

星型网络上单台车辆分群调度问题*

包晓光, 焦长春

(上海海洋大学 信息学院, 上海 201306)

摘要:【目的】星型网络上单台车辆分群调度问题是运筹学和计算机科学中一个重要的组合优化问题。【方法】对客户服务时间为零的情形,证明存在一个具有良好性质的最优解;对客户服务时间任意的情形,设计两个候选时间表然后选择表长较短者作为最终的近似解。【结果】对第1种情形,给出一个多项式时间最优算法;对第2种情形,给出一个近似比为5/3的近似算法。【结论】研究结果可为交通运输、生产制造、生物科学等相关行业提供有效决策支持。

关键词: 运筹学; 车辆调度; 客户分群; 星型网络; 近似算法

中图分类号: O221

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2021)05-0006-06

目前,车辆分群调度问题已成为运筹学和计算机科学中一个重要的组合优化问题,它和它的变形在交通运输、生产制造、生物科学等行业中得到了广泛应用^[1]。车辆分群调度问题及相关问题已受到了研究者的普遍关注。相关问题之一是分群旅行商问题(Clustered traveling salesman problem, CTSP)。与车辆分群调度问题相比,它的客户的释放时间和服务时间均为零。Guttmann 等人^[2], Bao 和 Liu^[3]研究了 CTSP 问题,并分别给出了近似比为 11/4 和 13/6 的近似算法。相关问题之二是车辆调度问题(Vehicle scheduling problem, VSP)。与车辆分群调度问题相比,群的个数仅有 1 个。当网络结构为线型时, Tsitsiklis^[4]证明了它是 NP 困难问题。Bhattacharya 等人^[5]、Yu 和 Liu^[6]分别独立给出了一个近似比为 3/2 近似算法。当网络结构为圈型时, Wu 和 Lu^[7]给出了一个近似比为 16/9 近似算法。当网络结构为树型时, Wu 和 Lu^[7]给出了一个近似比为 5/3 近似算法。当网络结构为一般网络时, Nagamochi 等^[8]给出了一个近似比为 5/2 近似算法。

2017 年,包晓光等人^[9]考虑了线型网络上单台车辆分群调度问题。当客户的服务时间为零时,他们给出了一个多项式时间动态规划最优算法;当客户的服务时间任意时,他们给出了一个近似比为 16/9 近似算法。作为线型网络的一个推广,本文研究星型网络上单台车辆分群调度问题,就客户服务时间为零的情形,证明它是多项式时间可解的;就客户服务时间任意的情形,给出一个近似比为 5/3 近似算法。

1 问题描述和符号

设 $G=(V, E)$ 是一个星型网络,其中 $V=\{0, 1, \dots, n\}$ 是该网络的顶点集, $E=\{(i, j)\}$ 是该网络的边集。图 G 按逆时针方向划分为 K 个分支 $B_1, B_2, \dots, B_K$ (图 1)。顶点 0 处有一台车辆, 顶点 $1, 2, \dots, n$ 处各有一个客户。所有客户被划分成 K 个子集 $V_1, V_2, \dots, V_K$, 每个子集 V_i 称为一个群, 群内的客户分布在对应的分支 B_i 上。每个客户都有一个释放时间 r_i 和一个服务时间 p_i 。释放时间的含义是, 客户只能在该时刻或该时刻之后被服务; 服务时间的含义是,

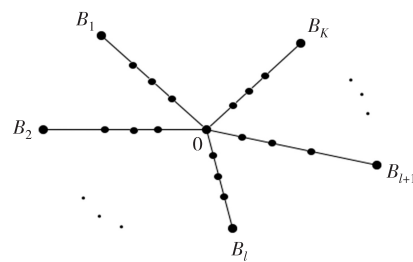


图 1 客户分布示意图

Fig. 1 Diagram of customer distribution

车辆对客户进行服务时所需花费的时间。对于边集 E 中的每条边 $e=(i, j)$ 都关联着一个旅行时间 $t(i, j)$, 它的含义是车辆从顶点 i 行驶至顶点 j 所需花费的旅行时间。旅行时间是对称的, 即对任意 $e=(i, j) \in E$, 成立 $t(i, j)=t(j, i)$ 。问题的要求是, 计算一个客户服务顺序的时间表, 使得车辆从初始位置出发, 服务网络中的所有客

* 收稿日期: 2020-12-14 修回日期: 2021-01-05 网络出版时间: 2021-06-30 10:18

资助项目: 国家自然科学基金 (No. 11701363)

第一作者简介: 包晓光, 男, 讲师, 硕士生导师, 研究方向为组合最优化, E-mail: xgbao@shou.edu.cn

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20210630.0902.008.html>

户且每个群中的客户连续服务,且最终返回初始出发位置。问题的目标是极小化时间表长。

由于问题的目标是极小化时间表长,故车辆到达一个客户所在位置时,或者等待车辆释放然后对客户进行服务,或者朝下一个待服务的客户方向移动。因此,一个可行时间表可以通过确定客户的服务顺序来描述。对于给定的一个时间表 S , 使用 $C_{\max}(S)$ 表示 S 的时间表长。同时,为方便表述,下面定义了一些将在后文中使用到的符号。设 $P = \sum_{i \in V \setminus \{0\}} p_i$, $r_{\max} = \max_{i \in V \setminus \{0\}} r_i$, $T = \sum_{(i,j) \in E} t(i,j)$, 这里 P 表示所有客户的服务时间之和, $r_{\max}$ 表示所有客户的最大释放时间, T 表示图 G 中每条边的旅行时间之和。对 $1 \leq l \leq K$, 设:

$$T_l = \sum_{(i,j) \in B_l} t(i,j), W_l = \max_{i \in V_l} \{ \max\{r_i - (2T_l - t(i,0)), 0\} \},$$

这里 T_l 表示分支 B_l 中每条边的旅行时间之和, W_l 表示,对分支 B_l 中每个客户 i , 车辆零时刻从顶点 0 出发, 然后直接旅行至该分支另一端顶点, 再沿直线服务该客户时, 分支 B_l 中所有客户等待时间的最大值。对 $0 \leq t \leq r_{\max}$, 设: $V(t) = \{l \mid \exists i \in V_l, r_i \geq t\}$, $V'(t) = \{l \mid \exists i \in V_l, r_i > t\}$, $P(t) = \sum_{\{i \mid l \in V(t), i \in V_l\}} p_i$, $P'(t) = \sum_{\{i \mid l \in V'(t), i \in V_l\}} p_i$, $Q(t) = \max_{l \in V(t)} \sum_{\{i \mid i \in V_l, r_i \leq t\}} p_i$, $Q'(t) = \max_{l \in V'(t)} \sum_{\{i \mid i \in V_l, r_i \leq t\}} p_i$, 这里 $V(t)$ ($V'(t)$) 表示存在释放时间大于等于 t ($> t$) 的客户群下标集合, $P(t)$ ($P'(t)$) 表示群下标属于 $V(t)$ ($V'(t)$) 的每个群的客户服务时间之和, $Q(t)$ ($Q'(t)$) 表示下标属于 $V(t)$ ($V'(t)$) 的群中, 群内释放时间小于 t ($\leq t$) 的客户服务时间之和的最大值。另外, 使用 $u'(t)$ 表示使 $Q'(t)$ 成立的最小的群下标。

2 客户服务时间为零的情形

本节考虑客户服务时间为零的情形。针对客户不分群且服务时间均为零、网络结构为直线、车辆初始位置位于直线的一个端点的情形, Psaraftis 等人^[10]给出了一个最优算法。算法步骤是, 首先车辆从所在的顶点直接旅行至另一侧的顶点, 然后从该顶点沿直线依次服务客户直至返回初始出发位置。针对本节考虑的情形, 就每个分支而言, 由于它是一个线型网络, 故而可以应用 Psaraftis 算法对客户进行服务。对分支间的服务顺序, 本文证明存在一个最优时间表, 使得车辆按照 W_l ($1 \leq l \leq K$) 非减序服务各分支。需要说明的是, 为方便阐述, 下文用车辆服务分支 B_l 表示车辆服务该分支内的所有客户。综合上述, 该情形是多项式时间可解的。接下来首先给出一个引理用以支撑后续定理的证明。为方便阐述, 对分支 B_l ($1 \leq l \leq K$), 设异于顶点 0 的另一侧顶点为 n_l , 设 $W_l = \max_{i \in V_l} \{ \max\{r_i - (2T_l - t(i,0)), 0\} \}$ 对应的顶点为 b_l 。同时, 设按照 Psaraftis 算法服务分支 B_l 时的开始时刻为 t_l 。

引理 1 对分支 B_l ($1 \leq l \leq K$), 若 $t_l + 2T_l - t(b_l, 0) \geq r_{b_l}$, 则按 Psaraftis 算法, 车辆在该分支的任意客户处均不会发生等待。

证明 对任意客户 i , 按 Psaraftis 算法, 若 $r_i - (2T_l - t(i,0)) \leq 0$, 则结论显然成立。若 $r_i - (2T_l - t(i,0)) > 0$, 由 b_l 的定义, 成立 $\max\{r_{b_l} - (2T_l - t(b_l,0)), 0\} \geq \max\{r_i - (2T_l - t(i,0)), 0\}$, 即, $r_{b_l} - (2T_l - t(b_l,0)) \geq r_i - (2T_l - t(i,0))$ 。因此, $t_l + 2T_l - t(i,0) \geq t_l + 2T_l - t(b_l,0) - r_{b_l} + r_i \geq r_i$, 这里最后 1 个不等式的成立是由于条件 $t_l + 2T_l - t(b_l,0) \geq r_{b_l}$ 。因此, 车辆到达客户 i 的旅行时间不小于该客户的释放时间, 所以不会发生等待。证毕

定理 1 对星型网络上单台车辆分群调度问题, 就服务时间为零的情形, 存在一个最优时间表, 使得车辆按照 W_l 非减序服务各分支。

证明 设 S 是一个最优时间表。使用反证法证明该定理。假设 S 中存在两个分支 B_i 和 B_j , 使得 $W_i > W_j$, 但车辆先服务 B_i 后服务 B_j 。通过交换 B_i 和 B_j 的服务顺序 (其他分支服务顺序不变), 构造一个新时间表 S' 。现证明这样的交换不会增加时间表长。按照 S , 根据车辆在 B_i 和 B_j 是否发生等待, 可以分 4 种情况讨论。值得注意的是, 由于 $W_i > W_j$, 故下式成立:

$$r_{b_i} - 2T_i + t(b_i, 0) > r_{b_j} - 2T_j + t(b_j, 0). \quad (1)$$

情况 1 在 S 中, 车辆在 B_i 和 B_j 均未发生等待。由于车辆在 B_i 未发生等待, 则有:

$$t_i + 2T_i - t(b_i, 0) \geq r_{b_i}. \quad (2)$$

此时, 车辆服务完 B_i 和 B_j 的完工时间为 $t_i + 2T_i + 2T_j$ 。在 S' 中, 若车辆在服务 B_j 和 B_i 时仍未发生等待, 则结

论显然成立;若车辆在 B_i 发生等待,则无论在 B_j 是否发生等待,服务完 B_j 和 B_i 的完工时间均为 $r_{b_j} + t(b_i, 0) \leq t_i + 2T_i < t_i + 2T_i + 2T_j$, 这里第 1 个不等式由(2)式得出,进而结论成立;若车辆在 B_j 等待而 B_i 未等待,则服务完 B_j 和 B_i 的完工时间为 $r_{b_j} + t(b_j, 0) + 2T_i$ 。因此:

$$r_{b_j} + t(b_j, 0) + 2T_i < r_{b_i} + t(b_i, 0) + 2T_j < t_i + 2T_i + 2T_j,$$

这里第 1 个不等式由(1)式得出,第 2 个不等式由(2)式得出,进而结论成立。

情况 2 在 S 中,车辆在 B_i 未发生等待而在 B_j 发生等待。由于在 B_i 未发生等待,则亦有(2)式成立。此时,车辆对 B_j 开始服务的时刻为 $t_j = t_i + 2T_i$ 。进而有:

$$t_j + 2T_j - t(b_j, 0) = t_i + 2T_i + 2T_j - t(b_j, 0) \geq r_{b_i} + t(b_i, 0) + 2T_j - t(b_j, 0) > r_{b_j} + 2T_i > r_{b_j},$$

这里第 1 个不等式由(2)式得出,第 2 个不等式由(1)式得出。由引理 1 可知,车辆在 B_j 的任意客户处均不会发生等待,即情况 2 不存在。

情况 3 在 S 中,车辆在 B_i 和 B_j 均发生等待。由于车辆在 B_i 发生等待,则服务完 B_i 的时刻,亦即对 B_j 开始服务的时刻为 $r_{b_i} + t(b_i, 0)$ 。进而, $t_j + 2T_j - t(b_j, 0) = r_{b_i} + t(b_i, 0) + 2T_j - t(b_j, 0) > r_{b_j} + 2T_i > r_{b_j}$, 这里第 1 个不等式由(1)式得出。由引理 1 可知,车辆在 B_j 的任意客户处均不会发生等待,即情况 3 亦不存在。

情况 4 在 S 中,车辆在 B_i 发生等待而在 B_j 未发生等待。由于车辆在 B_i 发生等待,则有:

$$t_i + 2T_i - t(b_i, 0) < r_{b_j}, \quad (3)$$

此时,车辆服务完 B_i 和 B_j 的完工时间为 $r_{b_i} + t(b_i, 0) + 2T_j$ 。在 S' 中,若车辆在服务 B_j 和 B_i 时均未发生等待,则服务完这两个分支的完工时间为 $t_i + 2T_j + 2T_i < r_{b_i} + t(b_i, 0) + 2T_j$, 这里的不等式由(3)得出,进而结论成立;若车辆在 B_i 发生等待,则无论在 B_j 是否发生等待,服务完 B_j 和 B_i 的完工时间均为 $r_{b_i} + t(b_i, 0)$, 则结论显然成立;若车辆在 B_j 等待而在 B_i 未等待,则服务完 B_j 和 B_i 的完工时间为 $r_{b_j} + t(b_j, 0) + 2T_i$ 。因此, $r_{b_j} + t(b_j, 0) + 2T_i < r_{b_i} + t(b_i, 0) + 2T_j$, 这里的不等式由(1)式得出,进而结论成立。证毕

因此,根据定理 1,可以给出求解客户服务时间为零情形的一个多项式时间算法:按照 $W_l (1 \leq l \leq K)$ 非减序确定分支间的服务顺序,对每个分支内部,按照 Psaraftis 算法对客户进行服务。接下来给出一个算例。

例 1 客户个数 $n = 14$, 客户分群为: $V_1 = \{1, 2, 3\}$, $V_2 = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $V_3 = \{9, 10\}$, $V_4 = \{11, 12, 13, 14\}$ 。客户分布示意图见图 2。每个客户的释放时间 r_i 和客户到顶点 0 的距离见表 1。按上述算法计算车辆服务客户的顺序。

表 1 例 1 中客户的相关参数

Tab. 1 Relevant parameters of the customers in Example 1

参数	分支													
	B_1			B_2				B_3			B_4			
客户编号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
释放时间 r_i	2	0	13	5	13	0	21	0	5	2	2	5	19	2
客户位置 $t(i, 0)$	1	2	5	1	3	4	5	6	1	5	2	3	4	5

注:这里客户 i 的位置用该客户到初始位置 0 的距离表示。

解 根据 $W_l = \max_{i \in V_l} \{ \max \{ r_i - (2T_i - t(i, 0)), 0 \} \}$ 的定义得, $W_1 = 8, W_2 = 14, W_3 = 0, W_4 = 13$ 。因此分支的服务顺序为 $B_3 \rightarrow B_1 \rightarrow B_4 \rightarrow B_2$, 进而车辆服务客户的顺序为:

$$0 \rightarrow 10 \rightarrow 9 \rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 14 \rightarrow 13 \rightarrow 12 \rightarrow 11 \rightarrow 0 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 0.$$

3 客户服务时间任意的情形

本节考虑客户服务时间任意的情形。当分支个数等于 1, 即线型网络时, 该情形是 NP 困难的^[4], 故星型网络上的该情形亦是 NP 困难的。针对该情形, 本文首次给出一个 5/3 近似算法。算法思想是, 首先设计两个候选时间表, 然后选择表长较小者作为最终的近似解。接下来, 首先给出算法, 然后给出算法分析。

算法 A(α) 步骤 1, 对相应的零服务时间问题, 按照第 2 节中的求解方案生成时间表 S_1 , 然后按照 S_1 服务客户的顺序对客户进行服务。

步骤2,计算满足条件 $P'(t^*) - Q'(t^*) \leq \alpha t^* \leq P(t^*) - Q(t^*)$ 的时刻 t^* ($0 \leq t^* \leq r_{\max}$), 其中 $\alpha > 0$ 为待定参数。按 t^* 将分支下标划分成 $\{1, 2, \dots, K\} \setminus V'(t^*)$, $V'(t^*) \setminus u'(t^*)$ 以及 $\{u'(t^*)\}$ 共3部分。构造一个时间表 S_2 , 使得车辆首先在顶点0处等至时刻 t^* , 然后按照任意序服务下标属于 $\{1, 2, \dots, K\} \setminus V'(t^*)$ 的每个分支并回到顶点0处; 接着从顶点0处旅行至顶点 $n_{u'(t^*)}$, 期间服务 $B_{u'(t^*)}$ 中释放时间不超过 t^* 的所有客户; 之后从顶点 $n_{u'(t^*)}$ 回到顶点0, 期间服务 $B_{u'(t^*)}$ 中释放时间严格大于 t^* 的客户; 最后按照任意序服务下标属于 $V'(t^*) \setminus u'(t^*)$ 的所有分支并返回至顶点0。需要注意的是, 除了分支 $B_{u'(t^*)}$ 外, 车辆服务其余分支 B_l 时均是按照从 n_l 沿分支回到顶点0时依次服务客户。

步骤3, 从 S_1 和 S_2 中选择时间表长较小者作为最终的近似解。

由于 $P'(t) - Q'(t)$ 和 $P(t) - Q(t)$ 是单调非增的分段常数函数, 且仅在 $t = r_i$ 处函数值才有可能不同。类似 Yu 和 Liu^[6] 的分析知, $t^* \in [0, r_{\max}]$ 可在 $O(n \log n)$ 内计算。接下来, 首先给出一个算例, 然后给出几个最优时间表长的下界, 最后给出算法分析。

例2 按照算法 $A(\alpha)$ 计算时间表 S_2 中车辆服务客户的顺序。客户的释放时间 r_i 和客户到顶点0的距离如例1所示, 客户的服务时间见表2。

表2 例2中客户的相关参数

Tab. 2 Relevant parameters of the customers in Example 2

参数	分支													
	B_1				B_2				B_3				B_4	
客户编号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
服务时间 p_i	1	1	3	2	1	2	3	1	3	4	2	1	2	1

解 令 $f_1(t) = P'(t) - Q'(t)$, $f_2(t) = P(t) - Q(t)$ 。由 $P(t)$ 、 $P'(t)$ 、 $Q(t)$ 、 $Q'(t)$ 的定义得:

$$f_1(t) = \begin{cases} 24, & 0 \leq t < 2 \\ 23, & 2 \leq t < 5 \\ 15, & 5 \leq t < 13 \\ 9, & 13 \leq t < 19 \\ 3, & 19 \leq t < 21 \\ 0, & t \geq 21 \end{cases}, f_2(t) = \begin{cases} 27, & t = 0 \\ 24, & 0 < t \leq 2 \\ 23, & 2 < t \leq 5 \\ 15, & 5 < t \leq 13 \\ 9, & 13 < t \leq 19 \\ 3, & 19 < t \leq 21 \\ 0, & t > 21 \end{cases}.$$

令 $\alpha = 1/2$, 作图得:

需要说明的是, 由于 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 仅在个别点处函数值不同, 为在图像上易于观察, 在图3中将 $f_2(t)$ 的图像向上平移0.4个单位。根据 t^* 的定义, 即 $P'(t^*) - Q'(t^*) \leq \alpha t^* \leq P(t^*) - Q(t^*)$, 易知 $t^* = 18$, $V'(t^*) = \{2, 4\}$, $\{u'(t^*)\} = \{2\}$ 。按照算法 $A(\alpha)$ 步骤2, 车辆服务客户的顺序为:

0 → 3 → 2 → 1 → 0 → 10 → 9 → 0 → 8 → 7 →
6 → 5 → 4 → 0 → 14 → 13 → 12 → 11 → 0。

引理2 设 $C_{\max}^*$ 为星型网络上单台车辆分群调度问题的最优时间表长, 那么有:

$$C_{\max}^* \geq 2T + P. \quad (4)$$

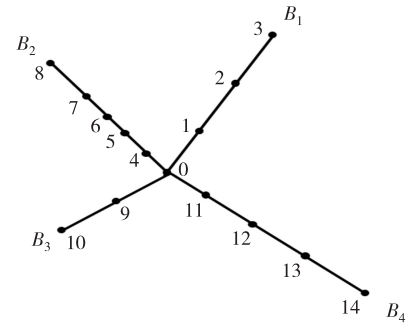


图2 例1中客户分布示意图

Fig. 2 Diagram of customer distribution in Example 1

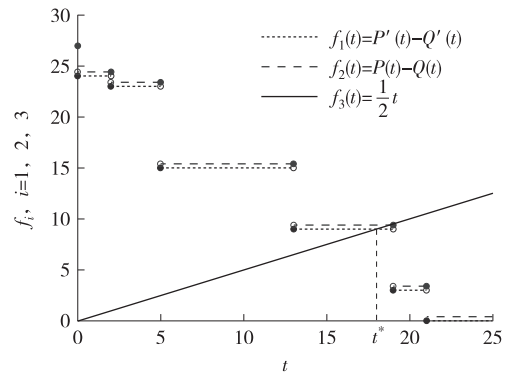


图3 计算 t^* 的示意图

Fig. 3 Diagram for computing t^*

对任意 $i \in V \setminus \{0\}$, 有下式成立:

$$C_{\max}^* \geq r_i + p_i + t(i, 0), \quad (5)$$

对任意 $0 \leq t \leq r_{\max}$, 有下式成立:

$$C_{\max}^* \geq t + P(t) - Q(t). \quad (6)$$

证明 (4), (5) 式显然成立, 现证明 (6) 式。考虑下标属于 $V(t)$ 的分支, 由于 t 时刻前, 车辆至多服务 $Q(t)$ 时间单位的客户, 故 t 时刻后, 车辆至少需服务 $P(t) - Q(t)$ 时间单位的客户, 因此 (6) 式成立。证毕

引理 3 $C_{\max}(S_1) \leq C_{\max}^* + P$ 。

证明 由于 S_1 是按照相应零服务时间情形的最优解确定服务客户的顺序, 故时间表长至多是相应零服务时间情形的最优值加上 P 。因为相应零服务时间情形的最优值是 $C_{\max}^*$ 的一个下界, 因此引理得证。证毕

引理 4 $C_{\max}(S_2) \leq \max\left\{\left(1 + \frac{1}{1+\alpha}\right)C_{\max}^*, \left(2 + \frac{\alpha}{1+\alpha}\right)C_{\max}^* - P\right\}$ 。

证明 由于车辆在顶点 0 处等至时刻 t^* , 故车辆服务下标属于 $\{1, 2, \dots, K\} \setminus V'(t^*)$ 的分支以及 $V_{u'}(t^*)$ 中释放时间不超过 t^* 的客户时均不会发生等待。若在后续服务中车辆仍未发生等待, 则有 $C_{\max}(S_2) = t^* + 2T + P \leq t^* + C_{\max}^* \leq \left(1 + \frac{1}{1+\alpha}\right)C_{\max}^*$, 这里第 1 个不等式由 (4) 式得出, 第 2 个不等式由 (6) 式和 t^* 的定义得出, 即 $C_{\max}^* \geq t^* + P(t^*) - Q(t^*) \geq (1+\alpha)t^*$ 。若车辆在后续服务时发生了等待, 那么令 k 为最后 1 个发生等待的客户, 则有:

$$\begin{aligned} C_{\max}(S_2) &\leq r_k + t(k, 0) + \sum_{(i,j) \in B_l, l \in V'(t^*) \setminus u'(t^*)} 2t(i, j) + P'(t^*) - Q'(t^*) \leq \\ &C_{\max}^* + 2T + P'(t^*) - Q'(t^*) \leq \left(1 + \frac{\alpha}{1+\alpha}\right)C_{\max}^* + 2T \leq \left(2 + \frac{\alpha}{1+\alpha}\right)C_{\max}^* - P, \end{aligned}$$

这里第 2 个不等式由 (5) 式得出, 第 3 个不等式由 (6) 式和 t^* 的定义得出, 即 $C_{\max}^* \geq t^* + P(t^*) - Q(t^*) \geq \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)(P'(t^*) - Q'(t^*))$, 最后一个不等式由 (4) 式得出。证毕

定理 2 对客户服务时间任意的情形, 算法 $A(\alpha)$ ($\alpha > 0$) 的近似比为 $\max\left\{\frac{5}{3}, 1 + \frac{1}{1+\alpha}, \frac{4}{3} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\right\}$ 。特别地, 如果令 $\alpha = \frac{1}{2}$, 则该算法的近似比至多为 $\frac{5}{3}$ 。

证明 当 $P \leq \frac{2}{3}C_{\max}^*$ 时, 由引理 3 可得, $C_{\max}(S_1) \leq C_{\max}^* + P \leq \frac{5}{3}C_{\max}^*$ 。当 $P > \frac{2}{3}C_{\max}^*$ 时, 由引理 4 可得:

$$\begin{aligned} C_{\max}(S_2) &\leq \max\left\{\left(1 + \frac{1}{1+\alpha}\right)C_{\max}^*, \left(2 + \frac{\alpha}{1+\alpha}\right)C_{\max}^* - P\right\} \leq \\ &\max\left\{1 + \frac{1}{1+\alpha}, \left(2 + \frac{\alpha}{1+\alpha}\right) - \frac{2}{3}\right\}C_{\max}^* \leq \max\left\{1 + \frac{1}{1+\alpha}, \frac{4}{3} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\right\}C_{\max}^*. \end{aligned} \quad \text{证毕}$$

5 总结

本文主要研究了星型网络上单台车辆分群调度问题, 就客户服务时间为零的情形, 给出了一个多项式时间最优算法; 就客户服务时间任意的情形, 给出了一个近似比为 $\frac{5}{3}$ 的近似算法。在未来研究中, 可以进一步考虑一般树型网络以及一般网络上单台车辆分群调度问题。

参考文献:

- [1] LAPORTE G, PALEKAR U. Some applications of the clustered traveling salesman problem[J]. Journal of the Operational Research Society, 2002, 53(9): 972-976.
- [2] GUTTMANN-BECK N, HASSIN R, KHULLER S, et al. Approximation algorithms with bounded performance guarantees for the clustered traveling salesman problem[J]. Algorithmica, 2000, 28(4): 422-437.
- [3] BAO X G, LIU Z H. An improved approximation algorithm for the clustered traveling salesman problem[J]. Information Processing Letters, 2012, 112(23): 908-910.
- [4] TSITSIKLIS J N. Special cases of traveling salesman and repairman problems with time windows[J]. Networks, 1992, 22(3):

263-282.

- [5] BHATTACHARYA B, CARMİ P, HU Y Z, et al. Single vehicle scheduling problems on path/tree/cycle networks with release and handling times[J]. *Lecture Notes in Computer Science*, 2008, 5369: 800-811.
- [6] YU W, LIU Z H. Single vehicle scheduling problems with release and service times on a line[J]. *Networks*, 2011, 57(2): 128-134.
- [7] WU Y X, LU X W. Improved algorithms for single vehicle scheduling on tree/cycle networks[EB/OL]. (2019-05-20)[2020-12-11]. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10878-019-00420-2>.
- [8] NAGAMUCHI H, MOCHIZUKI K, IBARAKI T. Complexity of the single vehicle scheduling problems on a graphs[J]. *Information Systems and Operations Research*, 1997, 35(4): 256-276.
- [9] 包晓光, 刘朝晖, 余炜. 线性网络上单台车辆分群调度问题[J]. *运筹与管理*, 2017, 26(5): 125-129.
- BAO X G, LIU Z H, YU W. Single vehicle scheduling problems with cluster and release time constraints on a line[J]. *Operations Research and Management Science*, 2017, 26(5): 125-129.
- [10] PSARAFTIS H N, SOLOMON M M, MAGNANTI T L, et al. Routing and scheduling on a shoreline with release times[J]. *Management Science*, 1990, 36(2): 212-223.

Operations Research and Cybernetics

Single Vehicle Scheduling Problem with Cluster on Start Network

BAO Xiaoguang, JIAO Changchun

(College of Information Technology, Shanghai Ocean University, Shanghai 201306, China)

Abstract: [Purposes] The vehicle scheduling problem with cluster is studied. It is an important combinatorial optimization problem in operations research and computer science. [Methods] In the case where the service time of each customer is zero, an optimality property of the problem is proved. In the case where the service time of each customer is given arbitrarily, two candidate schedules are first designed and then the shorter one is selected as the final approximate solution. [Findings] For the former, a polynomial-time optimal algorithm is presented. For the latter, a $5/3$ -approximation algorithm is proposed. [Conclusions] The results obtained can provide effective decision support for transportation industry, industrial manufacture, biological science, and so on.

Keywords: operations research; vehicle scheduling; cluster; start network; approximation algorithm

(责任编辑 陈 乔)