

分数阶累加的离散 GM(2,1)模型与应用^{*}

曾 亮¹, 骆世广²

(1. 广东理工学院 基础课教学研究部, 广东 肇庆 526100; 2. 广东金融学院 金融数学与统计学院, 广州 510521)

摘要:【目的】为解决传统二阶单变量灰色预测模型 GM(2,1)对某些序列存在预测精度不高的问题。【方法】在 GM(2,1)的基础上,引入分数阶累加算子并利用离散灰色模型的建模原理,提出了一种基于分数阶累加的离散 GM(2,1)模型(FDGM(2,1))。【结果】给出了 FDGM(2,1)模型可用于预测的时间响应式和还原式。为达到最优的预测性能,建立了以平均相对模拟误差最小为目标的优化模型,并给出了确定模型最优阶数的方法。最后用一个数值模拟实验和一个应用实例对新模型进行检验。【结论】结果表明,新模型比其他常用模型具有更高的模拟预测精度,是有效且实用的。

关键词:灰色系统;GM(2,1);分数阶累加;离散灰色模型

中图分类号:O193;N941.5

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2021)05-0073-08

灰色系统理论^[1]是一种针对小样本时间序列的预测和分析的方法,它由邓聚龙教授在20世纪80年代初提出,至今已在各个领域得到了广泛应用。灰色预测模型是灰色理论的核心内容,由于它所需的建模数据较少,建模过程相对简单,因此受到越来越多的学者关注。为增强预测模型的适应性,邓聚龙教授提出了单变量灰色预测模型 GM(2,1),该模型的白化方程为二阶微分方程。它有两个特征根,理论上能适应不同变化特征的时间序列,但由于结构上存在缺陷,在很多时候预测效果不理想。为提高模型的预测精度,学者们在传统 GM(2,1)的基础上提出了一些改进模型。例如, Li 等人^[2]根据三次样条函数提出了一种新的初值和导数计算方法,提高了预测能力。唐李伟等人^[3]利用级差格式对 GM(2,1)的参数估计进行了优化,通过实例表明比传统方法具有更好的预测效果。Xu 等人^[4]利用背景值序列和累减生成序列对传统 GM(2,1)的结构进行优化,得到了一种新的优化模型 SOGM(2,1),并通过某公路沉降预测表明 SOGM(2,1)预测方法是有效可行的。赵新冀等人^[5]构造了关于背景值序列的二阶微分方程,利用此方程来求解模型的时间响应序列,最后将改进后的模型应用于某粮仓的温度、湿度预测,取得了较高的预测精度。以上改进模型虽然提高了模拟预测精度,取得了不错的效果,但仍然存在一些不足。它们都是采用离散形式的差分方程估计参数,而用连续形式的微分方程进行模拟预测,这势必会存在一定的转换误差。有时甚至误差较大,导致模型的预测结果很不理想。

为解决好上述问题并尽可能地取得较高的预测精度,本文借助谢乃明等人^[6]提出的离散灰色模型的建模原理和吴利丰等人^[7]提出的分数阶累加生成算子,构造出一种基于分数阶累加的离散 GM(2,1)模型。该模型利用同一个灰色差分方程进行参数辨识和模拟预测,能够有效消除从差分方程(用于辨识参数)到微分方程(用于模拟预测)的转换误差。另外,分数阶累加方式较传统的一阶累加方式更能降低原始序列的随机性和不确定性。通过选取合适的累加阶数,可进一步提升模型的预测精度。为得到最优的累加阶数,本文以平均相对模拟误差最小化为目标,采用穷举法搜索确定。最后,通过一个数值模拟实验和一个应用实例验证新模型的有效性和实用性。结果显示,在所有比较模型中,新模型具有最高的模拟预测精度,预测性能优于其他模型。这说明新模型具有良好的应用潜力,它的提出拓展了灰色预测模型的理论研究体系和应用范围。

1 分数阶累加的离散 GM(2,1)模型

1.1 分数阶累加生成矩阵和累减还原矩阵^[8]

假设 $\mathbf{X}^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))^T$ 为原始数据序列。 $\mathbf{X}^{(r)} = (x^{(r)}(1), x^{(r)}(2), \dots, x^{(r)}(n))^T (r \geq 0)$

^{*} 收稿日期:2020-05-17 修回日期:2021-01-17 网络出版时间:2021-09-13 09:08

资助项目:广东省教育科学“十三五”规划2020年度研究项目(No. 2020JKDY040);科技部国家重点研发计划“数字诊疗装备研发”重点专项(No. 2017YFC0112900);广东省高校重点平台和科研项目(No. 2018KTSCX276; No. 2018KQNCX315);2020年度广东省教学质量与教学改革工程项目(No. 414)

第一作者简介:曾亮,男,教授,研究方向为灰色系统理论及应用,E-mail:zengliang19820809@126.com

网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20210910.1730.010.html

表示 $\mathbf{X}^{(0)}$ 的 r 阶累加生成序列, 其中: $x^{(r)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(r-1)}(i), k=1, 2, \dots, n$ 。

若记 $\mathbf{A}^r$ 为 r 阶累加生成矩阵, 则 $\mathbf{X}^{(0)}$ 与 $\mathbf{X}^{(r)}$ 之间满足关系式 $\mathbf{X}^{(r)} = \mathbf{A}^r \mathbf{X}^{(0)}$, 其中:

$$\mathbf{A}^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_r^1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ C_{r+1}^2 & C_r^1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ C_{r+n-2}^{n-1} & C_{r+n-3}^{n-2} & C_{r+n-4}^{n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n},$$

且 $C_{r+i-1}^i = \frac{r(r+1)\cdots(r+i-1)}{i!}, i=1, 2, \dots, n$ 。

当 $r=1$ 时, $\mathbf{X}^{(0)}$ 的一阶累加生成序列 $\mathbf{X}^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n))^T$ 可表示为 $\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{A} \mathbf{X}^{(0)}$, 其中 $\mathbf{A} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}。$$

易知 $\mathbf{A}^r$ 为下三角方阵, 行列式 $|\mathbf{A}^r| = 1 \neq 0$, 故 $\mathbf{A}^r$ 为可逆矩阵。由于 $\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{A} \mathbf{X}^{(0)}$, 则 $\mathbf{X}^{(0)} = (\mathbf{A}^r)^{-1} \mathbf{X}^{(r)}$ 。记 $\mathbf{D}^r$ 为 $\mathbf{A}^r$ 的逆矩阵, 即 $\mathbf{D}^r = (\mathbf{A}^r)^{-1}$, 此时称 $\mathbf{D}^r$ 为 r 阶累减还原矩阵, 则:

$$\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{D}^r \mathbf{X}^{(r)}, \quad (1)$$

其中:

$$\mathbf{D}^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_{-r}^1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ C_{-r+1}^2 & C_{-r}^1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ C_{-r+n-2}^{n-1} & C_{-r+n-3}^{n-2} & C_{-r+n-4}^{n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n},$$

且 $C_{-r+i-1}^i = \frac{(-r)(-r+1)\cdots(-r+i-1)}{i!} = (-1)^i \frac{r(r-1)\cdots(r-i+1)}{i!}, i=1, 2, \dots, n$ 。

$$\text{当 } r=1 \text{ 时, 有 } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}, \text{ 则 } \mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{D} \mathbf{X}^{(1)}, \text{ 具体表示为:}$$

$$x^{(0)}(1) = x^{(1)}(1); x^{(0)}(k) = x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1), k=2, 3, \dots, n。$$

1.2 模型的构建

若 $\mathbf{X}^{(1)}$ 为原始序列 $\mathbf{X}^{(0)}$ 的一阶累加生成序列, 即满足 $\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{A} \mathbf{X}^{(0)}$, 其中:

$$x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), k=1, 2, \dots, n。$$

令 $\mathbf{Z}^{(1)} = (z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \dots, z^{(1)}(n))^T$ 为背景值序列, 其中:

$$z^{(1)}(k) = 0.5(x^{(1)}(k-1) + x^{(1)}(k)), k=2, 3, \dots, n。$$

传统 GM(2,1) 模型的基本形式为:

$$x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1) + a_1 x^{(0)}(k) + a_2 z^{(1)}(k) = b, \quad (2)$$

白化方程为:

$$\frac{d^2 x^{(1)}(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + a_2 x^{(1)}(t) = b。 \quad (3)$$

传统 GM(2,1) 模型是利用(2)式估计模型参数, 然后将得到的参数辨识值代入(3)式, 从而求解得到模型可

用于模拟和预测的时间响应式。显然,离散方程(2)和连续方程(3)之间的转换会存在一定的误差,这也是有时传统 GM(2,1)模型的预测精度不高的原因之一。为了消除这种转换误差以提高预测精度,必须使辨识参数和求解时间响应式的方程为同一个方程。为此,下面利用传统离散灰色建模原理并结合分数阶累加思想,构造了一种基于分数阶累加的离散 GM(2,1)模型。

定义 1 若 r 为已知非负实数, $\mathbf{X}^{(r)}$ 为原始序列 $\mathbf{X}^{(0)}$ 的 r 阶累加生成序列,则称方程

$$x^{(r)}(k+2) = ax^{(r)}(k+1) + bx^{(r)}(k) + c \quad (4)$$

为基于分数阶累加的离散 GM(2,1)模型,简记为 FDGM(2,1)。

把序列 $\mathbf{X}^{(r)}$ 中的各个数据点代入到(4)式中,得到方程组:

$$\begin{cases} x^{(r)}(3) = ax^{(r)}(2) + bx^{(r)}(1) + c \\ x^{(r)}(4) = ax^{(r)}(3) + bx^{(r)}(2) + c \\ \vdots \\ x^{(r)}(n) = ax^{(r)}(n-1) + bx^{(r)}(n-2) + c \end{cases}。$$

于是,根据最小二乘法可得模型参数的辨识公式为:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (a, b, c)^T = (\mathbf{B}_r^T \mathbf{B}_r)^{-1} \mathbf{B}_r^T \mathbf{y}_r。 \quad (5)$$

$$\text{其中: } \mathbf{B}_r = \begin{pmatrix} x^{(r)}(2) & x^{(r)}(1) & 1 \\ x^{(r)}(3) & x^{(r)}(2) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x^{(r)}(n-1) & x^{(r)}(n-2) & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y}_r = \begin{pmatrix} x^{(r)}(3) \\ x^{(r)}(4) \\ \vdots \\ x^{(r)}(n) \end{pmatrix}。$$

将得到的参数辨识值代入(4)式,可得:

$$x^{(r)}(k+2) - ax^{(r)}(k+1) - bx^{(r)}(k) = c。 \quad (6)$$

容易看出(6)式为二阶常系数非齐次线性差分方程,对应的齐次线性差分方程的特征方程为:

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0。 \quad (7)$$

求解(7)式可得到该方程的两个根为: $\lambda_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$ 。于是(6)式对应的齐次线性差分

方程的解为:

$$\hat{x}_g^{(r)}(k) = \begin{cases} m_1 \left(\frac{a + \sqrt{\Delta}}{2} \right)^k + m_2 \left(\frac{a - \sqrt{\Delta}}{2} \right)^k, \Delta > 0 \\ (m_3 + m_4 k) \left(\frac{a}{2} \right)^k, \Delta = 0 \\ (-b)^{\frac{1}{2}k} \left(m_5 \cos \left(k \arctan \frac{\sqrt{-\Delta}}{a} \right) + m_6 \sin \left(k \arctan \frac{\sqrt{-\Delta}}{a} \right) \right), \Delta < 0 \end{cases}。$$

其中: $\Delta = a^2 + 4b$ 。

由于(6)式的非齐次项 c 为常数项,故它的特解也为常数。根据待定系数法,令特解 $\hat{x}_s^{(r)}(k) = c_0$,并代入(6)式得 $c_0 - ac_0 - bc_0 = c$,则 $c_0 = \frac{c}{1-a-b}$ 。由(6)式的一般解公式 $\hat{x}^{(r)}(k) = \hat{x}_g^{(r)}(k) + \hat{x}_s^{(r)}(k)$,可得 FDGM(2,1)模型的时间响应式为:

$$\hat{x}^{(r)}(k) = \begin{cases} m_1 \left(\frac{a + \sqrt{\Delta}}{2} \right)^k + m_2 \left(\frac{a - \sqrt{\Delta}}{2} \right)^k + \frac{c}{1-a-b}, \Delta > 0 \\ (m_3 + m_4 k) \left(\frac{a}{2} \right)^k + \frac{c}{1-a-b}, \Delta = 0 \\ (-b)^{\frac{1}{2}k} \left(m_5 \cos \left(k \arctan \frac{\sqrt{-\Delta}}{a} \right) + m_6 \sin \left(k \arctan \frac{\sqrt{-\Delta}}{a} \right) \right) + \frac{c}{1-a-b}, \Delta < 0 \end{cases}。 \quad (8)$$

其中: $\Delta = a^2 + 4b$, $m_i (i=1, 2, \dots, 6)$ 为常数, $k=1, 2, \dots$ 。

为确定(8)式中 $m_i (i=1, 2, \dots, 6)$ 的值,本文取定初值条件为:

$$\hat{x}^{(r)}(1) = x^{(r)}(1), \hat{x}^{(r)}(n) = x^{(r)}(n)。 \quad (9)$$

将(9)式代入 FDGM(2,1)模型的时间响应(8)式中,可得:

$$m_1 = \frac{\left[x^{(r)}(1) - \frac{c}{1-a-b} \right] \left(\frac{a-\sqrt{\Delta}}{2} \right)^{n-1} - x^{(r)}(n) + \frac{c}{1-a-b}}{\left(\frac{a+\sqrt{\Delta}}{2} \right) \left(\frac{a-\sqrt{\Delta}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{a+\sqrt{\Delta}}{2} \right)^n}, \quad (10)$$

$$m_2 = \frac{x^{(r)}(m) - \frac{c}{1-a-b} - \left[x^{(r)}(1) - \frac{c}{1-a-b} \right] \left(\frac{a+\sqrt{\Delta}}{2} \right)^{n-1}}{\left(\frac{a-\sqrt{\Delta}}{2} \right)^n - \left(\frac{a-\sqrt{\Delta}}{2} \right) \left(\frac{a+\sqrt{\Delta}}{2} \right)^{n-1}}, \quad (11)$$

$$m_3 = \frac{\left[x^{(r)}(1) - \frac{c}{1-a-b} \right] \frac{2n}{a} - \left[x^{(r)}(n) - \frac{c}{1-a-b} \right] \left(\frac{2}{a} \right)^n}{n-1}, \quad (12)$$

$$m_4 = \frac{\left[x^{(r)}(n) - \frac{c}{1-a-b} \right] \left(\frac{2}{a} \right)^n - \left[x^{(r)}(1) - \frac{c}{1-a-b} \right] \frac{2}{a}}{n-1}, \quad (13)$$

$$m_5 = \frac{\left[x^{(r)}(1) - \frac{c}{1-a-b} \right] \sin \left(n \arctan \frac{\sqrt{-\Delta}}{a} \right) (-b)^{\frac{1}{2}(n-1)} - \left[x^{(r)}(n) - \frac{c}{1-a-b} \right] \sin \left(\arctan \frac{\sqrt{-\Delta}}{a} \right)}{\sin \left((n-1) \arctan \frac{\sqrt{-\Delta}}{a} \right) (-b)^{\frac{1}{2}n}}, \quad (14)$$

$$m_6 = \frac{\left[x^{(r)}(n) - \frac{c}{1-a-b} \right] \cos \left(\arctan \frac{\sqrt{-\Delta}}{a} \right) - \left[x^{(r)}(1) - \frac{c}{1-a-b} \right] \cos \left(n \arctan \frac{\sqrt{-\Delta}}{a} \right) (-b)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{\sin \left((n-1) \arctan \frac{\sqrt{-\Delta}}{a} \right) (-b)^{\frac{1}{2}n}}. \quad (15)$$

当确定了 $m_i (i=1, 2, \dots, 6)$ 的值后,根据(8)式可计算得到 $\mathbf{X}^{(r)}$ 的模拟值序列 $\hat{\mathbf{X}}^{(r)}$ 。然后利用原始序列与 r 阶累加生成序列之间的关系式(1),可得原始序列 $\mathbf{X}^{(0)}$ 的模拟值序列 $\hat{\mathbf{X}}^{(0)}$,即 FDGM(2,1)模型的还原式为 $\hat{\mathbf{X}}^{(0)} = \mathbf{D}^r \hat{\mathbf{X}}^{(r)}$,即 $(\hat{x}^{(0)}(1), \hat{x}^{(0)}(2), \dots, \hat{x}^{(0)}(n))^T = \mathbf{D}^r (\hat{x}^{(r)}(1), \hat{x}^{(r)}(2), \dots, \hat{x}^{(r)}(n))^T$ 。具体表示为:

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \sum_{j=1}^k C_{-r+k-j-1}^{k-j} \hat{x}^{(r)}(j), k=1, 2, \dots. \quad (16)$$

1.3 模型的特殊形式

下面就本文提出的 FDGM(2,1)模型的特殊形式做一些分析。

1) 当 $r=1, b=0$ 时,FDGM(2,1)模型退化为: $x^{(1)}(k+2) = ax^{(1)}(k+1) + c$,相当于文献[6]提出的经典模型——DGM(1,1)模型: $x^{(1)}(k+1) = U_1 x^{(1)}(k+1) + U_2$,其中 U_1 和 U_2 为模型参数。

2) 当 $b=0$ 时,FDGM(2,1)模型退化为: $x^{(r)}(k+2) = ax^{(r)}(k+1) + c$,相当于文献[9]提出的 $\frac{p}{q}$ 阶累加离散灰色模型(DGM $_{\frac{p}{q}}^{(1,1)}$): $x^{(\frac{p}{q})}(k+1) = \beta_1 x^{(\frac{p}{q})}(k) + \beta_2$,其中 p, q 为正整数,且 $0 < \frac{p}{q} < 1$; β_1 和 β_2 为模型参数。

3) 当 $r=1$ 时,FDGM(2,1)模型为退化为:

$$x^{(1)}(k+2) = ax^{(1)}(k+1) + bx^{(1)}(k) + c, \quad (17)$$

此时称(17)式为离散 GM(2,1)模型,记为 DGM(2,1)。

DGM(2,1)模型参数的估计式为 $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (a, b, c)^T = (\mathbf{B}_1^T \mathbf{B}_1)^{-1} \mathbf{B}_1^T \mathbf{Y}_1$,其中:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} x^{(1)}(2) & x^{(1)}(1) & 1 \\ x^{(1)}(3) & x^{(1)}(2) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x^{(1)}(n-1) & x^{(1)}(n-2) & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} x^{(1)}(3) \\ x^{(1)}(4) \\ \vdots \\ x^{(1)}(n) \end{pmatrix}.$$

将 $r=1$ 代入(8)式和(10)~(16)式,可得 DGM(2,1)模型的时间响应式和还原式,具体表示式在此略。

由上可知,FDGM(2,1)模型可以看成是 DGM(1,1)、DGM $_{\frac{p}{q}}^{(1,1)}$ 和 DGM(2,1)等模型的推广。从理论上说明,FDGM(2,1)比一般灰色模型更能适应变化多样的数据序列,具有更广泛的应用性。

1.4 模型累加阶数的确定

为评估 FDGM(2,1)模型的预测性能,本文以相对误差(APE)和平均相对误差(MAPE)作为衡量标准,它们的表达式分别如下:

$$E_{\text{APE}(k)} = \left| \frac{y^{(0)}(k) - \hat{y}^{(0)}(k)}{y^{(0)}(k)} \right| \times 100\%, k=1,2,\dots,n; \quad (18)$$

$$E_{\text{MAPE}} = \frac{1}{w-l+1} \sum_{k=l}^w \left| \frac{y^{(0)}(k) - \hat{y}^{(0)}(k)}{y^{(0)}(k)} \right| \times 100\%, l \leq w \leq n. \quad (19)$$

若将含有 n 项数据的原始序列 $Y^{(0)}$ 的前 v 项建立灰色模型,后 $n-v$ 项用来检验模型的预测效果,则由(18)式可知,当 $k=1,2,\dots,v$ 时, $E_{\text{APE}(k)}$ 表示相对模拟误差;当 $k=v+1,v+2,\dots,n$ 时, $E_{\text{APE}(k)}$ 表示相对预测误差。由(19)式可知,当 $l=1,w=v$ 时, E_{MAPE} 表示平均相对模拟误差;当 $l=v+1,w=n$ 时, E_{MAPE} 表示平均相对预测误差。

由前面章节可知,在建立 FDGM(2,1)模型时,模型的累加阶数 r 是已知的。一般来说,随着累加阶数的变化,模型的 APE 和 MAPE 也会相应变化。现假定建立 FDGM(2,1)模型的数据序列表示为 $\mathbf{X}^{(0)} = (x^{(0)}(k) | k=1,2,\dots,v)^T$ 。为了确定最优的累加阶数,本文以平均相对模拟误差最小为目标,以累加阶数的范围为约束条件,构造优化模型:

$$\begin{aligned} \min_r E_{\text{MAPE}} &= \frac{1}{v} \sum_{k=1}^v \left| \frac{x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)} \right| \times 100\%, \\ \text{s. t. } &0 \leq r \leq 3. \end{aligned}$$

该优化模型比较复杂,难以直接求出解析解。由于灰色模型主要用于解决小样本时间序列的预测问题,且该优化模型只含一个未知量,故本文采用穷举法来确定模型的最优累加阶数,该方法虽然效率不高,但求解此类问题的计算量不大,简单易懂且实用。结合穷举法,FDGM(2,1)模型进行模拟预测的步骤如下:

步骤 1:选取原始序列 $\mathbf{X}^{(0)}$;

步骤 2:初始化累加阶数 $r=0$,最优阶数 $r_{\text{opt}}=0$,最优的平均相对模拟误差 $E_{\text{MAPE}_{\text{opt}}}=1.000$;

步骤 3:利用分数阶累加矩阵得到 $\mathbf{X}^{(r)}$,构造矩阵 $\mathbf{B}_r$ 和向量 $\mathbf{y}_r$,利用(5)式得到各参数值;

步骤 4:将各参数值代入到模型的时间响应(8)式和(10)~(15)式中,得到模拟值序列 $\hat{\mathbf{X}}^{(r)}$;

步骤 5:利用(16)式得到原始序列 $\mathbf{X}^{(0)}$ 的模拟值序列 $\hat{\mathbf{X}}^{(0)}$;

步骤 6:计算平均相对模拟误差 E_{MAPE} ,如果小于最优值 $E_{\text{MAPE}_{\text{opt}}}$,则将前者设置为 $E_{\text{MAPE}_{\text{opt}}}$,并且更新 r_{opt} ;

步骤 7:若累加阶数 $r \leq 3$,则更新 $r=r+0.01$,转到步骤 3。否则转到步骤 8;

步骤 8:由得到的最优的累加阶数 r_{opt} 得到 $\mathbf{X}^{(r)}$, $\mathbf{B}_r$ 和 $\mathbf{y}_r$,计算各参数值,代入时间响应序列得到模型的模拟预测值 $\hat{\mathbf{X}}^{(r)}$,利用累减还原得到原始序列的模拟预测值 $\hat{\mathbf{X}}^{(0)}$,同时得到相对模拟、预测误差及预测误差的平均值。

2 应用研究

2.1 数值模拟

为验证本文提出的 FDGM(2,1)模型的有效性,下面将构造一组数据进行模拟测试。记

$$y(k) = 10e^{0.2k} + 0.5k^2 - 2k + 20,$$

令 $k=1,2,\dots,15$,可得数据序列 $\mathbf{Y}^{(0)} = (30.71, 32.92, 36.72, 42.26, 49.68, 59.20, 71.05, 85.53, 103.00, 123.89, 148.75, 178.23, 213.14, 254.45, 303.36)^T$ 。将序列 $\mathbf{Y}^{(0)}$ 分为两部分,前 11 项数据做为原始数据建立 FDGM(2,1)模型。为了突出新模型在预测性能上的优势,同时建立了三次多项式回归模型(CPR)、离散 GM(1,1)模型(DGM(1,1))^[6]、非齐次离散 GM(1,1)模型(NDGM(1,1, k))^[10]和分数阶累加的 GM(2,1)模型(FGM(2,1))进行比较。后 4 项数据用来检验各模型的预测效果。FGM(2,1)和 FDGM(2,1)的最优累加阶数都是在以平均相对模拟误差最小为目标的前提下通过穷举法来确定的。下面列出了各个模型的模拟预测值和误差结果(表 1),并给出了各个模型的平均相对模拟和预测误差的比较图(封二彩图 1)。

2.1.1 FDGM(2,1)的建模过程 选取 $\mathbf{Y}^{(0)}$ 的前 11 项数据作为原始序列 $\mathbf{X}^{(0)} = (30.71, 32.92, 36.72, 42.26, 49.68, 59.20, 71.05, 85.53, 103.00, 123.89, 148.75)^T$ 。根据 FDGM(2,1)的建模过程,利用穷举法可得最优阶数为 $r=0$,此时采用最小二乘法可得到模型参数为 $a=2.045\ 734$, $b=-1.025\ 080$, $c=0.870\ 303$ 。将参数代入

到模型的时间响应式,得到:

$$\hat{x}^{(0)}(k) = 32.773\,816 \times 1.168\,391^k + 39.384\,966 \times 0.877\,343^k - 42.136\,761.$$

于是令 $k=1,2,\dots,11$,可得模拟值为:

$$\hat{\mathbf{X}}^{(0)} = (30.71, 32.92, 36.74, 42.28, 49.70, 59.20, 71.04, 85.51, 102.98, 123.89, 148.75)^T.$$

令 $k=12,13,14,15$,可得预测值为 $\hat{\mathbf{X}}_p^{(0)} = (178.18, 212.89, 253.74, 301.73)^T$ 。

表 1 5 种模型对测试数据的模拟预测结果

Tab. 1 Simulation and prediction results of five models for test data

序号	实际值	CPR		DGM(1,1)		NDGM(1,1,k)		FGM(2,1)		FDGM(2,1)	
		预测值	误差/%	预测值	误差/%	预测值	误差/%	预测值	误差/%	预测值	误差/%
1	30.71	30.55	0.51	30.71	0.00	30.71	0.00	30.71	0.00	30.71	0.00
2	32.92	33.06	0.44	29.36	10.83	31.72	3.65	33.73	2.47	32.92	0.00
3	36.72	36.88	0.45	35.09	4.43	36.71	0.03	36.88	0.43	36.74	0.04
4	42.26	42.30	0.09	41.95	0.73	42.84	1.38	42.62	0.86	42.28	0.04
5	49.68	49.59	0.19	50.15	0.95	50.38	1.41	50.24	1.13	49.70	0.04
6	59.20	59.04	0.28	59.96	1.28	59.64	0.75	59.77	0.96	59.20	0.01
7	71.05	70.93	0.17	71.67	0.88	71.02	0.04	71.45	0.56	71.04	0.01
8	85.53	85.54	0.01	85.68	0.18	85.00	0.62	85.64	0.13	85.51	0.02
9	103.00	103.17	0.16	102.43	0.55	102.18	0.80	102.83	0.17	102.98	0.01
10	123.89	124.08	0.15	122.45	1.16	123.29	0.49	123.59	0.25	123.89	0.00
11	148.75	148.57	0.12	146.38	1.59	149.22	0.32	148.62	0.08	148.75	0.00
平均相对模拟误差/%			0.19		2.05		0.86		0.64		0.02
12	178.23	176.92	0.74	175.00	1.81	181.09	1.60	178.80	0.32	178.18	0.03
13	213.14	209.41	1.75	209.20	1.85	220.24	3.33	215.17	0.95	212.89	0.12
14	254.45	246.32	3.20	250.09	1.71	268.35	5.46	258.96	1.77	253.74	0.28
15	303.36	287.94	5.08	298.97	1.45	327.46	7.94	311.69	2.75	301.73	0.54
平均相对预测误差/%			2.69		1.71		4.59		1.45		0.24

2.1.2 结果分析 从表 1 和封二彩图 1 可以看出,FDGM(2,1)的平均相对模拟误差为 0.02%,明显小于 CPR 的 0.19%、DGM(1,1)的 2.05%、NDGM(1,1,k)的 0.86%和 FGM(2,1)的 0.64%。此外,从 4 步预测误差来看,FDGM(2,1)的平均相对预测误差为 0.24%,也明显小于 CPR 的 2.69%、DGM(1,1)的 1.71%、NDGM(1,1,k)的 4.59%和 DGM(2,1)的 1.45%。说明在 5 种比较模型中,FDGM(2,1)对原始序列的模拟和预测精度都是最高的,也即是模拟预测效果最好,从而证实了该模型是有效的。

2.2 实证分析

为验证新模型的实用性,本文选取文献[11]中 2001—2016 年重庆市天然气消费量作为原始数据。将这部分数据分成两部分,其中 2001—2012 年数据用来建立 CPR、DGM(1,1)、NDGM(1,1,k)、FGM(2,1)和 FDGM(2,1)模型,2013—2016 年数据用来检测各模型的预测效果。FGM(2,1)和 FDGM(2,1)的最优累加阶数都是在以平均相对模拟误差最小为目标的前提下通过穷举法来确定的。建立的 5 种比较模型的模拟预测结果见表 2,平均相对误差的比较情况见封二彩图 2。

2.2.1 FDGM(2,1)的建模过程 选取原始序列 $\mathbf{X}^{(0)} = (322.51, 331.87, 349.11, 403.52, 472.15, 532.67, 578.95, 648.38, 657.91, 752.49, 821.82, 943.86)^T$ 。根据 FDGM(2,1)的建模过程,利用穷举法可得最优阶数为 $r=0.64$,此时采用最小二乘法可得到模型参数为 $a=0.880\,398, b=0.213\,546, c=193.815\,262$ 。将参数代入到模型的时间响应式,得到:

$$\hat{x}^{(0.64)}(k) = 2\,236.086\,989 \times 1.078\,417^k + 130.502\,500 \times (-0.198\,018)^k - 2\,063.081\,509.$$

则根据累减还原公式可得还原值 $\hat{x}^{(0)}(k) = \sum_{j=1}^k C_{-0.64+k-j-1}^{k-j} \hat{x}^{(0.64)}(j)$ 。

于是令 $k=1,2,\cdots,12$,可得模拟值为:

$\hat{\mathbf{X}}^{(0)}=(322.51,336.16,355.96,408.31,459.50,514.41,572.15,633.31,698.23,767.37,841.15,920.04)^T$;

令 $k=13,14,15,16$,可得预测值为: $\hat{\mathbf{X}}_p^{(0)}=(1\ 004.52,1\ 095.08,1\ 192.26,1\ 296.62)^T$ 。

表 2 5 种模型对重庆市天然气消费量的模拟预测结果
Tab.2 Simulation and prediction results of Chongqing's natural gas consumption by five models

年份	实际值	CPR		DGM(1,1)		NDGM(1,1,k)		FGM(2,1)		FDGM(2,1)	
		预测值	误差/%	预测值	误差/%	预测值	误差/%	预测值	误差/%	预测值	误差/%
2001	322.51	304.94	5.45	322.51	0.00	322.51	0.00	322.51	0.00	322.51	0.00
2002	331.87	338.96	2.14	339.66	2.35	325.89	1.80	341.78	2.99	336.16	1.29
2003	349.11	376.19	7.76	375.70	7.62	367.66	5.31	370.33	6.08	355.96	1.96
2004	403.52	417.04	3.35	415.56	2.98	412.59	2.25	412.59	2.25	408.31	1.19
2005	472.15	461.93	2.16	459.66	2.65	460.93	2.38	460.00	2.57	459.50	2.68
2006	532.67	511.27	4.02	508.43	4.55	512.94	3.70	511.21	4.03	514.41	3.43
2007	578.95	565.47	2.33	562.37	2.86	568.89	1.74	566.16	2.21	572.15	1.17
2008	648.38	624.95	3.61	622.05	4.06	629.08	2.98	625.19	3.58	633.31	2.32
2009	657.91	690.11	4.89	688.05	4.58	693.84	5.46	688.80	4.69	698.23	6.13
2010	752.49	761.38	1.18	761.05	1.14	763.50	1.46	757.55	0.67	767.37	1.98
2011	821.82	839.16	2.11	841.81	2.43	838.45	2.02	832.08	1.25	841.15	2.35
2012	943.86	923.87	2.12	931.13	1.35	919.08	2.63	913.09	3.26	920.04	2.52
平均相对模拟误差/%			2.97		3.05		2.64		2.80		2.25
2013	959.97	1015.92	5.83	1029.92	7.29	1005.83	4.78	1001.32	4.31	1004.52	4.64
2014	1 092.25	1 115.72	2.15	1 139.20	4.30	1 099.15	0.63	1 097.56	0.49	1 095.08	0.26
2015	1 175.32	1 223.69	4.12	1 260.08	7.21	1 199.55	2.06	1 202.71	2.33	1 192.26	1.44
2016	1 187.96	1 340.24	12.82	1 393.78	17.33	1 307.56	10.07	1 317.68	10.92	1 296.62	9.15
平均相对预测误差			6.23		9.03		4.38		4.51		3.87

2.2.2 结果分析 从表 2 和封二彩图 2 可以看出,FDGM(2,1)的平均相对模拟误差为 2.25%,小于 CPR 的 2.97%,DGM(1,1)的 3.05%、NDGM(1,1,k)的 2.64%和 FGM(2,1)的 2.80%。此外,从 4 步预测误差来看,FDGM(2,1)的平均预测相对误差为 3.87%,也小于 CPR 的 6.23%、DGM(1,1)的 9.03%、NDGM(1,1,k)的 4.38%和 FGM(2,1)的 4.51%。说明在 5 种比较模型中,FDGM(2,1)的模拟和预测精度都是最高的,也即是新模型最适合于对重庆市天然气消费量的模拟预测,能最准确地反映变化趋势,具有最好的预测效果。由此可见,新模型具有较好的实用性。

3 结论

本文结合离散灰色建模原理和分数阶累加思想,构建了基于分数阶累加的二阶单变量离散灰色模型 FDGM(2,1)。新模型不仅消除了传统 GM(2,1)模型中由微分方程转到差分方程所带来的转换误差,而且通过引入分数阶累加生成算子,能降低原始序列的随机性和不确定性,从而提高模型的模拟预测精度。和传统 GM(2,1)模型一样,新模型具有两个特征根,因而能适应系统单调或振荡的情形,具有良好的适应性,它可以看成是 DGM(1,1)、 $DGM^{\frac{p}{q}}(1,1)$ 和 DGM(2,1)模型的推广。通过数值模拟和应用实例测试显示,新模型比常见的三次多项式回归模型 CPR、离散灰色模型 DGM(1,1)、非齐次离散灰色模型 NDGM(1,1,k)和分数阶累加的灰色模型 FGM(2,1),具有更高的模拟和预测精度,从而证实了新模型的有效性和实用性,它的提出丰富了灰色理论研究体系和拓宽了灰色系统的应用范围。此外,通过实验发现,当样本量过小时,虽然模型能够取得最优的建模精度,但容易出现过拟合问题,有时预测误差很大。因此,如何有效地解决好这一问题,这将是下一步的研究方向。

参考文献:

- [1] XIE N M, WANG R Z. A historic review of grey forecasting models[J]. Journal of Grey System, 2017, 29(4): 1-29.
- [2] LI G D, MASUDA S, YAMAGUCHI D, et al. An improved grey dynamic GM(2,1) model[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2010, 87(7): 1617-1629.
- [3] 唐李伟, 鲁亚运. 基于级差格式的 GM(2,1) 模型参数估计优化研究[J]. 系统工程理论与实践, 2018, 38(2): 502-508.
TANG L W, LU Y Y. The optimization of GM(2,1) model based on parameter estimation of grade difference format[J]. System Engineering-Theory & Practice, 2018, 38(2): 502-508.
- [4] XU N, DANG Y G, PENG H P. An optimized grey GM(2,1) model and forecasting of highway subgrade settlement[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2015, 2015(1): 1-6.
- [5] 赵新冀, 刘亚卓, 张丽伟. 基于改进的 GM(2,1) 模型的粮仓温湿度预测[J]. 中国粮油学报, 2012, 27(8): 85-87.
ZHAO X Q, LIU Y Z, ZHANG L W. The forecasts of temperature and humidity of the barn based on the improved GM(2,1) [J]. Journal of the Chinese Cereals and Oils Association, 2012, 27(8): 85-87.
- [6] 谢乃明, 刘思峰. 离散 GM(1,1) 模型与灰色预测模型建模机理[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(1): 93-99.
XIE N M, LIU S F. Discrete GM(1,1) and mechanism of grey forecasting model[J]. System Engineering-Theory & Practice, 2005, 25(1): 93-99.
- [7] WU L F, LIU S F, YAO L G, et al. Grey system model with the fractional order accumulation[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013, 18: 1775-1785.
- [8] MAO S H, GAO M Y, XIAO X P, et al. A novel fractional grey system model and its application[J]. Applied Mathematical Modelling, 2016, 40(7/8): 5063-5076.
- [9] 吴利丰, 刘思峰, 姚立根. 基于分数阶累加的离散灰色模型[J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(7): 1822-1827.
WU L F, LIU S F, YAO L G. Discrete grey model based on fractional order accumulate[J]. System Engineering-Theory & Practice, 2014, 34(7): 1822-1827.
- [10] YANG S, WEI Y. Direct discrete grey model based on non-homogeneous exponential sequence[J]. Journal of Grey System, 2011, 14(4): 145-149.
- [11] MA X, MEI X, WU W Q, et al. A novel fractional time delayed grey model with Grey Wolf optimizer and its applications in forecasting the natural gas and coal consumption in Chongqing China[J]. Energy, 2019, 178: 487-507.

A Discrete GM(2,1) Model with Fractional-Order Accumulation and Its Application

ZENG Liang¹, LUO Shiguang²

(1. School of Basic Courses, Guangdong Polytechnic College, Zhaoqing Guangdong 526100;

2. School of Financial Mathematics and Statistics, Guangdong University of Finance, Guangzhou 510521, China)

Abstract: [Purposes] The traditional second-order single-variable grey prediction model (GM(2,1)) is studied to solve the problem that the prediction accuracy for some sequences is not high. [Methods] A discrete GM(2,1) model with fractional-order accumulation termed as FDGM(2,1) is proposed on the basis of GM(2,1) by combining the modeling principle of discrete grey model and the idea of fractional-order accumulation. [Findings] The time-response and reduction formulas of FDGM(2,1) for prediction are given. To achieve the optimal prediction performance, an optimization model with the objective of minimizing the average relative simulation error is established, and a method to determine the optimal order of the model is given. Finally, a numerical simulation experiment and an application case are used to verify the new model. [Conclusions] The results show that the new model exhibits the higher simulation and prediction accuracy than the other common models, and it is effective and practical.

Keywords: grey system; GM(2,1); fractional-order accumulation; discrete grey model

(责任编辑 黄 颖)

(接正文77、78页)

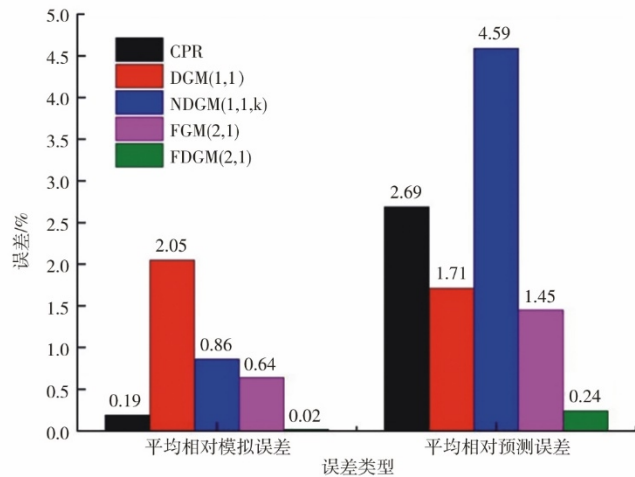


图1 5种模型对测试数据的平均相对误差的比较
Fig. 1 Comparison of the average relative errors of five models for test data

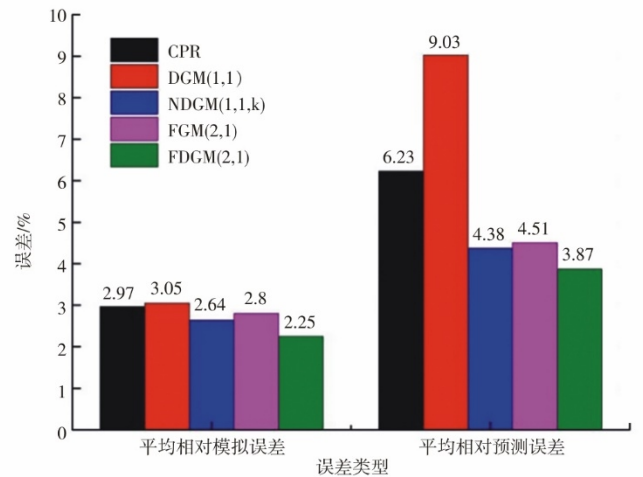


图2 5种模型对重庆市天然气消费量的平均相对误差的比较
Fig. 2 Comparison of the average relative errors of five models for Chongqing's natural gas consumption

(接正文117页)

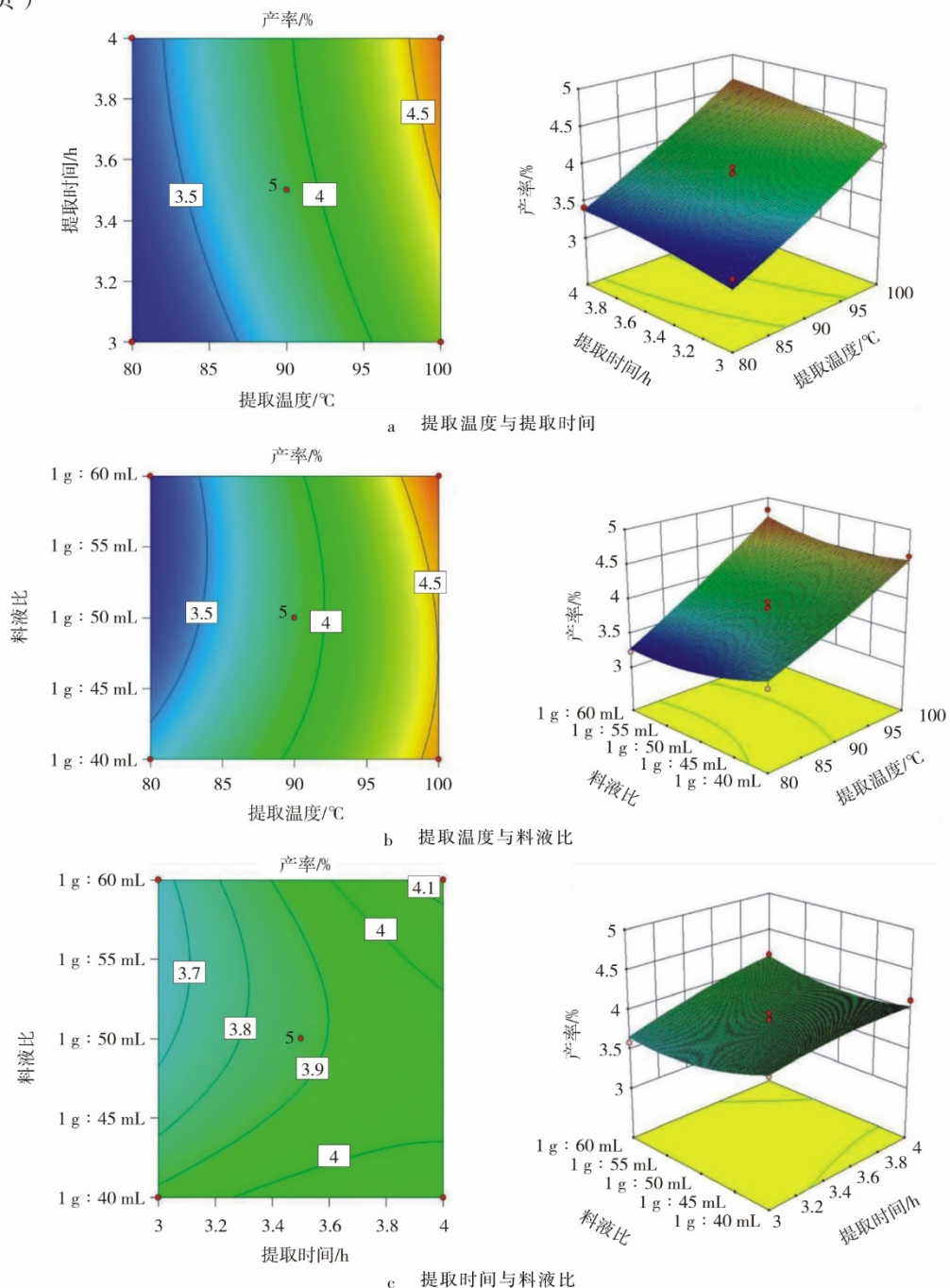


图2 各因素交互作用对多糖提取率影响的响应面与等高线图
Fig. 2 Response surface and contour diagram of the effect of interaction of various factors on polysaccharide yield