

## 互补约束数学规划问题的对偶性\*

赵 晶<sup>1</sup>, 李沛瑜<sup>2</sup>

(1. 浙大城市学院 信息与教育技术中心, 杭州 310015; 2. 西南民族大学 数学学院, 成都 610225)

**摘要:**【目的】研究互补约束数学规划问题的 Mond-Weir 型对偶。【方法】把非线性规划问题的 Mond-Weir 型对偶推广到互补约束数学规划问题。【结果】在一些弱凸性条件下证明了弱对偶定理、强对偶定理和严格逆对偶定理。【结论】举例说明本文给出的互补约束数学规划问题 Mond-Weir 型对偶是合理的。

**关键词:** 互补约束数学规划问题; Mond-Weir 对偶; 弱对偶; 强对偶; 严格逆对偶

**中图分类号:** O221

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1672-6693(2021)06-0009-06

均衡约束数学规划问题是一类约束条件中含有互补或者变分不等式约束的数学规划问题。本文考虑如下带有互补约束的数学规划问题(MPCC)的对偶性:

$$\begin{aligned} \text{(MPCC)} \quad & \min f(x) \\ \text{s. t.} \quad & g(x) \leq 0, h(x) = 0, \\ & 0 \leq G(x) \perp H(x) \leq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ ,  $h: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$ ,  $G: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ ,  $H: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ ,  $G(x) \perp H(x)$  表示向量  $G(x)$  与向量  $H(x)$  的内积为零。MPCC 在工程设计、经济均衡、博弈论等方面都有着广泛应用。在过去的 20 多年中,人们从理论、算法、应用等方面对 MPCC 进行了系统地研究<sup>[1-2]</sup>。由于 MPCC 问题中互补约束的存在,导致在问题(1)的约束在任何可行点都不满足 M-F 约束规范<sup>[3-4]</sup>。这就使得 MPCC 不管在理论分析上还是算法设计上都是很难处理的。截至目前许多学者致力于研究求解 MPCC 的算法并取得了很大的进展,参见综述性文献[5]及该文献的参考文献。MPCC 的最优性条件、稳定性、灵敏度等理论方面也取得了很大的成果<sup>[3-4,6-10]</sup>。文献[11]研究了 MPCC 的 Wolfe 型对偶,本文则研究 MPCC 问题(1)的 Mond-Weir 型对偶,首先把非线性规划问题的 Mond-Weir 型对偶推广到 MPCC 问题(1),然后在一些弱凸性条件下证明了弱对偶定理、强对偶定理和严格逆对偶定理,最后举例说明本文给出的互补约束数学规划问题的 Mond-Weir 型对偶的合理性。

本文记号如下:记  $\mathcal{F}$  为(1)的可行域,  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^1$ ,  $\nabla f(x)$  表示  $f$  在  $x$  点的 Jacobian 矩阵的转置,而  $\text{Val}(P)$  表示问题(P)的最优值。

### 1 预备知识

本节介绍将要用到的一些概念和结论。首先介绍非线性规划问题的 Mond-Weir 型对偶。考虑下面的非线性规划问题:

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad & \min f(x) \\ \text{s. t.} \quad & g(x) \leq 0, \\ & h(x) = 0. \end{aligned}$$

其中  $\{f, g, h\}$  如前所设。上述问题的 Mond-Weir 型对偶<sup>[12]</sup>为:

\* 收稿日期:2021-01-27 修回日期:2021-04-19 网络出版时间:2021-11-17 10:57

资助项目:国家自然科学基金(No. 11501476);西南民族大学引进人才科研启动项目(No. RQD2021065)

第一作者简介:赵晶,女,研究方向为最优化理论,E-mail:zhaojing@zucc.edu.cn;通信作者:李沛瑜,男,副教授,E-mail:lipeiyu28@foxmail.com

网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20211116.1939.018.html

$$(D) \quad \begin{aligned} & \max_{y, \lambda, \mu} f(y) \\ & \text{s. t.} \quad \nabla f(y) + \nabla g(y)\lambda + \nabla h(y)\mu = 0, \\ & \quad g(y)^T \lambda + h(y)^T \mu \geq 0, \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

对上述非线性规划问题的 Mond-Weir 型对偶, 以下结论成立。

**引理 1<sup>[13]</sup>** (弱对偶性) 对于问题(P)的任意可行解  $x$  及问题(D)的任意可行解  $(y, \lambda, \mu)$ , 若存在次线性函数  $F_{xy}$  使得  $f$  为  $F$ -伪凸, 且  $g^T \lambda + h^T \mu$  为  $F$ -拟凸, 则  $\min(P) \geq \max(D)$ 。

**引理 2<sup>[13]</sup>** (强对偶性) 设  $\bar{x}$  是问题(P)的全局(局部)最优解且在  $\bar{x}$  点处某约束规范成立, 则存在  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$  使得  $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$  是问题(D)的可行解且相应的问题(P)和问题(D)的函数值对应相等。又若引理 1 假设条件成立, 则  $\bar{x}$  和  $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$  分别是问题(P)和问题(D)的最优解。

**引理 3<sup>[13]</sup>** (严格逆对偶性) 设  $\bar{x}$  是问题(P)的最优解且在  $\bar{x}$  点处某约束规范成立, 若引理 1 假设条件成立,  $(\bar{y}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$  是问题(D)的最优解, 且对问题(P)的任意可行解  $x$ ,  $f$  在  $\bar{y}$  点是严格  $F$ -伪凸的, 则  $\bar{y} = \bar{x}$ , 即  $\bar{y}$  是问题(P)的解。

下面给出本文所需的一些相关定义。

**定义 1<sup>[14]</sup>** 给定非空开凸集  $C \subseteq \mathbf{R}^n$  和可微实值函数  $f: C \rightarrow \mathbf{R}$ , 则: a) 对任意  $x, y \in C, x \neq y$ , 若  $\langle y - x, \nabla f(x) \rangle \geq 0$ , 都有  $f(y) \geq f(x)$ , 则称  $f$  是定义在  $C$  上的伪凸函数; b) 对任意  $x, y \in C, x \neq y$ , 若  $\langle y - x, \nabla f(x) \rangle \geq 0$ , 都有  $f(y) > f(x)$ , 则称  $f$  是定义在  $C$  上的严格伪凸函数; c) 对任意  $x, y \in C, \lambda \in [0, 1]$ , 若  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$ , 则称  $f$  是定义在  $C$  上的拟凸函数。

对于拟凸函数, 很多时候是用到它如下的等价形式:

**引理 4<sup>[14]</sup>** 给定非空开凸集  $C \subseteq \mathbf{R}^n$  和可微实值函数  $f: C \rightarrow \mathbf{R}$ , 则  $f$  是拟凸函数, 当且仅当对任意的  $x, y \in C$ ,  $f(y) \leq f(x) \Rightarrow \langle y - x, \nabla f(x) \rangle \leq 0$ 。

为方便起见, 对任意的  $\bar{x} \in \mathcal{F}$ , 定义下列指标集:

$$\begin{aligned} I_g &:= \{i: g_i(\bar{x}) = 0\}, \\ \mathcal{I} &:= \{i: G_i(\bar{x}) = 0 < H_i(\bar{x})\}, \\ \mathcal{J} &:= \{i: G_i(\bar{x}) = 0 = H_i(\bar{x})\}, \\ \mathcal{K} &:= \{i: G_i(\bar{x}) > 0 = H_i(\bar{x})\}. \end{aligned}$$

定义 MPCC 问题(1)的 Lagrange 函数如下:

$$L_{\text{MPCC}}(x, \lambda, \mu, u, v) := f(x) + g(x)^T \lambda + h(x)^T \mu - G(x)^T u - H(x)^T v.$$

下面给出的稳定性概念<sup>[3-4, 15-16]</sup>。

**定义 2** 设  $\bar{x} \in \mathcal{F}$ , 则:

a) 称  $\bar{x}$  是问题(1)的 C-稳定点, 如果存在乘子  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{u}, \bar{v}) \in \mathbf{R}^{2m+p+k}$  满足:

$$\begin{aligned} \nabla L_{\text{MPCC}}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{u}, \bar{v}) &= 0, \\ \bar{\lambda} &\geq 0, g(\bar{x}) \leq 0, \bar{\lambda}^T g(\bar{x}) = 0, \\ \bar{u}_i &= 0, i \in \mathcal{K}, \\ \bar{v}_i &= 0, i \in \mathcal{I}, \\ \bar{u}_i \bar{v}_i &\geq 0, i \in \mathcal{J}. \end{aligned}$$

b) 称  $\bar{x}$  是问题(1)的 M-稳定点, 如果存在乘子  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{u}, \bar{v}) \in \mathbf{R}^{2m+p+k}$  满足:

$$\begin{aligned} \nabla L_{\text{MPCC}}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{u}, \bar{v}) &= 0, \\ \bar{\lambda} &\geq 0, g(\bar{x}) \leq 0, \bar{\lambda}^T g(\bar{x}) = 0, \\ \bar{u}_i &= 0, i \in \mathcal{K}, \\ \bar{v}_i &= 0, i \in \mathcal{I}, \\ \bar{u}_i &> 0, \bar{v}_i > 0, \text{ 或者 } \bar{u}_i \bar{v}_i = 0, i \in \mathcal{J}. \end{aligned}$$

c) 称  $\bar{x}$  是问题(1)的 S-稳定点, 如果存在乘子  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{u}, \bar{v}) \in \mathbf{R}^{2m+p+k}$  满足:

$$\begin{aligned} \nabla L_{\text{MPCC}}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{u}, \bar{v}) &= 0, \\ \bar{\lambda} &\geq 0, g(\bar{x}) \leq 0, \bar{\lambda}^T g(\bar{x}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}_i &= 0, i \in \mathcal{K}, \\
\bar{v}_i &= 0, i \in \mathcal{I}, \\
\bar{u}_i &\geq 0, \bar{v}_i \geq 0, i \in \mathcal{J}.
\end{aligned} \tag{2}$$

**引理 5**<sup>[16]</sup> 设  $\bar{x}$  是问题(1)的可行点且在  $\bar{x}$  满足 M-稳定性条件, 令:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^+ &:= \{i: \bar{u}_i > 0\}, \mathcal{J}^- := \{i: \bar{u}_i < 0\}, \\
\beta^+ &:= \{i: \bar{u}_i > 0, \bar{v}_i > 0\}, \beta^0 := \{i: \bar{u}_i = 0, \bar{v}_i = 0\}, \\
\beta_H^+ &:= \{i: \bar{u}_i = 0, \bar{v}_i > 0\}, \beta_H^- := \{i: \bar{u}_i = 0, \bar{v}_i < 0\}, \\
\beta_G^+ &:= \{i: \bar{u}_i > 0, \bar{v}_i = 0\}, \beta_G^- := \{i: \bar{u}_i < 0, \bar{v}_i = 0\},
\end{aligned}$$

若  $f$  在  $\bar{x}$  点是伪凸函数且  $\{g, h_i (i \in \mathcal{J}^+), -h_i (i \in \mathcal{J}^-), -G_i (i \in \beta^+ \cup \beta_G^+), -H_i (i \in \beta^+ \cup \beta_H^+)\}$  在  $\bar{x}$  点是拟凸函数,  $\beta_G^- \cup \beta_H^- = \emptyset$ , 那么  $\bar{x}$  是问题(1)的全局最优解。

## 2 Mond-Weir 对偶性

受非线性规划问题的 Mond-Weir 型对偶的启发, 定义问题(1)的 Mond-Weir 型对偶问题(MWD)如下:

$$\begin{aligned}
(\text{MWD}) \quad & \max \quad f(x) \\
\text{s. t.} \quad & \nabla_x L_{\text{MPCC}}(x, \lambda, \mu, u, v) = 0, \\
& \lambda^T g(x) + \mu^T h(x) - u^T G(x) - v^T H(x) \geq 0, \\
& \lambda \geq 0, u \geq 0, v \geq 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

本文对上述形式的对偶给出一些解释。观察标准的非线性规划问题的 Mond-Weir 型对偶问题, 得知该对偶是和原问题(P)的 KKT 条件密切相关, 所以 MPCC 问题(1)的对偶问题也应该和它的稳定性条件相对应。在上述形式(3)对偶中, 采用的是 S-稳定性条件的形式。理由如下: 这种对偶是最简单的而且在证明弱对偶性的过程中不需要一些指标集为空的假设, 这些假设可能使强对偶性和严格逆对偶性不成立<sup>[11]</sup>。

下面研究 Mond-Weir 型对偶(3)的对偶性。

**定理 1**(弱对偶定理) 设  $x$  是 MPCC 问题(1)的可行点,  $(y, \lambda, \mu, u, v)$  是问题(3)的可行解,  $f$  是伪凸函数且  $\lambda^T g + \mu^T h - u^T G - v^T H$  是拟凸函数, 则  $f(x) \geq f(y)$ 。

**证明** 由于  $x$  是 MPCC 问题(1)的可行点,  $(y, \lambda, \mu, u, v)$  是问题(3)的可行解, 故有:

$$\lambda^T g(x) + \mu^T h(x) - u^T G(x) - v^T H(x) - \lambda^T g(y) - \mu^T h(y) + u^T G(y) + v^T H(y) \leq 0,$$

又因  $\lambda^T g + \mu^T h - u^T G - v^T H$  是拟凸函数, 故由拟凸函数的定义可得:

$$\langle x - y, \nabla g(y)\lambda + \nabla h(y)\mu - \nabla G(y)u - \nabla H(y)v \rangle \leq 0,$$

再由对偶问题的可行性条件知  $\nabla_y L_{\text{MPCC}}(y, \lambda, \mu, u, v) = 0$ , 故结合上式可得:  $\langle x - y, \nabla f(y) \rangle \geq 0$ 。

考虑到  $f$  是为凸函数, 因此  $f(x) \geq f(y)$ 。

证毕

**定理 2**(强对偶定理) 设  $\bar{x}$  是 MPCC 问题(1)的 S-稳定点, 且存在 S-乘子  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{u}, \bar{v})$ ,  $\bar{u} \geq 0, \bar{v} \geq 0$ ,  $f$  是伪凸函数且  $\lambda^T g + \mu^T h - u^T G - v^T H$  是拟凸函数, 则  $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{u}, \bar{v})$  是问题(3)的全局最优解且  $\text{Val}(\text{MPCC}) = \text{Val}(\text{MWD}) = f(\bar{x})$ 。

**证明** 因  $\bar{x}$  是 MPCC 问题(1)的可行点,  $f$  是伪凸函数且  $\lambda^T g + \mu^T h - u^T G - v^T H$  是拟凸函数, 由弱对偶定理 1 可知, 对于问题(3)的任意可行解  $(y, \lambda, \mu, u, v)$  都有:

$$f(\bar{x}) \geq f(y), \tag{4}$$

又由  $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{u}, \bar{v})$  是 S-稳定的且  $\bar{u} \geq 0, \bar{v} \geq 0$ , 易得  $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{u}, \bar{v})$  是问题(3)的可行解, 故由(4)可得  $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{u}, \bar{v})$  是问题(3)的全局最优解。从而由引理 5 知  $\text{Val}(\text{MPCC}) = \text{Val}(\text{MWD}) = f(\bar{x})$ 。

证毕

**定理 3**(严格逆对偶定理) 设  $\bar{x}$  是 MPCC 问题(1)的 S-稳定点且满足定理 2 的条件, 若  $(\bar{y}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{u}, \bar{v})$  是问题(3)的最优解, 且  $f$  是严格伪凸函数, 则  $\bar{y} = \bar{x}$ , 即  $\bar{y}$  是问题(1)的解。

**证明** 假设  $\bar{y} \neq \bar{x}$ , 考虑到  $\bar{x}$  是 MPCC 问题(1)的 S-稳定点, 由定理 2 可知, 存在  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{u}, \bar{v})$  使得  $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{u}, \bar{v})$  是问题(3)的最优解, 又因为  $(\bar{y}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{u}, \bar{v})$  是问题(3)的最优解, 故有:

$$f(\bar{x}) = f(\bar{y}), \tag{5}$$

由  $\bar{x}$  及  $(\bar{y}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{u}, \bar{v})$  的可行性条件可知:

$$\bar{\lambda}^T g(\bar{x}) + \bar{\mu}^T h(\bar{x}) - \bar{u}^T G(\bar{x}) - \bar{v}^T H(\bar{x}) \leq \bar{\lambda}^T g(\bar{y}) + \bar{\mu}^T h(\bar{y}) - \bar{u}^T G(\bar{y}) - \bar{v}^T H(\bar{y}),$$

又因  $\lambda^T g + \mu^T h - u^T G - v^T H$  是拟凸函数,故有:  $\langle \bar{x} - \bar{y}, \nabla g(\bar{y})\bar{\lambda} + \nabla h(\bar{y})\bar{\mu} - \nabla G(\bar{y})\bar{u} - \nabla H(\bar{y})\bar{v} \rangle \leq 0$ 。

由对偶问题的可行性条件知  $\nabla_{\bar{y}} L_{\text{MPCC}}(\bar{y}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{u}, \bar{v}) = 0$ , 则有  $\langle \bar{x} - \bar{y}, \nabla f(\bar{y}) \rangle \geq 0$ , 考虑到  $f$  在  $\bar{y}$  是严格伪凸的, 因此有:

$$f(\bar{x}) > f(\bar{y}), \quad (6)$$

显然(5)式和(6)式是矛盾的,故原命题成立。

证毕

接下来举例说明本文中 S-稳定性条件相联系的 Mond-Weir 型对偶的是合理的。

例 1 考虑如下 MPCC 问题:

$$\begin{aligned} \text{(P1)} \quad \min \quad & f(z) = -z_1 - \frac{1}{2}z_2, \\ \text{s. t.} \quad & z_1 + z_2 \leq 2, \\ & 0 \leq z_1^2 - z_1 \perp z_2 \geq 0. \end{aligned}$$

显然  $z = (2, 0)$  是上述问题的最优解,下面验证此解是否是 S-稳定点,此时问题(P1)的 Lagrange 函数为:

$$L(z, \lambda, u, v) := -z_1 - \frac{1}{2}z_2 + (z_1 + z_2 - 2)\lambda - (z_1^2 - z_1)u - z_2v.$$

将解  $z = (2, 0)$  代入(2)式,则得:

$$\begin{cases} \lambda - 3u - 1 = 0, \\ \lambda - v - \frac{1}{2} = 0, \\ \lambda \geq 0, u = 0. \end{cases}$$

显然  $\lambda = 1, u = 0, v = \frac{1}{2}$  满足上式,即存在乘子使得  $z = (2, 0)$  是问题(P1)的 S-稳定点,从而由定理 2 知强对偶性成立。

此外,人们可能会考虑如下与 C-稳定性条件相联系的 MPCC 问题(1)的 Mond-Weir 型对偶:

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x), \\ \text{s. t.} \quad & \nabla_x L_{\text{MPCC}}(x, \lambda, \mu, u, v) = 0, \\ & \lambda^T g(x) + \mu^T h(x) - u^T G(x) - v^T H(x) \geq 0, \\ & \lambda \geq 0, u_i v_i \geq 0, i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (7)$$

与 M-稳定性条件相联系的 MPCC 问题(1)的 Mond-Weir 型对偶:

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x), \\ \text{s. t.} \quad & \nabla_x L_{\text{MPCC}}(x, \lambda, \mu, u, v) = 0, \\ & \lambda^T g(x) + \mu^T h(x) - u^T G(x) - v^T H(x) \geq 0, \\ & \lambda \geq 0, u_i > 0, v_i > 0, \text{ 或者 } u_i v_i = 0, i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (8)$$

接下来举例说明这两种对偶是不合理的。

考虑问题(P1)与 C-稳定性相联系的 Mond-Weir 型对偶(7)为:

$$\begin{aligned} \max \quad & f(z) = -z_1 - \frac{1}{2}z_2, \\ \text{s. t.} \quad & \lambda - (2z_1 - 1) = 0, \\ & \lambda - v - \frac{1}{2} = 0, \\ & (z_1 + z_2 - 2)\lambda - (z_1^2 - z_1)u - z_2v \geq 0, \\ & \lambda \geq 0, uv \geq 0. \end{aligned}$$

取上述问题的可行解  $(z_1, z_2, \lambda, u, v) = \left(1, 0, 0, -1, -\frac{1}{2}\right)$ , 那么上述问题的函数值是不小于 -1 且严格大于原问题最优值 -2, 不满足弱对偶定理,即形如(7)的 Mond-Weir 型对偶是不合理的。

例 2<sup>[17]</sup> 考虑如下 MPCC 问题:

$$\begin{aligned}
 \text{(P2)} \quad & \min \quad (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2, \\
 \text{s. t.} \quad & x_1 - 1 = 0, \\
 & 0 \leq x_1 \perp x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

容易验证  $(x_1, x_2) = (1, 0)$  是上述问题的最优解且最优值是 1。

如果采用与 M-稳定性条件相联系的 Mond-Weir 型对偶:

$$\begin{aligned}
 \text{(MD2)} \quad & \max \quad (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2, \\
 \text{s. t.} \quad & 2(x_1 - 1) + \lambda - u = 0, \\
 & 2(x_2 + 1) - v = 0, \\
 & \lambda(x_1 - 1) - x_1 u - x_2 v \geq 0, \\
 & u > 0, v > 0, \text{ 或者 } uv = 0.
 \end{aligned}$$

取问题 (MD2) 一个可行解  $(x_1, x_2, \lambda, u, v) = \left(-\frac{1}{2}, -1, -2, -5, 0\right)$ , 那么问题 (MD2) 的最优值是不小于  $\frac{9}{4}$  且严格大于原问题的最优值 1, 不满足弱对偶定理, 即形如 (8) 式的 Mond-Weir 型对偶是不合理的。

### 3 结论

本文研究了 MPCC 问题的 Mond-Weir 型对偶, 并在较弱的条件下证明了弱对偶定理、强对偶定理及严格逆对偶定理。需要注意的是, 由于互补约束的存在使得 MPCC 问题不满足某些约束规范, 因此在建立强对偶定理时必须用到稳定性条件, 这与研究普通非线性规划问题的 Mond-Weir 型对偶时有所不同。

#### 参考文献:

- [1] LUO Z Q, PANG J S, RALPH D. Mathematical programs with equilibrium constraints[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [2] OUTRATA J, KOCVARA M, ZOWE J. Nonsmooth approach to optimization problems with equilibrium constraints[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [3] SCHEEL H, SCHOLTES S. Mathematical programs with complementarity constraints: stationarity, optimality, and sensitivity [J]. Mathematics of Operations Research, 2000, 25(1): 1-22.
- [4] YE J J, ZHU D L, ZHU Q J. Exact penalization and necessary optimality conditions for generalized bilevel programming problems[J]. SIAM Journal on Optimization, 1997, 7(2): 481-507.
- [5] FUKUSHIMA M, LIN G H. Smoothing methods for mathematical programs with equilibrium constraints[C]//Proceedings of the ICKS'04. Piscataway: IEEE Computer Society, 2004, 206-213.
- [6] GUO L, LIN G H. Notes on some constraint qualifications for mathematical programs with equilibrium constraints[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2013, 156(3): 600-616.
- [7] GUO L, LIN G H, YE J J. Stability analysis for parametric mathematical programs with geometric constraints and its applications[J]. SIAM Journal on Optimization, 2012, 22(3): 1151-1176.
- [8] JONGEN H T, SHIKHMAN V, STEFFENSEN S. Characterization of strong stability for C-stationary points in MPCC[J]. Mathematical Programming, 2012, 132(1/2): 295-308.
- [9] KANZOW C, SCHWARTZ A. Mathematical programs with equilibrium constraints: enhanced Fritz John conditions, new constraint qualifications and improved exact penalty results[J]. SIAM Journal on Optimization, 2010, 20(5): 2730-2753.
- [10] LUCET Y, YE J J. Sensitivity analysis of the value function for optimization problems with variational inequality constraints [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2001, 40(3): 699-723.
- [11] GUO L, LIN G H, ZHAO J. Wolfe-type duality for mathematical programs with equilibrium constraints[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 2019, 35(3): 532-540.
- [12] MOND B, WEIR T. Duality for fractional programming with generalized convexity conditions[J]. Journal of Information and Optimization Sciences, 1982, 3(2): 105-124.
- [13] EGUDO R R, MOND B. Duality with generalized convexity[J]. Journal of Australian Mathematical Society, Series B, 1996, 28(1): 10-21.
- [14] BAZARAA M S, SHERALI H D, SHETTY C M. Nonlinear programming: theory and algorithms[M]. 2nd edition. New York: John Wiley, 1993.

- [15] YE J J. Optimality conditions for optimization problems with complementarity constraints[J]. SIAM Journal on Optimization, 1999,9(2):374-387.
- [16] YE J J. Necessary and sufficient optimality condition for mathematical programs with equilibrium constraints[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005,307(1):305-369.
- [17] GUO L, LING H. Second order optimality conditions for mathematical programs with equilibrium constraints[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2013,158(1):33-64.

## Operations Research and Cybernetics

### Duality in Mathematical Programs with Complementarity Constraints

ZHAO Jing<sup>1</sup>, LI Peiyu<sup>2</sup>

- (1. Information and Educational Technology Center, Zhejiang University City Collage, Hangzhou Zhejiang 310015;  
2. School of Mathematics, Southwest Minzu University, Chengdu Sichuan 610225, China)

**Abstract:** [Purposes] Study the Mond-Weir type duality in mathematical programs with complementarity constraints. [Methods] Generalize the Mond-Weir type duality in nonlinear programming problem to mathematical programs with complementarity constraints. [Findings] Under some mild conditions, establish the weak duality theorem, the strong duality theorem and the strict converse duality theorem. [Conclusions] Give some examples to show that the Mond-Weir type duality in mathematical programs with complementarity constraints is reasonable.

**Keywords:** mathematical program with complementarity constraints; Mond-Weir duality; weak duality; strong duality; strict converse duality

(责任编辑 陈 乔)