frac{2\beta}{\beta + \alpha}$, 其中: $\alpha =$

$\min_{1 \leq j \leq n} \{a_j, b_j\}$, $\beta = \max_{1 \leq j \leq n} \{a_j, b_j\}$ 。

证明 设 SPT 排序为 $\pi = [J_1, J_2, \dots, J_n]$, 则 $C_{2,1} = a_1 + b_1$, $C_{2,j} = \max\{C_{2,j-1}, C_{1,j}\} + b_j D(j)$, $j = 2, \dots, n$ 。

因此, 有:

$$C_j = b_j D(j) + \max\{C_{2,j-1}, C_{1,j}\} = b_j D(j) + \max\{\max\{C_{2,j-2}, C_{1,j-1}\} + b_{j-1} D(j-1), C_{1,j-1} + a_j D(j)\} \leq b_j D(j) + \max\{C_{2,j-2}, C_{1,j-1}\} + \max\{b_{j-1} D(j-1), a_j D(j)\}。$$

依次递推, 得到: $C_j \leq a_1 + \sum_{k=1}^{j-1} \max\{b_k D(k), a_{k+1} D(k+1)\} + b_j D(j)$ 。注意到:

$$2 \max\{b_k D(k), a_{k+1} D(k+1)\} = b_k D(k) + a_{k+1} D(k+1) + |b_k D(k) - a_{k+1} D(k+1)|,$$

所以有:

$$2C_j \leq 2a_1 + \sum_{k=1}^{j-1} [b_k D(k) + a_{k+1} D(k+1)] + \sum_{k=1}^{j-1} |b_k D(k) - a_{k+1} D(k+1)| + 2b_j D(j) =$$

$$a_1 + \sum_{k=1}^j (a_k + b_k) D(k) + \sum_{k=1}^{j-1} |b_k D(k) - a_{k+1} D(k+1)| + b_j D(j)。$$

因此,有 $2 \sum_{j=1}^n C_j \leq na_1 + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j (a_k + b_k) D(k) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{j-1} |b_k D(k) - a_{k+1} D(k+1)| + \sum_{j=1}^n b_j D(j)。$

由引理 2 知: $|a_{k+1} D(k+1) - b_k D(k)| \leq \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} [a_{k+1} D(k+1) + b_k D(k)]$, 整理得:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{j=1}^n C_j &\leq na_1 + \sum_{j=1}^n (n-j+1)(a_j + b_j) D(j) + \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{j-1} (a_{k+1} D(k+1) + b_k D(k)) + \sum_{j=1}^n b_j D(j) = \\ &na_1 + \sum_{j=1}^n (n-j+1)(a_j + b_j) D(j) + \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)(a_{j+1} D(j+1) + b_j D(j)) + \sum_{j=1}^n b_j D(j) = \\ &\frac{2\alpha}{\beta + \alpha} na_1 + \frac{2\beta}{\beta + \alpha} \sum_{j=1}^n (n-j+1)(a_j + b_j) D(j) + \frac{2\alpha}{\beta + \alpha} \sum_{j=1}^n b_j D(j)。 \end{aligned}$$

因为 $\alpha = \min_{1 \leq j \leq n} \{a_j, b_j\}, \beta = \max_{1 \leq j \leq n} \{a_j, b_j\}$, 所以 $\alpha < \beta$, 且 $\alpha a_1 \leq \alpha \beta = \beta \min_{1 \leq j \leq n} \{a_j, b_j\}。$

因此,有 $2 \sum_{j=1}^n C_j \leq \frac{2\beta}{\beta + \alpha} [n \min_{1 \leq j \leq n} \{a_j, b_j\} + \sum_{j=1}^n (n-j+1)(a_j + b_j) D(j) + \sum_{j=1}^n b_j D(j)]。$ 注意到:

$$\sum_{j=1}^n C_j(\pi^*) \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (n-j+1)(a_j + b_j) D(j) + \sum_{j=1}^n b_j D(j) + n \min_{1 \leq j \leq n} \{a_j\},$$

及 $\min_{1 \leq j \leq n} \{a_j, b_j\} \leq \min_{1 \leq j \leq n} \{a_j\}$, 因此,有 $\sum_{j=1}^n C_j \leq \frac{2\beta}{\beta + \alpha} \sum_{j=1}^n C_j(\pi^*)。$

证毕

尽管 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 时, $F2 \parallel \sum C_j$ 是强 NP-难的, 但 $b_1 = b_2 = \dots = b_n$ 时, $F2 \parallel \sum C_j$ 非常简单。

定理 4 对于 $F2 \mid DLE \mid \sum C_j$, 若 $b_1 = b_2 = \dots = b_n$, 则工件按 a_j 不减(SPT)排列可以得到最优排序。

证明 设工件按 a_j 不减排列的排序为 $\pi = [J_1, J_2, \dots, J_n]$, $\bar{\pi} = [J_{[1]}, J_{[2]}, \dots, J_{[n]}]$ 是任意排序, 下面证明 $C_j(\pi) \leq C_{[j]}(\bar{\pi}), j=1, 2, \dots, n。$

利用数学归纳法。对于 $j=1, C_1(\pi) = a_1 + b \leq a_{[1]} + b = C_{[1]}(\bar{\pi})。$

假设对于 $j=1, 2, \dots, k$, 有 $C_j(\pi) \leq C_{[j]}(\bar{\pi})$ 成立, 下面考虑 $j=k+1$ 的情况。

易见:

$$C_{k+1}(\pi) = \max\{C_k(\pi), C_{1,k+1}(\pi)\} + bD(k+1) = \max\{C_k(\pi), \sum_{j=1}^{k+1} a_j D(j)\} + bD(k+1),$$

$$C_{[k+1]}(\bar{\pi}) = \max\{C_{[k]}(\bar{\pi}), C_{1,[k+1]}(\bar{\pi})\} + bD(k+1) = \max\{C_{[k]}(\bar{\pi}), \sum_{j=1}^{k+1} a_{[j]} D(j)\} + bD(k+1)。$$

由于 $C_k(\pi) \leq C_{[k]}(\bar{\pi}), \sum_{j=1}^{k+1} a_j D(j) \leq \sum_{j=1}^{k+1} a_{[j]} D(j)$, 所以 $C_{k+1}(\pi) \leq C_{[k+1]}(\bar{\pi})。$

证毕

3 结束语

具有学习效应的排序模型是近些年来比较活跃的研究内容。文献中关于 DeJong 学习效应模型的研究主要集中在单机和平行机。本文讨论两台机器流水作业排序问题。目标函数是极小化总完工时间。由于这一问题是强 NP-难的, 因此以 SPT 为近似算法, 讨论了误差界。对一般情况, 证明了 SPT 算法的界为 2。对于两种特殊情况, 分别给出了一个改进的界和证明了 SPT 算法的最优性。进一步研究可以考虑其他车间作业问题或其他目标函数。

参考文献:

- [1] HO K I J, LEUNG J Y T, WEI W D. Complexity of scheduling tasks with time-dependent execution times[J]. Information Processing Letters, 1993, 48(6): 315-320.
- [2] GAWIEJNOWICZ S. A note on scheduling on a single processor with speed dependent on a number of executed jobs[J]. Information Processing Letters, 1996, 57(6): 297-300.
- [3] DONDETI V R, MOHANTY B B. Impact of learning and fatigue factors on single machine scheduling with penalties for tardy

- jobs[J]. European Journal of Operational Research, 1998, 105(3): 509-524.
- [4] BISKUP D. Single-machine scheduling with learning considerations[J]. European Journal of Operational Research, 1999, 115(1): 173-178.
- [5] CHENG T C E, WANG G Q. Single machine scheduling with learning effect considerations[J]. Annals of Operations Research, 2000, 98: 273-290.
- [6] MOSHEIOV G, SIDNEY J B. Scheduling with general job-dependent learning curves[J]. European Journal of Operational Research, 2003, 147(3): 665-670.
- [7] KUO W H, YANG D L. Minimizing the total completion time in a single-machine scheduling problem with a time-dependent learning effect[J]. European Journal of Operational Research, 2006, 174(2): 1184-1190.
- [8] KOULAMAS C, KYPARISIS G J. Single-machine and two-machine flowshop scheduling with general learning functions[J]. European Journal of Operational Research, 2007, 178(2): 402-407.
- [9] BISKUP D. A state-of-the-art review on scheduling with learning effects[J]. European Journal of Operational Research, 2008, 188(2): 315-329.
- [10] DEJONG J R. The effects of increasing skill on cycle time and its consequences for time standards[J]. Ergonomics, 1957, 1(1): 51-60.
- [11] WANG J B, WANG M Z, XIA Z Q. Single machine scheduling problems with general learning effect[J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 2005, 25(4): 642-646.
- [12] OKOŁOWSKI D, GAWIEJNOWICZ S. Exact and heuristic algorithms for parallel-machine scheduling with DeJong's learning effect[J]. Computers & Industrial Engineering, 2010, 59(2): 272-279.
- [13] JI M, YAO D L, YANG Q Y, et al. Machine scheduling with DeJong's learning effect[J]. Computers & Industrial Engineering, 2015, 80: 195-200.
- [14] ZHAO C L, FANG J, CHENG T C E, et al. A note on the time complexity of machine scheduling with DeJong's learning effect[J]. Computers & Industrial Engineering, 2017, 112: 447-449.
- [15] BAI M Z, ZHAO Y F. A fully polynomial-time approximation scheme for total completion time minimization on a single machine with DeJong's learning effect and an availability constraint[J]. Engineering Optimization, 2020, 52(8): 1313-1322.
- [16] GAREY M R, JOHNSTON D S, SETHI R. The complexity of flowshop and jobshop scheduling[J]. Mathematics of Operations Research, 1976, 1(2): 117-129.
- [17] HOOGEVEEN J A, KAWAGUCHI T. Minimize total completion time in a two-machine flow-shop; analysis of special cases[J]. Mathematics of Operations Research, 1999, 24(4): 887-910.

Operations Research and Cybernetics

Two Machine Flowshop Scheduling with DeJong's Learning Effect

BAI Mengzhuo¹, WEN Xuebing²

(1. School of Mathematics and Systems Science, Shenyang Normal University;

2. Department of Editorial Journal, Shenyang Normal University, Shenyang 110035, China)

Abstract: [Purposes] A two-machine flowshop scheduling with DeJong's learning effect is considered. [Methods] The objective is to find a sequence that minimizes the total completion time. [Findings] For general model, it is proved that the worst-case bound of SPT algorithm is 2. Furthermore, two special cases are analyzed, one is that the total processing time of two operations and the real processing time of the operations on second machine are agreeable, the other is that the processing times on the second machine are equal. An improved worst-case bound for SPT algorithm is presented for the first special case and a polynomial algorithm for the second special case, respectively. [Conclusions] The results of the existing literature are generalized.

Keywords: scheduling; DeJong's learning effects; flow shop; SPT rule

(责任编辑 黄颖)