

偶数阶 p -Laplace 时滞中立型阻尼泛函微分方程的振动性^{*}

曾云辉¹, 汪志红², 汪安宁¹

(1. 衡阳师范学院 数学与统计学院, 湖南 衡阳 421002;

2. 衡阳师范学院南岳学院 数学与计算科学系, 湖南 衡阳 421002)

摘要:【目的】研究一类含有连续分布时滞和阻尼项的偶数阶中立型微分方程解的振动性。【方法】利用广义 Riccati 变换、H 函数、Yang-不等式、积分平均技巧等方法,对偶数阶 p -Laplace 时滞中立型阻尼泛函微分方程解的振动性问题进行了研究。【结果】建立了该方程解振动的新的充分条件。【结论】所得结果改进和推广了已有文献中的一些熟知的准则,并举例说明新结果。

关键词: 中立型; 阻尼微分方程; 振动性

中图分类号: O175.26

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2021)06-0063-08

考虑 n 阶中立型阻尼泛函微分方程:

$$\frac{d}{dt}[r(t)\Phi_1(z^{(n-1)}(t))] + p(t)\Phi_1(z^{(n-1)}(t)) + \int_a^b q(t, \xi)\Phi_2(x(g(t, \xi)))d\sigma(\xi) = 0, \quad (1)$$

其中: $z(t) = x(t) + m(t)x(\tau(t))$, $\Phi_1(s) = |s|^{p_1-2}s = |s|^{p_1-1}\operatorname{sgn} s$, $\Phi_2(s) = |s|^{p_2-2}s = |s|^{p_2-1}\operatorname{sgn} s$, n 为偶数, p_1, p_2 均大于 1 且为常数。

本文总假定下列条件成立:

(H₁) $0 \leq m(t) \leq 1, r(t), p(t) \in C^1(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+), r'(t) > 0, \tau(t) \leq t, \lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = +\infty, \mathbf{R}_+ = (0, +\infty)$;

(H₂) $q(t, \xi) \in C(\mathbf{R}_+ \times [a, b], \mathbf{R}_+)$, 且 $q(t, \xi)$ 最终不恒为零;

(H₃) $g(t, \xi) \in C^1(\mathbf{R}_+ \times [a, b], \mathbf{R}_+)$ 为关于 t, ξ 的非减函数, $g(t, \xi) \leq t, \lim_{t \rightarrow \infty} \min_{a \leq \xi \leq b} \{g(t, \xi)\} = +\infty; g(t, a) \equiv$

$g(t) \in C^1(I, \mathbf{R}_+)$; $\frac{\partial g(t, a)}{\partial t}$ 是 $g(t, a)$ 关于 t 的偏导数, 记 $\frac{\partial g(t, a)}{\partial t}$ 为 $g'(t)$ 且 $g'(t) > 0; \sigma(\xi)$ 在 $[a, b]$ 上关于 ξ 非减实函数, 且方程(1)中的积分是 Stieltjes 积分。

方程(1)的解及它的振动性的定义可以参见文献[1]。偶数阶中立型分布时滞微分方程在理论和实际应用两方面都有重要意义。例如, 中立型微分方程在博弈论、细胞中酶反应动力学等领域中有着广泛应用。因此方程(1)的振动性问题研究越来越受到学者们的广泛关注。特别是如下特例:

$$\frac{d}{dt}[r(t)\Phi(x'(t))] + q(t)\Phi(x(t)) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}[r(t)\Phi(x^{(n-1)}(t))] + p(t)\Phi(x^{(n-1)}(t)) + q(t)\Phi(x(g(t))) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt}[r(t)\Phi(z^{(n-1)}(t))] + \int_a^b q(t, \xi)\Phi(x(g(t, \xi)))d\sigma(\xi) = 0. \quad (4)$$

对于偶数阶泛函微分方程(2)的振动性, Li 等人在文献[2]中证明了如下定理:

定理 A 如果

* 收稿日期: 2019-08-31 修回日期: 2021-04-08 网络出版时间: 2021-11-17 10:39

资助项目: 国家自然科学基金面上项目(No. 12071116); 湖南省自然科学基金(No. 2019JJ40004); 湖南省教育厅科学基金重点项目(No. 20A063); 湖南省双一流应用特色学科项目(No. 湘教通[2018]469); 湖南省大学生创新创业训练计划项目(No. S201910546030; No. S201912659001; No. S202112659007); 湖南省科技创新计划项目(No. 2016TP1020)

第一作者简介: 曾云辉, 男, 副教授, 研究方向为微分方程定性理论, E-mail: chj8121912@sina.com; 通信作者: 汪志红, 女, E-mail: 2530089697@qq.com

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20211116.1851.010.html>

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t [r(s)]^{-\frac{1}{p-1}} ds = \infty, \quad (5)$$

假设对某一个 $\lambda > p-1$, 有:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_{t_0}^t (t-s)^{\lambda-p} \left[c(s)(t-s)^p - \left(\frac{\lambda}{q} \right)^p r(s) \right] ds = \infty \quad (6)$$

成立, 则方程(2)振动。

对于偶数阶半线性阻尼泛函微分方程(3), 文献[1]给出了如下定理:

定理 B 如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{r(s)} \exp \left(- \int_T^s \frac{p(\tau)}{r(\tau)} d\tau \right) \right]^{\frac{1}{p-1}} ds = \infty$, 假设对某一个 $\lambda > p-1$, 有:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_T^t (t-s)^{\lambda-p} \left[q(s)(t-s)^p - (q-1) \left(\frac{\lambda}{q} \right)^p G_*^{1-p}(s) \left(1 + \frac{p(s)(t-s)}{\lambda r(s)} \right)^p r(s) \right] ds = \infty, \quad (7)$$

则方程(3)振动。

定理 C 如果

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{r(s)} \exp \left(- \int_T^s \frac{p(\tau)}{r(\tau)} d\tau \right) \right]^{\frac{1}{p-1}} ds = \infty, \quad (8)$$

若函数 $H \in C(D; \mathbf{R})$, $h \in C(D_0; \mathbf{R})$, $\kappa, \rho \in C'([t_0, \infty); (0, \infty))$ 满足以下条件:

- i) $H(t, s) > 0, (t, s) \in D_0; H(t, t) = 0, t \geq t_0$;
- ii) $H(t, s)$ 在 D_0 上对第二个变量有连续非正的偏导数;
- iii) $-\frac{\partial}{\partial s}(H(t, s)\kappa(s)) - H(t, s)\kappa(s) \left[\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} - \frac{p(s)}{r(s)} \right] = h(t, s), (t, s) \in D_0$ 。

又若 $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \left[H(t, s)\kappa(s)\rho(s)q(s) - \left(\frac{1}{p} |h(t, s)| \right)^p \frac{\rho(s)r(s)}{[H(t, s)\kappa(s)G(s)]^{p-1}} \right] ds = \infty$, 则方程(3)振动。

对偶数阶半线性中立型分布时滞泛函微分方程(4), 文献[3]建立了如下振动准则:

定理 D 设对某一个 $\lambda > p-1$, 有:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_T^t (t-s)^{\lambda-p} \left[Q_*(s)(t-s)^p - (q-1) \left(\frac{\lambda}{q} \right)^p [(p-1)\theta M g^{n-2}(s)g'(s)]^{1-p} r(s) \right] ds = \infty, \quad (9)$$

则方程(4)振动。

偶数阶微分方程解的振动性研究已受到很大的关注, 取得了一些重要的结果^[1,3-8]。但是这些结果都是针对方程(1)的特例给出的, 对一般情况的振动性很少讨论。本文的目的是导出方程(1)的新的 Riccati 不等式, 从而给出(1)式每一个解 $x(t)$ 振动的充分条件, 推广和改进文献[1-4]的主要结果, 并举例说明本文结论的正确性。

1 主要引理

引理 1^[9] 设 $x(t) \in C^n([t_0, \infty); (0, \infty))$, $x^{(n)}(t)$ 最终定号, 则存在 $t_x \geq t_0$ 和整数 $l, 0 \leq l \leq n$, 当 $x^{(n)}(t) \geq 0$ 时, $n+l$ 为偶数; 当 $x^{(n)}(t) \leq 0$ 时, $n+l$ 为奇数, 使得 $l > 0$ 时有 $x^{(k)}(t) > 0, t \geq t_x, k = 0, 1, \dots, l-1$; 且当 $l \leq n-1$ 时有 $(-1)^{l+k} x^{(k)}(t) > 0, t \geq t_x, k = l, l+1, \dots, n-1$ 。

引理 2^[9] 设 $x(t)$ 满足引理 1 的条件, 且 $x^{(n-1)}(t)x^{(n)}(t) \leq 0, t \geq t_x$, 则存在常数 $\theta, 0 < \theta < 1$ 和常数 $M > 0$ 使对一切充分大的 t 有 $x'(\theta t) \geq M t^{n-2} x^{(n-1)}(t)$ 。

引理 3^[10] 设 X 和 Y 为非负实数, 则 $X^{\lambda_0} - \lambda_0 X Y^{\lambda_0-1} + (\lambda_0 - 1) Y^{\lambda_0} \geq 0, \lambda_0 > 1$ 成立, 当且仅当 $X = Y$ 。

引理 4 设 $x(t)$ 是方程(1)的最终正解, 如果下式成立:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left[\frac{C}{r(s)E(s)} \right]^{\frac{1}{p_1-1}} ds = +\infty. \quad (10)$$

式中: $C > 0$ 为常数, $E(t) = \exp \left(\int_T^t \frac{p(s)}{r(s)} ds \right)$ 。则当 $t \geq T \geq t_0$ 时, $z^{(n-1)}(t) > 0, z^{(n)}(t) \leq 0, z'(t) > 0$ 。

证明 假设 $x(t)$ 是方程(1)的非振动解, $x(t) \neq 0, t \geq t_0$, 不失一般性, 可设 $x(t)$ 最终为正, 即 $x(t) > 0, t \geq t_0$ ($x(t) < 0$ 时同理可证)。

由 $g(t, \xi) \leq t, \lim_{t \rightarrow \infty} \min_{\xi \in [a, b]} \{g(t, \xi)\} = \infty$ 可知, 存在 $T_0 \geq t_0$, 当 $t > T_0$ 时, 有 $x(t) > 0, x(\tau(t)) > 0, x(g(t, \xi)) > 0, \xi \in [a, b]$, 从而 $z(t) > 0$ 。

因此断言: $z^{(n-1)}(t) > 0, t > T_0$ 。若不然, 则存在 $T \geq T_0 \geq t_0$, 当 $t = T$ 时, $z^{(n-1)}(T) < 0$, 由方程(1)得:

$$\frac{d}{dt}[r(t) | z^{(n-1)}(t) |^{p_1-2} z^{(n-1)}(t)] + p(t) | z^{(n-1)}(t) |^{p_1-2} z^{(n-1)}(t) \leq 0。$$

上式产生 $\frac{d}{dt}[E(t)r(t) | z^{(n-1)}(t) |^{p_1-2} z^{(n-1)}(t)] \leq 0$, 即 $| z^{(n-1)}(t) |^{p_1-2} z^{(n-1)}(t)$ 是非增的, 因此当 $t \geq T$ 时, $z^{(n-1)}(t) < 0$ 。令 $\mu(t) = -r(t) | z^{(n-1)}(t) |^{p_1-2} z^{(n-1)}(t)$, 则 $\mu(t) > 0, t \geq T$ 。利用方程(1)得到:

$$\begin{aligned} \mu'(t) &= -(r(t) | z^{(n-1)}(t) |^{p_1-2} z^{(n-1)}(t))' = p(t) | z^{(n-1)}(t) |^{p_1-2} z^{(n-1)}(t) + \int_a^b q(t, \xi) \Phi_2(g(t, \xi)) d\sigma(\xi) = \\ &= -\frac{p(t)}{r(t)} \mu(t) + \int_a^b q(t, \xi) \Phi_2(g(t, \xi)) d\sigma(\xi) g(t, \xi)。 \end{aligned}$$

从而有:

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} \geq -\frac{p(t)}{r(t)}。 \quad (11)$$

对(11)式在 $[T, t]$ 上积分, 有 $\int_T^t \frac{\mu'(s)}{\mu(s)} ds \geq -\int_T^t \frac{p(s)}{r(s)} ds$ 。

也即是 $\mu(t) \geq C \exp\left[\int_T^t \left(-\frac{p(s)}{r(s)}\right) ds\right] = \frac{C}{E(t)}$, 其中 $C > 0$ 为常数。故有:

$$z^{(n-1)}(t) \leq -\left(\frac{C}{r(t)E(t)}\right)^{\frac{1}{p_1-1}}。 \quad (12)$$

对(12)式在 $[T, t]$ 上积分, 得 $z^{(n-2)}(t) \leq z^{(n-2)}(T) - \int_T^t \left[\frac{C}{r(s)E(s)}\right]^{\frac{1}{p_1-1}} ds$ 。

令 $t \rightarrow \infty$ 并结合(10)式有 $\lim_{t \rightarrow \infty} z^{(n-2)}(t) \leq z^{(n-2)}(T) - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left[\frac{C}{r(s)E(s)}\right]^{\frac{1}{p_1-1}} ds \rightarrow -\infty$, 由此推得 $z(t)$ 最终为负, 这与 $z(t) > 0$ 矛盾, 所以 $z^{(n-1)}(t) > 0, t \geq T_0$ 。

由方程(1)知:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[r(t) | z^{(n-1)}(t) |^{p_1-2} z^{(n-1)}(t)] &= \frac{d}{dt}[r(t)(z^{(n-1)}(t))^{p_1-1}] = \\ r'(t)(z^{(n-1)}(t))^{p_1-1} &+ (p_1-1)r(t)[z^{(n-1)}(t)]^{p_1-2} z^{(n)}(t) \leq 0。 \end{aligned}$$

由此推得:

$$z^{(n)}(t) \leq 0, t \geq T \geq t_0。 \quad (13)$$

再由(13)式和引理1, 因为 n 为偶数, 所以 l 为奇数, 故 $z'(t) > 0, t \geq T \geq t_0$ 。

证毕

引理 5 设 $x(t)$ 是方程(1)的最终正解, 则 $x(t) > 0, z(t) > 0$ 时, 有:

$$(r(t) | z^{(n-1)}(t) |^{p_1-1})' + p(t) | z^{(n-1)}(t) |^{p_1-1} + Q(t) z^{p_2-1}(g(t)) \leq 0, \quad (14)$$

式中: $Q(t) = \int_a^b q(t, \xi) [1 - m(g(t, \xi))]^{p_2-1} d\sigma(\xi), g(t) \equiv g(t, a)$ 。

证明 设方程(1)存在非振动解 $x(t)$, 不失一般性, 不妨假设 $x(t) > 0$, 则存在 T , 当 $t \geq T \geq t_0$ 时, 有 $x(t) > 0, x(\tau(t)) > 0, x(g(t, \xi)) > 0, \xi \in [a, b]$, 从而 $z(t) > 0$ 。当 $t \geq T \geq t_0$ 时, 又由于 $g(t, \xi)$ 关于 ξ 是非减的, 因此 $g(t, \xi) \geq g(t, a), \xi \in [a, b]$ 。

由引理4知 $z^{(n-1)}(t) > 0, z^{(n)}(t) \leq 0, z'(t) > 0, t > T \geq t_0$, 从而有:

$$z(g(t, \xi)) \geq z(g(t, a)), t > T \geq t_0 \geq 0, \xi \in [a, b]。$$

又因为 $z(t) = x(t) + m(t)x(\tau(t))$, 所以 $z(t) \geq x(t)$, 从而有 $x(t) \geq (1 - m(t))z(t)$ 。即得:

$$x(g(t, \xi)) \geq (1 - m(g(t, \xi)))z(g(t, \xi)) \geq (1 - m(g(t, \xi)))z(g(t, a)) = (1 - m(g(t, \xi)))z(g(t))。$$

由条件 (H_3) 和上式可得:

$$\begin{aligned} q(t, \xi) | x(g(t, \xi)) |^{p_2-2} x(g(t, \xi)) &= q(t, \xi) (x(g(t, \xi)))^{p_2-1} \geq \\ q(t, \xi) [1 - m(g(t, \xi))]^{p_2-1} [z(g(t))]^{p_2-1} &, t \geq T \geq t_0。 \end{aligned}$$

所以有:

$$\frac{d}{dt}[r(t)|z^{(n-1)}(t)|^{p_1-2}z^{(n-1)}(t)] + p(t)|z^{(n-1)}(t)|^{p_1-2}z^{(n-1)}(t) + Q(t)[z(g(t))]^{p_2-1} \leq 0, \quad (15)$$

式中: $Q(t) = \int_a^b q(t, \xi)[1 - m(g(t, \xi))]^{p_2-1} d\sigma(\xi)$, $g(t) = g(t, a)$ 。于是(15)式可写为(14)式。 证毕

引理 6 设引理 4 成立, $x(t) > 0$, $w(t) = \frac{r(t)[z^{(n-1)}(t)]^{p_1-1}}{z^{p_2-1}[\theta g(t)]}$, $t \geq T \geq t_0$, 则:

$$w'(t) + Q(t) + \frac{p(t)}{r(t)}w(t) + G(t)r^{1-q}(t)w^q(t) \leq 0, \quad (16)$$

式中: $G(t) = (p-1)\theta Mm(g(t))^{n-2}g'(t)$, $m = \min\{m_1, m_2\}$, $p = \min\{p_1, p_2\}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1$, $i = 1, 2$ 。

证明

$$\begin{aligned} w'(t) &= \frac{[r(t)(z^{(n-1)}(t))^{p_1-1}]' z^{p_2-1}(\theta g(t)) - r(t)(z^{(n-1)}(t))^{p_1-1}(p_2-1)z^{p_2-2}(\theta g(t))z'(\theta g(t))\theta g'(t)}{[z^{p_2-1}(\theta g(t))]^2} \leq \\ &= \frac{-p(t)[z^{(n-1)}(t)]^{p_1-1} - Q(t)z^{p_2-1}(g(t))}{z^{p_2-1}(\theta g(t))} - \frac{r(t)[z^{(n-1)}(t)]^{p_1-1}(p_2-1)z^{p_2-2}(\theta g(t))z'(\theta g(t))\theta g'(t)}{z^{2p_2-2}(\theta g(t))} = \\ &= -\frac{Q(t)z^{p_2-1}(g(t))}{z^{p_2-1}(\theta g(t))} - \frac{p(t)[z^{(n-1)}(t)]^{p_1-1}}{z^{p_2-1}(\theta g(t))} - \frac{r(t)[z^{(n-1)}(t)]^{p_1-1}(p_2-1)z^{p_2-2}[\theta g(t)]\theta g'(t)Mg^{n-2}(t)z^{(n-1)}(g(t))}{z^{2p_2-2}(\theta g(t))} \leq \\ &= -\frac{Q(t)z^{p_2-1}(g(t))}{z^{p_2-1}(\theta g(t))} - \frac{p(t)[z^{(n-1)}(t)]^{p_1-1}}{z^{p_2-1}(\theta g(t))} - \frac{(p_2-1)\theta g'(t)Mg^{n-2}(t)r(t)[z^{(n-1)}(t)]^{p_1}}{z^{p_2}(\theta g(t))} \leq \\ &= -Q(t) - \frac{p(t)}{r(t)}w(t) - (p_2-1)\theta Mg^{n-2}(t)g'(t) \cdot \frac{r(t)(z^{(n-1)}(t))^{p_1}z^{(n-1)}(t)}{z^{p_2}(\theta g(t))}. \end{aligned} \quad (17)$$

注意到 $z(\theta g(t)) > 0$, $z'(\theta g(t)) > 0$, 故存在常数 $m_1 > 0$ 使得当 $p_2 \geq p_1$ 时有 $\frac{p_2-p_1}{p_1-1}(\theta g(t)) \geq m_1$, $t \geq t_1 \geq T$ 。

因此, 由(17)式得:

$$\begin{aligned} w'(t) &\leq -Q(t) - \frac{p(t)}{r(t)}w(t) - (p_2-1)\theta Mg^{n-2}(t)g'(t)r^{1-q_1}(t)z^{\frac{p_2-p_1}{p_1-1}}(\theta g(t))\frac{r^{q_1}(t)(z^{(n-1)}(t))^{(p_1-1)q_1}}{z^{(p_2-1)q_1}(\theta g(t))} \leq \\ &= -Q(t) - \frac{p(t)}{r(t)}w(t) - m_1(p_2-1)\theta Mg^{n-2}(t)g'(t)r^{1-q_1}(t)w^{q_1}(t). \end{aligned} \quad (18)$$

又由于 $z^{(n-1)}(t) > 0$, $z^{(n)}(t) \leq 0$, 故存在常数 $m_2 > 0$ 和 $t_2 \geq t_1$ 使得当 $p_1 \geq p_2$ 时有 $(z^{(n-1)}(t))^{\frac{p_2-p_1}{p_1-1}} \geq m_2$, $t \geq t_2$ 。

因此, 由(17)式得:

$$\begin{aligned} w'(t) &\leq -Q(t) - \frac{p(t)}{r(t)}w(t) - (p_2-1)\theta Mg^{n-2}(t)g'(t)r^{1-q_2}(t)(z^{(n-1)}(t))^{\frac{p_2-p_1}{p_1-1}}\frac{r^{q_2}(t)(z^{(n-1)}(t))^{(p_1-1)q_2}}{z^{(p_2-1)q_2}(\theta g(t))} \leq \\ &= -Q(t) - \frac{p(t)}{r(t)}w(t) - m_2(p_2-1)\theta Mg^{n-2}(t)g'(t)r^{1-q_2}(t)w^{q_2}(t). \end{aligned} \quad (19)$$

联合(18)和(19)式, 有:

$$w'(t) \leq -Q(t) - \frac{p(t)}{r(t)}w(t) - G(t)r^{1-q}(t)w^q(t). \quad (20)$$

式中: $p = \min\{p_1, p_2\}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $m = \min\{m_1, m_2\}$ 。

证毕

2 主要结果及证明

定理 1 若满足假设 $(H_1) \sim (H_3)$ 和(10)式, 且对某一个 $\lambda > p-1$, 有下式成立:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_T^t (t-s)^{\lambda-p} \left[Q(s)(t-s)^p - (q-1) \left(\frac{\lambda}{q} \right)^p G^{1-p}(s) \left(1 + \frac{p(s)(t-s)}{\lambda r(s)} \right)^p r(s) \right] ds = +\infty, \quad (21)$$

式中: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $Q(s) = \int_a^b q(s, \xi)[1 - m(g(s, \xi))]^{p_2-1} d\sigma(\xi)$, $G(s) = (p-1)\theta Mm(g(s))^{n-2}g'(s)$, 则方程(1)振动。

证明 设方程(1)有非振动解 $x(t)$, 不失一般性, 假设 $x(t)$ 最终为正, 由引理 5 和引理 6 可知(20)式成立。用 $(t-s)^\lambda$ 乘以不等式(20)且从 T 到 t 积分, 有:

$$\int_T^t [(t-s)^\lambda w'(s) + Q(s)(t-s)^\lambda + \frac{p(s)}{r(s)} w(s)(t-s)^\lambda + G(s)r^{1-q}(s)w^q(s)(t-s)^\lambda] ds \leq 0,$$

从而得到:

$$\begin{aligned} (t-T)^\lambda w(T) &\geq \int_T^t G(s)r^{1-q}(s)w^q(s)(t-s)^\lambda ds + \lambda \int_T^t (t-s)^{\lambda-1} \left[1 + \frac{p(s)(t-s)}{\lambda r(s)} \right] w(s) ds + \int_T^t Q(s)(t-s)^\lambda ds \geq \\ &\int_T^t G(s)r^{1-q}(s)w^q(s)(t-s)^\lambda ds + \lambda \int_T^t (t-s)^{\lambda-1} \left[1 + \frac{p(s)(t-s)}{\lambda r(s)} \right] w(s) ds + \int_T^t Q(s)(t-s)^\lambda ds \geq \\ &\int_T^t G(s)(t-s)^\lambda r^{1-q}(s) |w(s)|^q ds - \lambda \int_T^t (t-s)^{\lambda-1} \left[1 + \frac{p(s)(t-s)}{\lambda r(s)} \right] |w(s)| ds + \int_T^t Q(s)(t-s)^\lambda ds, \end{aligned}$$

即有:

$$\begin{aligned} \int_T^t Q(s)(t-s)^\lambda ds &\leq (t-T)^\lambda w(T) - \int_T^t (t-s)^\lambda G(s)r^{1-q}(s) |w(s)|^q ds + \\ &\lambda \int_T^t (t-s)^{\lambda-1} \left[1 + \frac{p(s)(t-s)}{\lambda r(s)} \right] |w(s)| ds \leq \\ (t-T)^\lambda w(T) &+ \int_T^t \left[\lambda (t-s)^{\lambda-1} \left(1 + \frac{p(s)(t-s)}{\lambda r(s)} \right) |w(s)| - (t-s)^\lambda G(s)r^{1-q}(s) |w(s)|^q \right] ds. \end{aligned} \quad (22)$$

利用引理 3, 取:

$$X = (t-s)^{\frac{\lambda}{q}} G^{\frac{1}{q}}(s) r^{\frac{1-q}{q}}(s) |w(s)|, Y = \left(\frac{\lambda}{q} \right)^{\frac{p}{q}} (t-s)^{\frac{\lambda-p}{q}} G^{-\frac{p}{q^2}}(s) \left(1 + \frac{(t-s)p(s)}{\lambda r(s)} \right)^{\frac{p}{q}} r^{\frac{1}{q}}(s),$$

则由引理 3 得到不等式:

$$\begin{aligned} \lambda (t-s)^{\lambda-1} \left(1 + \frac{p(s)(t-s)}{\lambda r(s)} \right) |w(s)| - (t-s)^\lambda G(s)r^{1-q}(s) |w(s)|^q &\leq \\ (q-1) \left[\left(\frac{\lambda}{q} \right)^{\frac{p}{q}} (t-s)^{\frac{\lambda-p}{q}} G^{-\frac{p}{q^2}}(s) \left(1 + \frac{p(s)(t-s)}{\lambda r(s)} \right)^{\frac{p}{q}} r^{\frac{1}{q}}(s) \right]^q &= \\ (q-1) \left[\left(\frac{\lambda}{q} \right)^p (t-s)^{\lambda-p} G^{\frac{1-p}{q}}(s) \left(1 + \frac{p(s)(t-s)}{\lambda r(s)} \right)^p r(s) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

联合(22), (23)式, 有:

$$\int_T^t Q(s)(t-s)^\lambda ds \leq (t-T)^\lambda w(T) + \int_T^t (q-1) \left[\left(\frac{\lambda}{q} \right)^p (t-s)^{\lambda-p} G^{\frac{1-p}{q}}(s) \left(1 + \frac{p(s)(t-s)}{\lambda r(s)} \right)^p r(s) \right] ds.$$

$$\text{即 } \int_T^t (t-s)^{\lambda-p} \left[Q(s)(t-s)^p - (q-1) \left(\frac{\lambda}{q} \right)^p G^{\frac{1-p}{q}}(s) \left(1 + \frac{p(s)(t-s)}{\lambda r(s)} \right)^p r(s) \right] ds \leq (t-T)^\lambda w(T).$$

由上式可得:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_T^t (t-s)^{\lambda-p} \left[Q(s)(t-s)^p - (q-1) \left(\frac{\lambda}{q} \right)^p G^{\frac{1-p}{q}}(s) \left(1 + \frac{p(s)(t-s)}{\lambda r(s)} \right)^p r(s) \right] ds \leq w(T).$$

与条件(21)式矛盾。

证毕

注 1 当 $n=2, p_1=p_2, m(t)=0, q(t)=\int_a^b q(t, \xi) d\sigma(\xi), g(t, \xi)=t$ 时, 本文方程(1)即为文献[2]中的方程

(2); 当 $p_1=p_2, m(t)=0, q(t)=\int_a^b q(t, \xi) d\sigma(\xi), g(t, \xi)=g(t)$ 时, 方程(1)即为文献[1]中的方程(3); 当 $p_1=p_2, p(t)=0$ 时, 方程(1)即为文献[2]中的方程(4)。显然, 定理 A、定理 B、定理 D 是本文定理 1 的特例。

定理 2 若满足假设 $(H_1) \sim (H_3)$ 和(10)式, 且存在函数 $\rho(t) \in C^1(I, \mathbf{R}^+)$ 使得:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \rho(s) \left[Q(s) - \frac{r(s)}{p^p} \left| \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} - \frac{p(s)}{r(s)} \right|^p G^{1-p}(s) \right] ds = \infty, \quad (24)$$

对 $T \geq t_0$ 成立, 则方程(1)振动。

证明 不妨设方程(1)存在最终正解 $x(t)$, 则当 $t \geq T \geq t_0 \geq 0$ 时, 有 $x(t) > 0, x(\tau(t)) > 0, x(g(t, \xi)) > 0$, 由引理 4, 有 $z^{(n-1)}(t) > 0, z^{(n)} \leq 0, z'(t) > 0$ 。

引进函数

$$u(t) = \rho(t)r(t) \left(\frac{z^{(n-1)}(t)}{z^{p_2-1}(\theta g(t))} \right)^{p_1-1} = \rho(t)w(t), t \geq T, \quad (25)$$

式中: $w(t)$ 由引理 6 给出。

对(25)式求导数,由方程(1)和引理 2~6,得到:

$$\begin{aligned} u'(t) &= \rho'(t)w(t) + \rho(t)w'(t) \leq \rho'(t)w(t) - \rho(t)Q(t) - \frac{\rho(t)p(t)}{r(t)}w(t) - \rho(t)G(t)r^{1-q}(t)w^q(t) \leq \\ & \frac{\rho'(t)}{\rho(t)}u(t) - \rho(t)Q(t) - \frac{p(t)}{r(t)}u(t) - G(t)[\rho(t)r(t)]^{1-q}u^q(t) \leq \\ & -\rho(t)Q(t) + \left(\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} - \frac{p(t)}{r(t)}\right)u(t) - G(t)[\rho(t)r(t)]^{1-q}u^q(t), \end{aligned} \quad (26)$$

式中: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, G(t) = (p-1)\theta M m g^{n-2}(t)g'(t), t \geq T$ 。

利用引理 3,取 $\lambda_0 = q$ 且:

$$X = G^{\frac{1}{q}}(t)[\rho(t)r(t)]^{\frac{1-q}{q}}|u(t)|, Y = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1} \left|\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} - \frac{p(t)}{r(t)}\right|^{p-1} G^{\frac{1-p}{q}}(t)[\rho(t)r(t)]^{\frac{p-1}{p}},$$

则由引理 3 得到不等式:

$$\begin{aligned} & \left|\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} - \frac{p(t)}{r(t)}\right|^{p-1} u(t) - G(t)[\rho(t)r(t)]^{1-q}u^q(t) \leq \\ & (q-1) \left(\frac{p-1}{p}\right)^{(p-1)q} \left|\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} - \frac{p(t)}{r(t)}\right|^{(p-1)q} G^{1-p}(t)\rho(t)r(t) \leq \frac{\rho(t)r(t)}{p^p} \left|\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} - \frac{p(t)}{r(t)}\right|^p G^{1-p}(t), t \geq T. \end{aligned} \quad (27)$$

联合(26)和(27)式,有: $u'(t) \leq -\rho(t) \left[Q(t) - \frac{r(t)}{p^p} \left|\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} - \frac{p(t)}{r(t)}\right|^p G^{1-p}(t)\right], t \geq T$ 。

对上式从 T 到 t 积分,有: $u(t) - u(T) \leq -\int_T^t \rho(s) \left[Q(s) - \frac{r(s)}{p^p} \left|\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} - \frac{p(s)}{r(s)}\right|^p G^{1-p}(s)\right] ds$ 。再令 $t \rightarrow \infty$ 取上极限,得到与条件(24)式的矛盾。证毕

若 $\rho(t) = 1, p(t) = 0$, 则定理 2 有如下推论。

推论 1 若满足假设 $(H_1) \sim (H_3)$ 和(10)式,且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_T^t Q(s) ds = \infty, T \geq t_0$, 则方程(1)振动。

注 2 文献[2]的推论 4 是本文推论 1 的特例,文献[1]的定理 2 是本文定理 2 的特例。

定理 3 若满足假设 $(H_1) \sim (H_3)$ 和(10)式,且 $H \in C(D; \mathbf{R}), h \in C(D_0; \mathbf{R}), \kappa, \rho \in C^1([t_0, \infty); (0, \infty))$ 满足以下条件:

- i) $H(t, s) > 0, (t, s) \in D_0; H(t, t) = 0, t \geq t_0$;
- ii) $H(t, s)$ 在 D_0 上对第二个变量有连续非正的偏导数;
- iii) $-\frac{\partial}{\partial s}(H(t, s)\kappa(s)) - H(t, s)\kappa(s) \left[\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} - \frac{p(s)}{r(s)}\right] = h(t, s), (t, s) \in D_0$ 。

又若:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \left[H(t, s)\kappa(s)\rho(s)Q(s) - \left(\frac{1}{p} |h(t, s)|\right)^p \frac{\rho(s)r(s)}{[H(t, s)\kappa(s)G(s)]^{p-1}} \right] ds = \infty, \quad (28)$$

式中: $G(s) = (p-1)\theta m M g^{n-2}(s)g'(s), Q(s) = \int_a^b q(s, \xi)(1 - m(g(s, \xi)))^{p_2-1} d\sigma(\xi)$, 则方程(1)振动。

证明 设方程(1)存在最终正解 $x(t)$, 则当 $t \geq T \geq t_0 \geq 0$ 时, 有 $x(t) > 0, x(g(t, \xi)) > 0, x(\tau(t)) > 0$ 。利用引理 4, 有 $z^{(n-1)}(t) > 0, z^{(n)} \leq 0, z'(t) > 0$ 。定义函数 $u(t)$ 同(25)式, 则(26)式成立。亦即:

$$\rho(t)Q(t) \leq -u'(t) + \left(\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} - \frac{p(t)}{r(t)}\right)u(t) - \frac{G(t)u^q(t)}{[\rho(t)r(t)]^{q-1}}, \quad (29)$$

式中: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, G(t) = (p-1)\theta M m g^{n-2}(t)g'(t), t \geq T$ 。

在上式中用 s 代替 t , 两边乘以 $H(t, s)\kappa(s)$, 并且从 $T(\geq T_0)$ 到 $t(>T)$ 积分, 有:

$$\begin{aligned} & \int_T^t H(t, s)\kappa(s)\rho(s)Q(s) ds \leq \\ & -\int_T^t H(t, s)\kappa(s)u'(s) ds + \int_T^t H(t, s)\kappa(s) \left(\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} - \frac{p(s)}{r(s)}\right) u(s) ds - \int_T^t H(t, s)\kappa(s) \frac{G(s)u^q(s)}{[\rho(s)r(s)]^{q-1}} ds = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -H(t,s)\kappa(s)u(s) \Big|_T^t - \int_T^t \left[-\frac{\partial}{\partial s}(H(t,s)\kappa(s)) - H(t,s)\kappa(s) \left(\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} - \frac{p(s)}{r(s)} \right) \right] u(s) ds - \\
& \int_T^t H(t,s)\kappa(s) \frac{G(s)u^q(s)}{[\rho(s)r(s)]^{q-1}} ds = \\
& H(t,T)\kappa(T)u(T) - \int_T^t h(t,s)u(s) ds - \int_T^t H(t,s)\kappa(s) \frac{G(s)u^q(s)}{[\rho(s)r(s)]^{q-1}} ds \leq \\
& H(t,T)\kappa(T)u(T) + \int_T^t |h(t,s)|u(s) ds - \int_T^t H(t,s)\kappa(s) \frac{G(s)u^q(s)}{[\rho(s)r(s)]^{q-1}} ds. \quad (30)
\end{aligned}$$

利用引理 3, 取 $\lambda_0 = q$, 且:

$$X = [H(t,s)\kappa(s)G(s)]^{\frac{1}{q}} \frac{u(t)}{[\rho(t)r(t)]^{\frac{1}{p}}}, Y = \left(\frac{1}{q}\right)^{p-1} |h(t,s)|^{p-1} \left(\frac{\rho(s)r(s)}{[H(t,s)\kappa(s)G(s)]^{p-1}} \right)^{\frac{1}{q}},$$

则由引理 3 得到不等式:

$$\begin{aligned}
& |h(t,s)|u(s) - H(t,s)\kappa(s)G(s) \frac{u^q(s)}{[\rho(s)r(s)]^{q-1}} \leq \\
& (q-1) \left(\frac{1}{q} |h(t,s)| \right)^p \frac{\rho(s)r(s)}{[H(t,s)\kappa(s)G(s)]^{p-1}}, t > T \geq T_0. \quad (31)
\end{aligned}$$

联合(30)和(31)式, 有:

$$\begin{aligned}
& \int_T^t \left[H(t,s)\kappa(s)\rho(s)Q(s) - (q-1) \left(\frac{1}{q} |h(t,s)| \right)^p \frac{\rho(s)r(s)}{[H(t,s)\kappa(s)G(s)]^{p-1}} \right] ds \leq \\
& H(t,T)\kappa(T)u(T) \leq H(t,t_0)\kappa(T)u(T).
\end{aligned}$$

在上面不等式中取 $T = T_0$, 有:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t \left[H(t,s)\kappa(s)\rho(s)Q(s) - (q-1) \left(\frac{1}{q} |h(t,s)| \right)^p \frac{\rho(s)r(s)}{[H(t,s)\kappa(s)G(s)]^{p-1}} \right] ds = \\
& \left\{ \int_{t_0}^{T_0} + \int_{T_0}^t \right\} \left[H(t,s)\kappa(s)\rho(s)Q(s) - (q-1) \left(\frac{1}{q} |h(t,s)| \right)^p \frac{\rho(s)r(s)}{[H(t,s)\kappa(s)G(s)]^{p-1}} \right] ds \leq \\
& H(t,s) \left\{ \int_{t_0}^{T_0} \kappa(s)\rho(s) |Q(s)| ds + u(T_0)\kappa(T_0) \right\}.
\end{aligned}$$

因此:

$$\begin{aligned}
& \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^t \left[H(t,s)\kappa(s)\rho(s)Q(s) - (q-1) \left(\frac{1}{q} |h(t,s)| \right)^p \frac{\rho(s)r(s)}{[H(t,s)\kappa(s)G(s)]^{p-1}} \right] ds \leq \\
& \int_{t_0}^{T_0} \kappa(s)\rho(s) |Q(s)| ds + u(T_0)\kappa(T_0) < \infty
\end{aligned}$$

与条件(28)式矛盾。

证毕

注 3 定理 C 是本文定理 3 的特例。

例 1 考虑二阶微分方程

$$[|z'(t)|^{p_1-2} z'(t)]' + e^{\theta(p_2-1)t} |x(\theta t)|^{p_2-1} x(\theta t) = 0 \quad (32)$$

式中: $z(t) = x(t) + (1 - e^{-t})x(t-1)$, $p_1 > p_2 > 2$, $\theta \in (0, 1)$, $r(t) = 1$, $m(t) = 1 - e^{-t}$, $\tau(t) = t-1$, $a = \alpha$, $b = \alpha + 1$, $g(t, \xi) = g(t) = \theta t$, $p(t) = 0$, $E(t) = 1$, $q(t, \xi) = e^{\theta(p_2-1)t}$, $Q(t) = e^{\theta(p_2-1)t} \cdot e^{-\theta(p_2-1)t} = 1$ 。很容易验证方程(32)满足条件 $(H_1) \sim (H_3)$ 和(10)式, 由推论 1 知方程(32)是振动的。

注 4 最近文献[1-10]的振动结果均不适用于方程(32)。因此, 本文结果推广和补充了此前文献中的一些结果。

参考文献:

- [1] 张全信, 俞元洪. 偶阶半线性阻尼泛函微分方程的振动性[J]. 应用数学学报, 2010, 33(4): 601-610.
ZHANG Q X, YU Y H. Oscillation of even order half-linear functional differential equations with damping[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2010, 33(4): 601-610.
- [2] LI H J, YE H C C. An integral criterion for oscillation of nonlinear differential equations[J]. Math Japonica, 1995, 41(1): 185-188.
- [3] 张全信, 高丽, 俞元洪. 偶阶半线性中立型分布时滞微分方程的振动性[J]. 应用数学学报, 2011, 34(5): 895-905.

- ZHANG Q X,GAO L,YU Y H. Oscillation of even order half-linear neutral differential equations with distributed delay[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica,2011,34(5):895-905.
- [4] 田亚州,蔡远利,孟凡伟. 含有连续分布时滞偶阶微分方程的振动性[J]. 应用数学学报,2013,36(6):1080-1093.
- TIAN Y Z,CAI Y L,MENG F W. Oscillation criteria for even order differential equations with continuous distributed delay[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica,2013,36(6):1080-1093.
- [5] XU Z T,XIA Y. Integral averaging technique and oscillation of certain even order delay differential equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2004,292(1):238-246.
- [6] XU R,MENG F W. Some new oscillation criteria for second order quasi-linear neutral differential equations[J]. Applied Mathematics and Computation,2006,182(1):797-803.
- [7] MENG F W,XU R. Oscillation criteria for certain even order quasi-linear neutral differential equations with deviating arguments [J]. Applied Mathematics and Computation,2007,190(1):458-464.
- [8] HAN Z L,LI T X,SUN S R,et al. Remarks on the Paper[Appl Math Comput,207(2009)388-396][J]. Applied Mathematics and Computation,2010,215(11):3998-4007.
- [9] WANG P G,TEO K L,LIU Y Q. Oscillation properties for even order neutral equations with distributed deviating arguments [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2005,182(2):290-303.
- [10] PHILOS C G. A new criteria for the oscillatory and asymptotic behavior of delay differential equations[J]. L'Académie Polonaise des Sciences Bulletin Série des Sciences Mathématiques,1981,29(7/8):367-370.

Oscillation of Even Order p -Laplace Neutral Functional Differential Equations with Damping Terms

ZENG Yunhui¹, WANG Zhihong², WANG Anning¹

(1. College of Mathematics and Statistics, Hengyang Normal University, Hengyang Hunan 421002; 2. Department of Mathematics and Computational Sciences, Nanyue College of Hengyang Normal University, Hengyang Hunan 421008, China)

Abstract: [Purposes] The objective is to study oscillation of even order half-linear neutral functional differential equation with continuous distributed delay arguments and damping terms. [Methods] Oscillation of even order p -Laplace neutral functional differential equations with damping terms is investigated by using of Riccati transformation, $H(t)$ function, Yang inequality and the integral averaging technique. [Findings] Some new sufficient conditions are established for oscillation of all solutions of the equation, which generalize and improve some known results. [Conclusions] Finally, an example is provided to illustrate new results.

Keywords: neutral; functional differential equation; oscillation

(责任编辑 黄 颖)