

随机多群体 SIRI 传染病模型的定性分析*

张志成, 杨志春

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】研究一类具有非线性发生率、多群体的随机 SIRI 传染病模型。【方法】利用随机微分方程解的基本理论, 首先给出模型正解的存在唯一性。通过构造恰当的 Lyapunov 函数, 利用图论的知识和基本再生数 R_0 , 获得了该传染病模型的零解随机指数稳定的充分条件。【结果】适当随机干扰能改变系统动力学行为, 即当白噪声满足一定条件时, 无论 $R_0 \leq 1$ 或者 $R_0 > 1$, 系统的零解都是随机指数稳定的, 即疾病最终都将呈指数型灭绝。【结论】对非线性发生率做一定假设的情况下, 得到了疾病的灭绝性由白噪声的强度控制。

关键词: SIRI 传染病模型; Lyapunov 函数; 白噪声; 指数型灭绝

中图分类号: O715

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2021)05-0066-07

传染病的流行不仅会严重影响人们的正常生活, 同时还会造成经济的巨大损失, 例如目前全世界正面临的“新型冠状病毒肺炎(COVID19)”疫情。一直以来人们都在与传染病做斗争, 传染病模型在研究传染病的发病机理和传染规律中扮演着非常重要的角色, 利用微分方程构建传染病数学模型是研究传染病的一种重要方法。

1990年, Tudor^[1]首次提出了具有复发性的 SIRI 传染病数学模型, 该模型适用于对肺结核、猪身上的伪狂犬病、疱疹等传染病的研究^[2-3], 可是 Tudor 在文中指出确定性传染病模型的缺陷是未考虑到传染病暴发过程中的随机性, 这使得研究随机性的传染病模型更具现实意义。近些年来, 具有随机效应的传染病模型已经受到了广大学者的关注^[4-8]。Lei 等人^[4]首次研究了随机的 SIRI 传染病模型, 得到了模型的动力学行为; Liu 等人^[5]研究了随机 SIRI 传染病模型, 获得了白噪声强度对于疾病的影响, 文献^[6]研究了随机 SIQS 传染病模型的阈值行为。

事实上, 大多数传染病数学模型只考虑了单个群体的情况, 可由于群体地理环境的差异性、不同宗教文化背景等, 这将会造成病毒宿主的差异性、病毒宿主的接触方式不同。因此需要把病毒宿主分成不同的群体, 进而研究多群体的传染病模型更为重要。目前, 已有部分学者研究了多群体的传染病模型^[9-13], 文献^[9]首次提出了多群体 SIS 传染病模型用来研究淋病的传播, 得到了地方病平衡点的稳定性。可是对于多群体的非线性发生率的随机 SIRI 传染病模型并未得到研究, 正如 Zou^[14]所说:“研究 SIRI 传染病模型的难点是模型中的变量 $I(t)$ 不能被写成 $I'(t) = I(t)g(\cdot)$ 的形式”。这使得研究多群体的非线性发生率的随机 SIRI 传染病模型存在一定的难度。

基于上述分析, 本文考虑了一类具有非线性发生率的随机多群体 SIRI 传染病模型。证明系统正解的存在唯一性, 通过构造恰当的 Lyapunov 函数, 利用矩阵图论知识以及对非线性项进行适当假设, 得到模型解的动力学行为。即系统在白噪声的控制下, 得到了疾病的灭绝性由白噪声的强度控制。

1 模型建立与准备

1990年, Tudor^[1]考虑了如下具有复发性的 SIRI 传染病模型:

* 收稿日期: 2021-04-15 修回日期: 2021-06-22 网络出版时间: 2021-09-17 9:29

资助项目: 国家自然科学基金(No. 11971081); 重庆市教育委员会科技研究重大项目(No. KJZD-M202000502); 重庆市研究生科研创新项目(No. CYS20242)

第一作者简介: 张志成, 男, 研究方向为随机常微分方程, E-mail: yzyzc1994@163.com; 通信作者: 杨志春, 男, 教授, 博士生导师, E-mail: yangzhch@126.com

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20210917.0855.002.html>

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = b - \lambda SI - \mu S \\ \frac{dI}{dt} = \lambda SI - (\mu + \gamma)I + aR, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - (a + \mu)R \end{cases} \quad (1)$$

其中: S 表示易感者数量, I 为染病者数量, R 表示恢复者数量 b 表示出生率, λ 是 S 和 I 之间的传染率系数, μ 表示死亡率, γ 表示恢复率, a 表示免疫失去率, 这里 $b, \lambda, \mu, \gamma, a$ 都是正常数。

上述模型(1)只考虑了单群体的传染病模型。在此基础上, 本文考虑了具非线性发生率的多群体 SIRI 传染病模型:

$$\begin{cases} \frac{dS_k}{dt} = b_k - \sum_{j=1}^n \beta_{kj} S_k \varphi_j(I_j) - \mu_k S_k \\ \frac{dI_k}{dt} = \sum_{j=1}^n \beta_{kj} S_k \varphi_j(I_j) - (\mu_k + \gamma_k) I_k + a_k R_k, \\ \frac{dR_k}{dt} = \gamma_k I_k - (a_k + \mu_k) R_k \end{cases} \quad (2)$$

这里将总人数分成 n 个群体, 将第 $k(k=1, 2, \dots, n)$ 个群体分为 3 类, 即 $S_k(t), I_k(t), R_k(t)$, 分别表示 t 时刻第 k 个群体的易感者数量、染病者数量及恢复者数量, b_k 表示第 k 个群体的出生率, β_{kj} 表示 $S_k(t)$ 和 $I_k(t)$ 之间的传染率系数, $\mu_k > 0, \gamma_k > 0, a_k > 0$ 分别表示第 k 个群体的死亡率、恢复率和免疫失去率。

本文考虑了函数 $\varphi_j(x), x \in (0, +\infty), j=1, 2, \dots, n$, 并且具有如下性质:

1) $\varphi_j(x)$ 是 C^1 -函数在 $x \in (0, +\infty)$, 对任意的 $x > 0, \varphi_j(x) > 0, \varphi_j(0) = 0$;

2) 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 存在一个正常数 C_j , 使得 $\varphi_j(x) \leq C_j x$;

3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\varphi_j(x)}{x} \right) = C_j$;

4) 对于任意的 $x > 0, y > 0$, 满足 $[\varphi_j(x) - \varphi_j(y)] \left[\frac{\varphi_j(x)}{x} - \frac{\varphi_j(y)}{y} \right] \leq 0$ 。

对于系统(2), 可以得到系统的无病平衡点和地方病平衡点分别记作:

$$P_0 = \left(\frac{b_1}{\mu_1}, 0, 0, \frac{b_2}{\mu_2}, 0, 0, \dots, \frac{b_n}{\mu_n} \right), P^* = (S_1^*, I_1^*, R_1^*, S_2^*, I_2^*, R_2^*, \dots, S_n^*, I_n^*, R_n^*).$$

并且记基本再生数为: $R_0 = \rho(A), A = \left[\frac{(a_k + \mu_k) \beta_{kj} C_j b_k}{\mu_k^2 (a_k + \mu_k + \gamma_k)} \right]_{n \times n}$, 其中 $\rho(A)$ 为矩阵 A 的谱半径。并且可以得到如下结论:

假设矩阵 $B = [\beta_{kj}]_{n \times n}$ 是不可约的, 函数 $\varphi_j(x)$ 满足性质 1)~性质 4)。如果 $R_0 \leq 1$, 那么系统(2)的无病平衡点 P_0 是全局渐近稳定的; 如果 $R_0 > 1$, 那么系统(2)的地方病平衡点 P^* 是全局渐近稳定的。

由于现实世界中充满了偶然性和随机性, 考虑环境白噪声的影响, 将系统(2)中引入环境白噪声, 得到如下具非线性发生率的随机性多群体 SIRI 传染病模型:

$$\begin{cases} \frac{dS_k}{dt} = b_k - \sum_{j=1}^n \beta_{kj} S_k \varphi_j(I_j) - \mu_k S_k + \delta_{1k} S_k dW_{1k}(t) \\ \frac{dI_k}{dt} = \sum_{j=1}^n \beta_{kj} S_k \varphi_j(I_j) - (\mu_k + \gamma_k) I_k + a_k R_k + \delta_{2k} I_k dW_{2k}(t), \\ \frac{dR_k}{dt} = \gamma_k I_k - (a_k + \mu_k) R_k + \delta_{3k} R_k dW_{3k}(t) \end{cases} \quad (3)$$

其中: $W_{1k}, W_{2k}, W_{3k}, k=1, 2, \dots, n$ 是定义在完备度量空间上的相互独立的标准布朗运动, $\delta_{1k}, \delta_{2k}, \delta_{3k}, k=1, 2, \dots, n$ 为相应布朗运动的干扰强度。

2 系统正解的存在唯一性

对于传染病模型(3), 首先应该考虑的是系统是否存在唯一的正解并且是全局的, 因此本节将利用 Lyapunov 函数的知识证明系统(3)正解的存在唯一性。

定义系统(3)的解 $(S_1(t), I_1(t), R_1(t), \dots, S_n(t), I_n(t), R_n(t))$ 为 $Y(t)$, 并且记:

$$\mathbf{R}_+^{3n} = \{y \in \mathbf{R}^{3n} \mid y_i > 0, 1 \leq i \leq n\}, \quad \bar{\mathbf{R}}_+^{3n} = \{y \in \mathbf{R}^{3n} \mid y_i \geq 0, 1 \leq i \leq n\}.$$

定理 1 对于系统(3)任意给定的初值 $Y(0) \in \mathbf{R}_+^{3n}$, 当 $t \geq 0$ 时, 系统都存在唯一的正解 $Y(t)$, 并且该解以概率 1 位于 $\mathbf{R}_+^{3n}$ 中。

证明 由于系统(3)的系数满足局部 Lipschitz 条件并且连续, 故系统(3)对于任意给定的初值条件 $Y(0) \in \mathbf{R}_+^{3n}$, 存在唯一的局部解 $Y(t), t \in [0, \tau_e)$, 其中 τ_e 表示爆破时间。即, 只需要证明 $\tau_e = \infty$ a. s. 即可。设 m_0 足够大, 使得 $S_k(0), I_k(0), R_k(0), k=1, 2, \dots, n$, 均属于 $\left[\frac{1}{m_0}, m_0\right]$, 对于任意的正整数 $m \geq m_0$, 定义停时:

$$\tau_m = \inf \left\{ t \in [0, \tau_e) : \min \{S_k(t), I_k(t), R_k(t), k=1, 2, \dots, n\} \leq \frac{1}{m} \text{ 或 } \max \{S_k(t), I_k(t), R_k(t), k=1, 2, \dots, n\} \geq m \right\}.$$

规定 $\inf \emptyset = \infty$ 。显然随着 m 的增加, τ_m 是单调递增的。令 $\tau_\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} \tau_m$, 如果证明 $\tau_\infty = \infty$, 那么解 $Y(t)$ 以概率 1 位于 $\mathbf{R}_+^{3n}$ 中。采用反证法, 假如 $\tau_\infty < \infty$, 则存在常数 T 和 $\epsilon \in (0, 1)$ 使得 $P\{\tau_\infty \leq T\} > \epsilon$, 则存在正整数 $a_0 \geq m_0$ 使得 $m > a_0, P\{\tau_\infty \leq T\} \geq \epsilon$ 。

定义 Lyapunov 函数 $V: \mathbf{R}_+^{3n} \rightarrow [0, +\infty)$:

$$V = \sum_{k=1}^n \left[\left(S_k - f_k - f_k \log \frac{S_k}{f_k} \right) - (I_k - 1 - \log I_k) - (R_k - 1 - \log R_k) \right],$$

其中: $f_k (k=1, 2, \dots, n)$ 为待定的正常数。对函数 V 采用伊藤公式得:

$$dV = LV dt + \sum_{k=1}^n [(S_k - f_k) \delta_{1k} dW_{1k}(t) + (I_k - 1) \delta_{2k} dW_{2k} + (R_k - 1) \delta_{3k} dW_{3k}(t)].$$

其中:

$$\begin{aligned} LV = & \sum_{k=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \left[\left(1 - \frac{f_k}{S_k} \right) (b_k - \sum_{j=1}^n \beta_{kj} S_k \varphi_j(I_j) - \mu_k S_k) + \frac{1}{2} \delta_{1k}^2 f_k + \right. \right. \\ & \left. \left(1 - \frac{1}{I_k} \right) \left(\sum_{j=1}^n \beta_{kj} S_k \varphi_j(I_j) - (\mu_k + \gamma_k) I_k + a_k R_k \right) + \frac{1}{2} \delta_{2k}^2 + \left(1 - \frac{1}{R_k} \right) (\gamma_k I_k - (\mu_k + a_k) R_k) + \frac{1}{2} \delta_{3k}^2 \right] = \\ & \sum_{k=1}^n \left[b_k + \frac{1}{2} (\delta_{1k}^2 f_k + \delta_{2k}^2 + \delta_{3k}^2) + a_k + \gamma_k + 2\mu_k + f_k \mu_k - \right. \\ & \left. \mu_k (S_k + I_k + R_k) + \sum_{j=1}^n \beta_{kj} f_k \varphi_j(I_j) - \frac{b_k f_k}{S_k} - \sum_{j=1}^n \frac{S_k \varphi_j(I_j)}{I_k} - \frac{a_k R_k}{I_k} - \frac{\gamma_k I_k}{R_k} \right]. \end{aligned}$$

令 $H_k = b_k + \frac{1}{2} (\delta_{1k}^2 f_k + \delta_{2k}^2 + \delta_{3k}^2) + a_k + \gamma_k + 2\mu_k + f_k \mu_k$, 并且由性质 1) 和 2) 可知 $\varphi_j(I_j) \leq C_j I_j$, 则可得到: $LV \leq$

$\sum_{k=1}^n H_k + \sum_{k=1}^n f_k \sum_{j=1}^n \beta_{kj} C_j I_j - \sum_{k=1}^n \mu_k I_k$ 。此时选取一个合适的正常数 $f_k (k=1, 2, \dots, n)$, 使得:

$$\sum_{k=1}^n f_k \sum_{j=1}^n \beta_{kj} C_j I_j - \sum_{k=1}^n \mu_k I_k = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \beta_{kj} C_j f_k - \mu_j \right) I_j = 0,$$

那么可得 $LV = \sum_{k=1}^n H_k$ 。则对于 Lyapunov 函数 V 有:

$$\int_0^{T \wedge \tau_m} dV(Y(t)) \leq \int_0^{T \wedge \tau_m} \sum_{k=1}^n H_k dt + \int_0^{T \wedge \tau_m} \sum_{k=1}^n [(S_k - f_k) \delta_{1k} dW_{1k}(t) + (I_k - 1) dW_{2k} + (R_k - 1) dW_{3k}(t)].$$

上式两端同时取数学期望得:

$$E[V(Y(T \wedge \tau_m))] \leq V[Y(0)] + \sum_{k=1}^n TH_k. \quad (1)$$

设 $\Omega_m = \{\tau_m \leq T\}$, 则 $P\{\Omega_m\} \geq \epsilon$ 。对于任意的 $\omega \in \Omega_m$, 则 $S_k(\tau_m, \omega), I_k(\tau_m, \omega), R_k(\tau_m, \omega), k=1, 2, \dots, n$, 中至少有一个等于 $\frac{1}{m}$ 或者 m 。即:

$$V[Y(\tau_m, \omega)] \geq \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ \left(m - f_k - f_k \log \frac{m}{f_k} \right), \left(\frac{1}{m} - f_k - f_k \log \frac{1}{mf_k} \right), (m - 1 - \log m), \left(\frac{1}{m} - 1 - \log \frac{1}{m} \right) \right\} := M.$$

根据停时的定义和(4)式可知: $V[Y(0)] + \sum_{k=1}^n TH_k \geq E[1_{\Omega_m} V[Y(\tau_m, \omega)]] \geq \epsilon M$, 其中 1_{Ω_m} 表示 Ω_m 的示性

函数。当 $m \rightarrow \infty$ 时, 得出 $\infty > V[Y(0)] + \sum_{k=1}^n TH_k \geq \infty$, 可知矛盾。所以有 $\tau_m = \infty$ 。

证毕

3 随机指数稳定性

基本再生数 R_0 是流行病模型中的一个重要参数, 表示在一个病例进入到易感人群中, 在外界未加干预的情况下平均可感染的二代病例的个数。当 $R_0 \leq 1$ 时, 表示疾病最终将灭绝; 当 $R_0 > 1$ 时, 表示疾病持久。但是在现实环境中, 存在许多随机干扰因素使得传染病的传播不会处于一个理想的状态, 例如环境中白噪声的干扰对于传染病的传播就起着非常重要的作用。本节主要讨论当环境白噪声足够大时, 将会对系统(3)的零解稳定性造成什么样的影响?

定理 2 假设矩阵 $B = [\beta_{kj}]_{n \times n}$ 是不可约的, 并且 $2\mu_k > \delta_{1k}^2, k=1, 2, \dots, n$, 那么对于系统(3)任意给定的初值 $Y(0) \in \mathbf{R}_+^{3n}$, 若以下两个条件之一成立:

1) 当 $R_0 \leq 1$ 时, 且

$$\max_{1 \leq k, j \leq n} \left\{ \frac{\beta_{kj} C_j}{h_j} \right\} \sum_{k=1}^n \frac{h_k \delta_{1k} b_k}{\mu_k \sqrt{2\mu_k - \delta_{1k}^2}} + \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k)}{a_k + \mu_k} \right\} (R_0 - 1) < \frac{1}{2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\delta_{2k}^2} + \frac{1}{\delta_{3k}^2} \right)},$$

2) 当 $R_0 > 1$ 时, 且

$$\max_{1 \leq k, j \leq n} \left\{ \frac{\beta_{kj} C_j}{h_j} \right\} \sum_{k=1}^n \frac{h_k \delta_{1k} b_k}{\mu_k \sqrt{2\mu_k - \delta_{1k}^2}} + \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k)}{a_k + \mu_k} \right\} (R_0 - 1) < \frac{1}{2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\delta_{2k}^2} + \frac{1}{\delta_{3k}^2} \right)}.$$

系统(3)的零解是随机指数稳定的。其中: $h_k = \frac{\omega_k (a_k + \mu_k)}{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k)}, k=1, 2, \dots, n$ 。

证明 由于矩阵 $B = [\beta_{kj}]_{n \times n}$ 是不可约的, 且 $\beta_{kj} \geq 0, a_k, \mu_k, \gamma_k, b_k, C_k, k=1, 2, \dots, n$, 均大于 0, 则可知矩阵 A 是不可约的且为正定矩阵。由文献[15]知, 矩阵 A 对应的谱半径 $\rho(A)$ 存在一个左特征向量 $w = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]$, 其中 $\omega_k > 0, k=1, 2, \dots, n$, 使得: $[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] \rho(A) = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] A$ 。

定义 Lyapunov 函数 $V: V(I_1, R_1, \dots, I_n, R_n) = \sum_{k=1}^n \left(h_k I_k + \frac{\omega_k a_k}{\mu_k (\mu_k + a_k + \gamma_k)} R_k \right)$, 则对函数 V 利用伊藤公式可得:

$$d(\ln V) = L(\ln V) dt + \frac{1}{V} \sum_{k=1}^n \left(h_k \delta_{2k} I_k dW_{2k} + \frac{\omega_k a_k}{\mu_k (\mu_k + a_k + \gamma_k)} \delta_{3k} R_k dW_{2k} \right), \quad (5)$$

其中 $L(\ln V) = N_1 + N_2 + N_3$, 即:

$$N_1 = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^n h_k \left(\sum_{j=1}^n \beta_{kj} S_k \varphi_j(I_j) - (\mu_k + \gamma_k) I_k + a_k R_k \right),$$

$$N_2 = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k a_k}{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k)} [\gamma_k I_k - (a_k + \mu_k) R_k], N_3 = -\frac{1}{2V^2} \sum_{k=1}^n \left[h_k^2 \delta_{2k}^2 I_k^2 + \frac{\omega_k^2 a_k^2 \delta_{3k}^2}{\mu_k^2 (a_k + \mu_k + \gamma_k)^2} R_k^2 \right].$$

设 Z_k 为随机方程 $dZ_k = [b_k - \mu_k Z_k] dt + \delta_{1k} Z_k dW_{1k}(t)$ 在初值条件 $Z_k(0) = S_k(0)$ 下的解。根据比较定理, 可得 $S_k(t) \leq Z_k(t)$ a. s.。若 $2\mu_k > \delta_{1k}^2, k=1, 2, \dots, n$, 根据文献[16]中的定理 3.1 和定理 3.2 可以得到:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t Z_k(t) dt}{t} = \frac{b_k}{\mu_k}, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \left| Z_k - \frac{b_k}{\mu_k} \right| dt}{t} \leq \frac{\delta_{1k} b_k}{\mu_k \sqrt{2\mu_k - \delta_{1k}^2}}, \quad (6)$$

则可得:

$$N_1 = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^n h_k \left[\sum_{j=1}^n \beta_{kj} S_k \varphi_j(I_j) - (\mu_k + \gamma_k) I_k + a_k R_k \right] \leq$$

$$\frac{1}{V} \sum_{k=1}^n h_k \left[\sum_{j=1}^n \beta_{kj} C_j \left(Z_k - \frac{b_k}{\mu_k} \right) I_j + \sum_{j=1}^n \beta_{kj} C_j \frac{b_k}{\mu_k} I_j - (\mu_k + \gamma_k) I_k + a_k R_k \right] \leq$$

$$\frac{1}{V} \left(\sum_{k=1}^n h_k \sum_{j=1}^n \beta_{kj} C_j \left| Z_k - \frac{b_k}{\mu_k} \right| I_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{(a_k + \mu_k) \beta_{kj} C_j b_k \omega_k}{\mu_k^2 (a_k + \mu_k + \gamma_k)} I_j - \sum_{k=1}^n \frac{(a_k + \mu_k) \omega_k}{a_k + \mu_k + \gamma_k} I_k - \sum_{k=1}^n h_k (\gamma_k I_k - a_k R_k) \right) \leq$$

$$\max_{1 \leq k, j \leq n} \left\{ \frac{\beta_{kj} C_j}{h_j} \right\} \frac{1}{V} \sum_{k=1}^n h_k \left| Z_k - \frac{b_k}{\mu_k} \right| \sum_{j=1}^n h_j I_j + \frac{1}{V} \sum_{k=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \frac{(a_k + \mu_k) \beta_{kj} C_j b_k \omega_k}{\mu_k^2 (a_k + \mu_k + \gamma_k)} I_j - \omega_k I_k \right] +$$

$$\frac{1}{V} \left(\sum_{k=1}^n h_k a_k R_k - \sum_{k=1}^n \frac{a_k \gamma_k \omega_k I_k}{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k)} \right). \quad (7)$$

由

$$\frac{1}{V} \sum_{j=1}^n h_j I_j = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^n h_k I_k = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \left[h_k I_k + \frac{a_k \omega_k}{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k)} \right]} \sum_{k=1}^n h_k I_k \leq 1, \quad (8)$$

且

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \frac{(a_k + \mu_k) \beta_{kj} C_j b_k \omega_k}{\mu_k^2 (a_k + \mu_k + \gamma_k)} I_j - \omega_k I_k \right] = \\ & [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] \begin{bmatrix} \frac{(a_1 + \mu_1) \beta_{11} C_1 b_1}{\mu_1^2 (a_1 + \mu_1 + \gamma_1)} & \dots & \frac{(a_1 + \mu_1) \beta_{1n} C_n b_1}{\mu_1^2 (a_1 + \mu_1 + \gamma_1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(a_n + \mu_n) \beta_{n1} C_1 b_n}{\mu_n^2 (a_n + \mu_n + \gamma_n)} & \dots & \frac{(a_n + \mu_n) \beta_{nn} C_n b_n}{\mu_n^2 (a_n + \mu_n + \gamma_n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} - [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \\ & (\rho(\mathbf{A}) - 1) \mathbf{w} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = (R_0 - 1) \sum_{k=1}^n \omega_k I_k. \end{aligned} \quad (9)$$

由于 $h_k = \frac{(a_k + \mu_k) \omega_k}{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k)}$, 则 $\omega_k = \frac{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k)}{a_k + \mu_k} h_k, k=1, 2, \dots, n$, 因此有:

$$\frac{1}{V} \sum_{k=1}^n \omega_k I_k = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k)}{a_k + \mu_k} h_k I_k. \quad (10)$$

所以将 (8)、(9)、(10) 式代入 (7) 式中可知, 当 $R_0 \leq 1$ 时, 有:

$$\begin{aligned} N_1 & \leq \max_{1 \leq k, j \leq n} \left\{ \frac{\beta_{kj} C_j}{h_j} \right\} \sum_{k=1}^n h_k \left| Z_k - \frac{b_k}{\mu_k} \right| + \\ & \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k)}{a_k + \mu_k} \right\} (R_0 - 1) + \frac{1}{V} \left(\sum_{k=1}^n h_k a_k R_k - \sum_{k=1}^n \frac{a_k \gamma_k \omega_k I_k}{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k)} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

或者当 $R_0 > 1$ 时, 有:

$$\begin{aligned} N_1 & \leq \max_{1 \leq k, j \leq n} \left\{ \frac{\beta_{kj} C_j}{h_j} \right\} \sum_{k=1}^n h_k \left| Z_k - \frac{b_k}{\mu_k} \right| + \\ & \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k)}{a_k + \mu_k} \right\} (R_0 - 1) + \frac{1}{V} \left(\sum_{k=1}^n h_k a_k R_k - \sum_{k=1}^n \frac{a_k \gamma_k \omega_k I_k}{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k)} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

同时有:

$$\begin{aligned} N_4 & := N_2 + \frac{1}{V} \left(\sum_{k=1}^n h_k a_k R_k - \sum_{k=1}^n \frac{a_k \gamma_k \omega_k I_k}{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k)} \right) = \\ & \frac{1}{V} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\omega_k a_k}{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k)} [\gamma_k I_k - (a_k + \mu_k) R_k] + \sum_{k=1}^n h_k a_k R_k - \sum_{k=1}^n \frac{a_k \gamma_k \omega_k I_k}{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k)} \right) = \\ & \frac{1}{V} \left(- \sum_{k=1}^n \frac{(a_k + \mu_k) \omega_k a_k}{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k)} R_k + \sum_{k=1}^n h_k a_k R_k + \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k a_k \gamma_k I_k}{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k)} - \sum_{k=1}^n \frac{a_k \gamma_k \omega_k I_k}{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

此外, 根据文献[17]中的引理 4 可知对于任意的实数 $d_k, e_k, f_k, g_k, k=1, 2, \dots, n$, 利用不等式的性质和向量的方法有: $\left(\sum_{k=1}^n (d_k e_k + f_k g_k) \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n d_k^2 + \sum_{k=1}^n f_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n e_k^2 + \sum_{k=1}^n g_k^2 \right)$. 那么由

$$V(I_1, R_1, \dots, I_n, R_n) = \sum_{k=1}^n \left(h_k I_k + \frac{\omega_k a_k}{\mu_k (\mu_k + a_k + \gamma_k)} R_k \right),$$

则有:

$$V^2 = \left(\sum_{k=1}^n \left(h_k I_k + \frac{a_k \omega_k}{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k)} R_k \right) \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{h_k I_k}{\delta_{2k}} \delta_{2k} + \frac{a_k \omega_k \delta_{3k}}{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k) \delta_{3k}} R_k \right) \right)^2 \leq$$

$$\left(\sum_{k=1}^n h_k^2 I_k^2 \delta_{2k}^2 + \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2 \omega_k^2 R_k^2 \delta_{3k}^2}{\mu_k^2 (a_k + \mu_k + \gamma_k)^2} \right) \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\delta_{2k}^2} + \frac{1}{\delta_{3k}^2} \right) \right). \quad (14)$$

将(14)式代入 N_3 中有:

$$N_3 = -\frac{1}{2V^2} \sum_{k=1}^n \left[h_k^2 \delta_{2k}^2 I_k^2 + \frac{\omega_k^2 a_k^2 \delta_{3k}^2}{\mu_k^2 (a_k + \mu_k + \gamma_k)^2} R_k^2 \right] \leq -\frac{1}{2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\delta_{2k}^2} + \frac{1}{\delta_{3k}^2} \right)}. \quad (15)$$

然后,根据(11)、(13)、(15)式可得:

$$L(\log V) = \max_{1 \leq k, j \leq n} \left\{ \frac{\beta_{kj} C_j}{h_j} \right\} \sum_{k=1}^n h_k \left| Z_k - \frac{b_k}{\mu_k} \right| + \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k)}{a_k + \mu_k} \right\} (R_0 - 1) - \frac{1}{2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\delta_{2k}^2} + \frac{1}{\delta_{3k}^2} \right)}, \quad (16)$$

或者由(12)、(13)、(15)式可得:

$$L(\log V) = \max_{1 \leq k, j \leq n} \left\{ \frac{\beta_{kj} C_j}{h_j} \right\} \sum_{k=1}^n h_k \left| Z_k - \frac{b_k}{\mu_k} \right| + \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k)}{a_k + \mu_k} \right\} (R_0 - 1) - \frac{1}{2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\delta_{2k}^2} + \frac{1}{\delta_{3k}^2} \right)}. \quad (17)$$

由于 $E \left[\int_0^t \frac{1}{V} \sum_{k=1}^n \left(h_k \delta_{2k} I_k dW_{2k} + \frac{\omega_k a_k \delta_{3k} R_k}{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k)} dW_{3k} \right) \right] = 0$, 那么对(5)式两端先取积分,再取数学期望,根据(16)、(17)式分别有:

$$\begin{aligned} \frac{\log V}{t} &\leq \frac{\log V(0)}{t} + \max_{1 \leq k, j \leq n} \left\{ \frac{\beta_{kj} C_j}{h_j} \right\} \sum_{k=1}^n h_k \frac{\int_0^t \left| Z_k - \frac{b_k}{\mu_k} \right| dt}{t} + \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k)}{a_k + \mu_k} \right\} (R_0 - 1) - \frac{1}{2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\delta_{2k}^2} + \frac{1}{\delta_{3k}^2} \right)}, \\ \frac{\log V}{t} &\leq \frac{\log V(0)}{t} + \max_{1 \leq k, j \leq n} \left\{ \frac{\beta_{kj} C_j}{h_j} \right\} \sum_{k=1}^n h_k \frac{\int_0^t \left| Z_k - \frac{b_k}{\mu_k} \right| dt}{t} + \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k)}{a_k + \mu_k} \right\} (R_0 - 1) - \frac{1}{2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\delta_{2k}^2} + \frac{1}{\delta_{3k}^2} \right)}. \end{aligned}$$

最后,根据(6)式,有:

1) 当 $R_0 \leq 1$ 时,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log V}{t} \leq \max_{1 \leq k, j \leq n} \left\{ \frac{\beta_{kj} C_j}{h_j} \right\} \sum_{k=1}^n \frac{h_k \delta_{1k} b_k}{\mu_k \sqrt{2\mu_k - \delta_{1k}^2}} + \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k)}{a_k + \mu_k} \right\} (R_0 - 1) - \frac{1}{2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\delta_{2k}^2} + \frac{1}{\delta_{3k}^2} \right)},$$

此时若条件 1) 成立,可得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log V}{t} < 0$, 即系统(3)的零解为随机指数稳定;

2) 当 $R_0 > 1$ 时,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log V}{t} \leq \max_{1 \leq k, j \leq n} \left\{ \frac{\beta_{kj} C_j}{h_j} \right\} \sum_{k=1}^n \frac{h_k \delta_{1k} b_k}{\mu_k \sqrt{2\mu_k - \delta_{1k}^2}} + \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{\mu_k (a_k + \mu_k + \gamma_k)}{a_k + \mu_k} \right\} (R_0 - 1) - \frac{1}{2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\delta_{2k}^2} + \frac{1}{\delta_{3k}^2} \right)},$$

此时若条件 2) 成立,可得到: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log V}{t} < 0$, 此时系统(3)的零解为随机指数稳定。

证毕

注 定理 2 成立时,当 $2\mu_k > \delta_{1k}^2$, 且白噪声 δ_{2k} 和 δ_{3k} ($k=1, 2, \dots, n$) 满足条件 1) 或条件 2), 不论 $R_0 \leq 1$ 或者 $R_0 > 1$, 均可得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log V}{t} < 0$, 即疾病最终将呈指数型灭绝。

4 总结

本文在 Tudor 研究 SIRI 传染病模型的基础上,考虑了具有非线性发生率的多群体随机 SIRI 传染病模型。首先给出了确定性模型的无病平衡点和地方病平衡点、基本再生数,然后利用随机微分方程解的知识证明了模型正解的存在唯一性,最后通过构造合适的 Lyapunov 函数、运用矩阵的图论知识和不等式放缩技巧,并对模型的非线性项做一定的假设,得到了疾病呈指数型灭绝的条件。即当白噪声的干扰强度满足一定的条件时,无论传染病模型的基本再生数 $R_0 \leq 1$ 或者 $R_0 > 1$, 疾病最终都将呈指数型灭绝。

参考文献:

- [1] TUDOR D. A deterministic model for herpes infections in human and animal populations[J]. SIAM Review, 1990, 32(1): 136-139.
- [2] SMITH G, GRENFELL B T. Population biology of pseudorabies in swine[J]. American Journal of Veterinary Research, 1990, 51(1): 148-155.
- [3] BLOWER S. Modelling the genital herpes epidemic[J]. Herpes: the Journal of the IHMF, 2004, 11(suppl. 3): 138-146.
- [4] LEI Q, YANG Z C. Dynamical behaviors of a stochastic SIRS epidemic model[J]. Applicable Analysis, 2016, 96(16): 1-13.
- [5] LIU Q, JIANG D Q, HAYAT T, et al. Influence of stochastic perturbation on an SIRS epidemic model with relapse[J]. Applicable Analysis, 2020, 99(4): 549-568.
- [6] ZHANG X B, HUO H F, HONG X, et al. The threshold of a stochastic SIQS epidemic model[J]. Physica A, 2017, 482: 362-374.
- [7] LIU Q, JIANG D Q, HAYAT T, et al. Dynamics of a stochastic SIR epidemic model with distributed delay and degenerate diffusion[J]. Journal of the Franklin Institute, 2019, 356(13): 7347-7370.
- [8] 牟晓洁, 张启敏, 王宗. 随机 SIRS 模型拟最优控制存在的充分条件[J]. 应用数学学报, 2019, 42(4): 442-454.
MU X J, ZHANG Q M, WANG Z. Sufficient condition for near-optimal control of a stochastic SIRS epidemic model[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2019, 42(4): 442-454.
- [9] LAJMANOVICH A, YORKE J A. A deterministic model for gonorrhea in a nonhomogeneous population[J]. Mathematical Biosciences, 1976, 28(3/4): 221-236.
- [10] JI C Y, JIANG D Q, YANG Q S, et al. Dynamics of a multigroup SIR epidemic model with stochastic perturbation[J]. Automatica, 2012, 48(1): 121-131.
- [11] FU J, HAN Q X, LIN Y G, et al. Asymptotic behavior of a multigroup SIS epidemic model with stochastic perturbation[J]. Advances in Difference Equations, 2015, 2015(1): 84-93.
- [12] LIU Q, JIANG D Q, HAYAT T, et al. Dynamics of a stochastic multigroup SIQR epidemic model with standard incidence rates[J]. Journal of the Franklin Institute, 2019, 356(5): 2960-2993.
- [13] HAN Q X, JIANG D Q. Dynamic for a stochastic multi-group AIDS model with saturated incidence rate[J]. Acta Mathematica Scientia, 2020, 40(6): 1883-1896.
- [14] Van den DRIESSCHE P, ZOU X. Modeling relapse in infectious diseases[J]. Mathematical Biosciences, 2007, 207(1): 89-103.
- [15] BERMAN A, PLEMMONS R J. Negative matrices in the mathematical science[M]. New York: Academic Press, 1979.
- [16] LIU H, YANG Q S, JIANG D Q. The asymptotic behavior of stochastically perturbed DI SIR epidemic models with saturated incidences[J]. Automatica, 2012, 48(5): 820-825.
- [17] LIN Y G, JIANG D Q. Dynamics of a multigroup SIR epidemic model with nonlinear incidence and stochastic perturbation[EB/OL]. (2013-07-16)[2021-04-25]. Abstract and Applied Analysis, 2013, 2013: 917389. <https://www.hindawi.com/journals/aaa/2013/917389/>.

The Qualitative Analysis of Multigroup SIRS Model with Stochastic Perturbations

ZHANG Zhicheng, YANG Zhichun

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [Purposes] A multigroup SIRS model with nonlinear incidence and stochastic perturbations is studied. [Methods] Using the the basic theory of stochastic differential equations, the existence and uniqueness of positive solutions are proved. By constructing suitable Lyapunov functions and applying the knowledge of graph theory and the basic reproduction number, the sufficient conditions for the stochastic exponential stability of the zero solution of the epidemic model are obtained. [Findings] The results show that the appropriate stochastic disturbance can change the dynamic behavior of the system. When the white noise satisfies certain conditions, the zero solution of the system is stochastic exponentially stable, which means that the diseases will eventually be exponential extinct. The zero solution of the system is stochastic exponentially stable, which means that diseases will be extinct exponentially regardless of $R_0 > 1$ or $R_0 \leq 1$. [Conclusions] Under the assumption of the nonlinear incidences, the extinction of disease is controlled by the intensity of white noise.

Keywords: SIRS epidemic model; Lyapunov functions; white noise; extinct exponentially

(责任编辑 黄 颖)