

一类指数型离散 Logistic 迭代方程的动力学分析^{*}

刘玲玲, 李梅梅

(西南石油大学 理学院, 成都 610500)

摘要:【目的】研究一类种群生长模型 $x_{n+1} = x_n \exp(r(1 - ax_n - bx_n^2))$, $r, a, b > 0$ 的稳定性和周期性。【方法】利用定性理论和分岔理论, 讨论模型不动点的稳定性和退化现象以及周期点的存在性。【结果】给出模型不动点的稳定性条件以及发生倍周期分岔的参数条件, 讨论了 2^k 周期点的存在性, 并给出了存在三周期点的充分条件。【结论】所得结果可以对符合模型的事物进行生长周期预测, 为保护生物的人为干预活动提供参考。

关键词: Logistic 迭代方程; 稳定性; 倍周期分岔; Li-Yorke 混沌

中图分类号: O175.12

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2021)06-0071-06

1 研究背景

Logistic 模型在生物数学中是一种基本的预测模型, 应用领域非常的广泛^[1-7]。在生物工程领域, 文献[1-2]基于 Logistic 模型能够描述细胞生长期及细胞自身抑制作用, 在改变参数的基础上, 建立了发酵动力学模型; 在岩土工程领域, 文献[3-4]利用 Logistic 模型能很好地反映全过程的沉降量与时间的关系, 建立了地基全过程沉降量模型, 对地基沉降量进行预测, 从而指导工程施工; 在油气田开发领域, 文献[5]建立了预测油气田产量的 Logistic 模型, 为规划油气田开发规模、指定生产运行计划具有指导意义, 等等^[6-7]。对于指数型 Logistic 方程, 文献[8]研究了方程 $x_{n+1} = x_n e^{r(1-x_n)}$, $r > 0$ 的稳定性, 给出了此方程的每一个正解收敛于 1 的充要条件; 文献[9]得到上述方程具有 2^k 周期解的充分条件, 验证该迭代方程存在混沌解; 文献[10]讨论方程 $x_{n+1} = x_n \exp(r_n(1 - x_n))$, $r_n > 0$ 全局吸引性的充分条件; 文献[11]研究方程:

$$x_{n+1} = x_n e^{r(1-ax_n-bx_n^2)}, r, a, b > 0, \quad (1)$$

给出了不动点振动的充要条件及不动点渐近稳定的充分条件; 文献[12]讨论了方程 $x_{n+1} = x_n \exp(r(1 - ax_n - bx_n^2))$, $r, a > 0, b \geq 1$ 全局吸引的充分条件。

在上述工作的基础上, 本文主要研究迭代方程(1)的稳定性以及周期解, 给出了不动点稳定性的充要条件, 讨论了发生倍周期分岔的现象并给出了正规形。将文献[9]中对一次指数型迭代方程的周期点存在性结论推广到(1)式, 并给出了三周期点存在的充分条件。获得的主要结果如下。

定理 1 映射 $f(x) = xe^{r(1-ax-bx^2)}$, $r, a, b > 0$ 有两个不动点 $x_1 = 0$ 和 $x_2 = \frac{\sqrt{a^2+4b}-a}{2b}$ 。当 $0 < r < 1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4b}}$ 时, x_1 是不稳定的, x_2 是渐近稳定的; 当 $r = 1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4b}}$ 时, x_1 是不稳定的, x_2 是退化的; 当 $r > 1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4b}}$ 时, x_1 和 x_2 均不稳定。

定理 2 当 $r = 1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4b}}$ 时, 映射 $f(x) = xe^{r(1-ax-bx^2)}$ 在不动点 x_2 处发生倍周期分岔。当 r 跨过 $1 +$

* 收稿日期: 2020-10-21 修回日期: 2021-06-13 网络出版时间: 2021-11-17 10:56

资助项目: 国家自然科学基金(No. 11771308); 西南石油大学专项项目(No. 2019CXTD08)

第一作者简介: 刘玲玲, 女, 副教授, 博士, 研究方向为微分方程与动力系统, Email: a600aa@163.com

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20211116.1820.008.html>

$\frac{a}{\sqrt{a^2+4b}}$ 时, 映射 $f(x)$ 产生两个稳定的二周期点。

定理 3 迭代方程(1)具有 $2^k (k=1, 2, \dots)$ 周期解的充分条件为存在参数 r 的序列 $0=r_0 < r_1 < \dots < r_k < \dots$, 使得 $r_k < r < r_{k+1}$ 成立。

定理 4 存在 $a, b, r, n_1, n_2, m (m>1)$ 满足:

$$0 < b < n_1 a^2 (2 - n_1 n_2 - n_1) (n_1 n_2^2 + n_1 - n_2 - 1) (n_1^2 n_2^2 + n_1^2 - 2)^{-2},$$

$$\frac{\ln n_1}{g_0(m x_2)} < r < \frac{\ln n_2}{g_0(n_1 x_2)}, \frac{n_2 + 1}{n_2^2 + 1} < n_1 < \frac{2}{n_2 + 1} < 1 < n_2,$$

其中: $g_0(x) = 1 - ax - bx^2$, 使得至少存在 $x^* \in (m x_2, +\infty)$, $f^3(x^*) = 0$, 即 $f(x)$ 具有三周期解, 迭代方程(1)产生混沌。

为了后续证明的方便, 先将(1)式进行改写。

令函数 $f(x) = x e^{r(1-ax-bx^2)}$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$, $n=1, 2, \dots$, 则(1)式可以改写为:

$$x_{n+1} = f^{n+1}(x_0), n=1, 2, \dots \quad (2)$$

构造函数列 $g_k(x) = g_{k-1}(x) + g_{k-1}(x e^{r g_{k-1}(x)})$, $k=0, 1, \dots$, 其中 $g_0(x) = 1 - ax - bx^2$, 则易证得 $f^{2^k}(x) = x e^{r g_k(x)}$, $k=0, 1, \dots$ 成立。由于满足初始解 $x_0 > 0$ 的一切解均为正, 考虑到生物意义, 因此只考虑 $x \in (0, +\infty)$ 上的情况。

2 定理的证明

2.1 定理 1 的证明

由方程 $f(x) - x = x(e^{r(1-ax-bx^2)} - 1) = 0$ 得出 $f(x)$ 的不动点为 $x_1 = 0$ 和 $x_2 = \frac{\sqrt{a^2+4b}-a}{2b}$ 。下面通过计算特征值来判定不动点的稳定性。

在不动点 x_1 处的特征值为 $|f'(0)| = |e^r| > 1$, 则不动点 x_1 是不稳定的。

在不动点 x_2 处的特征值为 $|f'(x_2)| = \left| 1 - \left(\frac{(\sqrt{a^2+4b}-a)\sqrt{a^2+4b}}{2b} \right) r \right|$ 。当 $0 < r < 1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4b}}$ 时,

$|f'(x_2)| < 1$, 则不动点 x_2 是渐近稳定的; 当 $r = 1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4b}}$ 时, $|f'(x_2)| = 1$, 则不动点 x_2 是退化的; 当 $r >$

$1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4b}}$ 时, $|f'(x_2)| > 1$, 则不动点 x_2 是不稳定的。

证毕

2.2 定理 2 的证明

在证明定理 2 之前, 先证明一个引理。

引理 1 函数 $f(x) = x e^{r(1-ax-bx^2)}$, $a, b, r > 0$ 满足下列性质:

1) 当 $x \in (0, x_2)$ 时, $f(x) > x$; 当 $x = x_2$ 时, $f(x) = x$; 当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $f(x) < x$ 。

2) 在 $\left(0, \frac{\sqrt{(ar)^2+8br-ar}}{4br}\right)$ 上单调递增, $\left(\frac{\sqrt{(ar)^2+8br-ar}}{4br}, +\infty\right)$ 上单调递减。

证明 $f(x)$ 可表示为 $f(x) = x e^{r g_0(x)}$, 其中 $g_0(x) = 1 - ax - bx^2$, $a, b > 0$ 。

由定理 1 可知 x_2 为映射 $f(x)$ 的不动点, 因此 $g_0(x_2) = 0$ 。

当 $x \in (0, x_2)$ 时, 有 $g_0(x) > 0$, 于是 $f(x) > x$; 当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, 有 $g_0(x) < 0$, $0 < e^{r g_0(x)} < 1$, 于是 $f(x) < x$, 则(1)式成立。

对 $f(x)$ 求导有 $f'(x) = e^{r g_0(x)} h(x)$, 式中: $h(x) = 1 + x r g_0'(x) = -2brx^2 - arx + 1$ 。由 $h(x) = 0$ 可解出 $x = \frac{\sqrt{(ar)^2+8br-ar}}{4br}$ 。

由二次函数的性质可得, $x \in \left(0, \frac{\sqrt{(ar)^2+8br-ar}}{4br}\right)$, 有 $h(x) > 0$, 则 $f'(x) > 0$, 从而 $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in$

$\left(\frac{\sqrt{(ar)^2+8br-ar}}{4br}, +\infty\right)$, 有 $h(x) < 0$, 则 $f'(x) < 0$, 从而 $f(x)$ 单调递减。

证毕

证明(定理 2) 由定理 1 可知,当 $r=1+\frac{a}{\sqrt{a^2+4b}}$ 在不动点 x_2 处的特征值为 -1 。下面需要验证横截条件和非退化条件。通过计算:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r} \Big|_{x=x_2, r=1+\frac{a}{\sqrt{a^2+4b}}} &= \frac{\sqrt{a^2+4b}(a-\sqrt{a^2+4b})}{2b} < 0, \\ f''(x_2) \Big|_{r=1+\frac{a}{\sqrt{a^2+4b}}} &< 0, f'''(x_2) \Big|_{r=1+\frac{a}{\sqrt{a^2+4b}}} > 0,\end{aligned}$$

则有 $\frac{1}{2}(f''(x_2))^2 + \frac{1}{3}f'''(x_2) \neq 0$ 。

由文献[13]中的定理 4.3,映射 $f(x)$ 在不动点 $x=x_2$ 处的正规形为: $x \rightarrow -\left(r - \frac{a}{\sqrt{a^2+4b}}\right)x + x^3 + O(x^4)$ 。

从正规形中可以看出:当 $0 < r < 1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4b}}$, 不动点 x_2 是稳定的;当 $r > 1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4b}}$, 不动点 x_2 是不稳定的;当

$r=1+\frac{a}{\sqrt{a^2+4b}}$ 时,映射发生倍周期分岔,映射 $f(x)$ 随着参数值 r 跨过 $1+\frac{a}{\sqrt{a^2+4b}}$ 将产生二周期点。

下面证明 $r > 1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4b}}$ 时 $f(x)$ 二周期点存在。

由于 $r > 1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4b}}$, 则有 $\frac{\sqrt{(ar)^2+8br-ar}}{4br} \in (0, x_2)$ 。构造辅助函数 $\tilde{f}(x) = f(x) - x_2$ 。由引理 1 可知,

$\tilde{f}\left(\frac{\sqrt{(ar)^2+8br-ar}}{4br}\right) > 0, \tilde{f}(0) = -x_2 < 0$ 。根据零点存在定理知至少存在一点 $c \in \left(0, \frac{\sqrt{(ar)^2+8br-ar}}{4br}\right)$, 使 $f(c) = x_2$ 。由引理 1 函数的单调性,保证了 c 是唯一的。进一步,当 $x \in (0, c), f(x) > x$ 且 $f(x) \in (0, x_2)$, 于是 $f^2(x) > f(x) > x$, 则在 $x \in (0, c)$ 上 $f(x)$ 不存在二周期点。

下面证明 $x \in [c, +\infty)$ 上 $f(x)$ 二周期点存在。记 $f^2(x) = xe^{g_1(x)}$, 其中 $g_1(x) = g_0(x) + g_0(xe^{g_0(x)})$, 只需证明 $g_1(x)$ 在 $x \in [c, +\infty)$ 上存在异于 x_2 的零点。先判断 $g_1(x)$ 的单调性,通过对 $g_1(x)$ 求导有:

$$g_1'(x) = j(x)(2bx+a)(2bx+ae^{g_0(x)}+a)e^{g_0(x)},$$

式中: $j(x) = w(x) - v(x), w(x) = \frac{2brx^2+arx-1}{2bx+a}, v(x) = \frac{1}{(2bx+ae^{g_0(x)}+a)e^{g_0(x)}}$, 于是 $g_1'(x)$ 的符号与 $j(x)$ 一致。

由引理 1 的证明可知:

1) 当 $x \in \left[c, \frac{\sqrt{(ar)^2+8br-ar}}{4br}\right), w(x) < 0$, 则 $j(x) < 0$;

2) 当 $x \in \left[\frac{\sqrt{(ar)^2+8br-ar}}{4br}, +\infty\right), w(x) \geq 0$, 则 $j(x)$ 的符号需进一步判断。

下面计算:

$$j'\left(\frac{\sqrt{(ar)^2+8br-ar}}{4br}\right) > \frac{8br^2}{(\sqrt{(ar)^2+8br}+ar)^2} > 0, j'(x_2) = \frac{-4b^2rx_2^2-2abrx_2+4b}{(a+2bx_2)^2} < 0。$$

易知至少存在点 $p \in \left(\frac{\sqrt{(ar)^2+8br-ar}}{4br}, x_2\right)$, 使得 $j'(p) = 0$ 。

因为在区间 $\left[\frac{\sqrt{(ar)^2+8br-ar}}{4br}, p\right) \cup (p, +\infty)$ 上 $j''(x) < 0$, 所以 $j'(x)$ 单调递减, 于是当 $x \in$

$\left[\frac{\sqrt{(ar)^2+8br-ar}}{4br}, p\right), j'(x) > 0, j(x)$ 单调递增; 当 $x \in (p, +\infty), j'(x) < 0, j(x)$ 单调递减。再计算出 $j\left(\frac{\sqrt{(ar)^2+8br-ar}}{4br}\right) = -v\left(\frac{\sqrt{(ar)^2+8br-ar}}{4br}\right), j(x_2) = \frac{2brx_2^2+arx_2-2}{2bx_2+a}$ 。

由 $r > 1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4b}}, x_2 > \frac{\sqrt{(ar)^2+16br-ar}}{4br}$, 根据二次函数性质知 $j(x_2) > 0$, 则至少存在点 $q \in$

$\left(\frac{\sqrt{(ar)^2+8br-ar}}{4br}, x_2\right)$, 使 $j(q)=0$ 。根据 $j(x)$ 的单调性, 当 $x \in \left[\frac{\sqrt{(ar)^2+8br-ar}}{4br}, q\right)$, $j(x) < 0$; 当 $x \in (q, x_2)$, $j(x) > 0$ 。

再判断区间 $[x_2, +\infty)$ 上 $j(x)$ 的符号。 $j(x)$ 的符号与 $g'_1(x)$ 一致, 于是 $g'_1(x_2) > 0$ 。而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'_1(x) = -\infty$, 则至少存在点 $s \in (x_2, +\infty)$, 使 $g'_1(s) = 0$, 于是 $j(s) = 0$ 。根据 $j(x)$ 在 $[x_2, +\infty)$ 上单调性, 当 $x \in [x_2, s)$, $j(x) > 0$; 当 $x \in (s, +\infty)$, $j(x) < 0$ 。

因此, 当 $x \in [c, q) \cup (s, +\infty)$, $j(x) < 0$, $g'_1(x) < 0$, 则 $g_1(x)$ 单调递减; 当 $x = q$ 或 s , $j(x) = 0$, $g'_1(x) = 0$; 当 $x \in (q, s)$, $j(x) > 0$, $g'_1(x) > 0$, 则 $g_1(x)$ 单调递增。

因为 $g_1(x_2) = 0$, $g_1(x)$ 在 $x \in (q, x_2)$ 上单调递增, 于是 $g_1(q) < 0$ 。而 $g_1(c) = \frac{1}{r} \ln \frac{x_2}{c} > 0$, 由零点存在定理, 至少存在 $t_1 \in (c, q)$, 使 $g_1(t_1) = 0$ 。由 $g_1(x)$ 在 $x \in (c, x_2)$ 上单调性, 当 $x \in [c, t_1)$, $g_1(x) > 0$; 当 $x \in (t_1, x_2)$, $g_1(x) < 0$ 。

又因为 $g_1(x)$ 在 $x \in (x_2, s)$ 上单调递增, 于是 $g_1(s) > 0$ 。而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_1(x) = -\infty$, 根据零点存在定理, 则至少存在 $t_2 \in (s, +\infty)$, 使 $g_1(t_2) = 0$, 进而由 $g_1(x)$ 在 $x \in (x_2, +\infty)$ 上单调性, 当 $x \in (x_2, t_2)$, $g_1(x) > 0$; 当 $x \in (t_2, +\infty)$, $g_1(x) < 0$ 。

故映射 $f(x)$ 存在二周期点 t_1 和 t_2 。

最后判断二周期点的稳定性。二周期点 $t_k, k=1, 2$ 的特征值为 $\left| \frac{\partial f^2(t_k)}{\partial x} \right| = |1 + t_k r g'_1(t_k)|$, 令 $\phi(r) = 1 + t_k r g'_1(t_k)$, 由 $g'_1(t_k) < 0$, 则 $\phi(r)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减。由

$$\lim_{r \rightarrow \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4b}}\right)^+} \phi(r) = 1 + x_2 r g'_0(x_2) (2 + x_2 r g'_0(x_2)) = 1$$

连续性可知, 存在 $\delta > 0$ 使得在 $r \in \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4b}}, \delta\right)$ 上 $\left| \frac{\partial f^2(t_k)}{\partial x} \right| < 1$ 。

综上所述, 当 r 跨过 $1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4b}}$ 时, 映射 $f(x)$ 产生 2 个稳定的二周期点。

证毕

2.3 定理 3 的证明

采用数学归纳法。

记 $r_0 = 0, t_0 = x_2$, 当 $k=1$ 时, 取 $r_1 = 1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+4b}}$, 由定理 2 中证明知当 $r > r_1$, 存在 $t_1 \in (c, t_0)$ 且满足下列 4 个条件: $g_1(t_1(r)) = 0, \lim_{r \rightarrow r_1} t_1(r) = t_0(r_1), g'_1(t_1(r)) < 0$ 和 $g_k(x) > 0, \forall x \in (c, t_1)$, 于是迭代方程(1)具有 2 周期解。将 $g_1(t_1(r)) = 0$ 和 $2 + rt_1(r) g'_1(t_1(r)) = 0$ 联立解得 r_2 , 下面证明 $r_2 > r_1$ 。

令 $\varphi(r) = 2 + rt_1 g'_1(t_1)$, 则 $\varphi(r_2) = 0$ 。由于 $\varphi(r)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 因此只需证明 $\varphi(r_1) > 0$ 。由 $\lim_{r \rightarrow r_1} \varphi(r) = 2 > 0$, 于是 $r_2 > r_1, k=1$ 的情形得证。

下面假设 $k-1$ 时结论成立, 证明 k 时成立。 $k-1$ 时结论成立, 即存在参数 r 的序列 $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_{k-1}$, 使得 $r_{k-1} < r < r_k$ 时, 迭代方程具有 2^{k-1} 周期, 于是 $r_k > r_{k-1}$ 且存在 $t_{k-1} \in (c, t_{k-2})$; 当 $r > r_k$ 时, $g_k(t_{k-1}(r)) = 0$, $g'_k(t_{k-1}(r)) = g'_{k-1}(t_{k-1}) [2 + rt_{k-1} g'_{k-1}(t_{k-1})] > 0$ 。又因为 $g_k(c) = \frac{1}{r} \ln \frac{x_2}{c} > 0$, 于是存在 $x \in (c, t_{k-1})$, 使得 $g_k(x) < 0$, 由零点存在定理知存在 $t_k \in (c, t_{k-1})$, 使 $g_k(t_k(r)) = 0$, 而 $g_i(t_k) \neq 0, i=1, 2, \dots, k-1$, 于是迭代方程具有 2^k 周期。将 $g_k(t_k(r)) = 0$ 和 $2 + rt_k(r) g'_k(t_k(r)) = 0$ 联立解得 r_{k+1} , 同理令 $\varphi(r) = 2 + rt_k g'_k(t_k)$, 则 $\varphi(r_{k+1}) = 0$, $\lim_{r \rightarrow r_k} \varphi(r) = 2 > 0$, 可得 $r_{k+1} > r_k$ 。

综上所述, 定理 3 得证。

证毕

2.4 定理 4 的证明

由文献[14]中的 Li-Yorke 定理知要证明迭代方程产生混沌, 只需证明(1)式具有三周期解即可。

下面证明三周期解的存在性。 $f^3(x) = x e^{r^3(x)}$, 其中:

$$p(x) = 3 - ax(1 + e^{rg_0(x)}(1 + e^{rg_0(xe^{rg_0(x)})})) - bx^2(1 + e^{2rg_0(x)}(1 + e^{2rg_0(xe^{rg_0(x)})})).$$

若 $p(x)$ 存在异于 x_2 的零点, 方程就有三周期点。将点 $x = mx_2$ (不防设 $m > 1$) 代入 $p(x)$ 有:

$$p(mx_2) = 3 - amx_2(1 + e^{rg_0(mx_2)}(1 + e^{rg_0(mx_2e^{rg_0(mx_2)})})) - b(mx_2)^2(1 + e^{2rg_0(mx_2)}(1 + e^{2rg_0(mx_2e^{rg_0(mx_2)})})).$$

由引理 1 证明可知 $g_0(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $g_0(x_2) = 0$, 因此 $g_0(mx_2) < 0$ 。存在 r 满足 $\frac{\ln n_1}{g_0(mx_2)} <$

$r < \frac{\ln n_2}{g_0(n_1x_2)}$, 使得 $0 < e^{rg_0(mx_2)} < n_1 < 1 < e^{rg_0(n_1x_2)} < n_2$ 。因此, 有:

$$p(mx_2) > 3 - amx_2(1 + n_1(1 + e^{rg_0(n_1x_2)})) - b(mx_2)^2(1 + n_1^2(1 + e^{2rg_0(n_1x_2)})) > \\ 3 - amx_2(1 + n_1(1 + n_2)) - b(mx_2)^2(1 + n_1^2(1 + n_2^2)).$$

由二次函数的性质可知, 若:

$$0 < mx_2 < y^* = \frac{\sqrt{12b(n_1^2n_2^2 + n_1^2 + 1) + a_2^2(n_1n_2 + n_1 + 1)^2} - a(n_1n_2 + n_1 + 1)}{2b(n_1^2n_2^2 + n_1^2 + 1)},$$

则 $p(mx_2) > 0$ 。

通过计算可知, 当 $0 < b < \frac{n_1a^2(2 - n_1n_2 - n_1)(n_1n_2^2 + n_1 - n_2 - 1)}{(n_1^2n_2^2 + n_1^2 - 2)^2}$, $\frac{n_2 + 1}{n_2^2 + 1} < n_1 < \frac{2}{n_2 + 1}$, $n_2 > 1$ 时, $x_2 < y^*$, 即

存在 $m(m > 1)$ 使得 $p(mx_2) > 0$ 。当 a, b, r 固定时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = -\infty$ 。由零点存在定理可知, 至少存在 $x^* \in (mx_2, +\infty)$, 使得 $p(x^*) = 0$, 也就是说 $f(x)$ 具有三周期解, 因而迭代方程(1)产生混沌。证毕

3 结论

本文中讨论的模型可应用于传染病学中, r 代表病人接触率。根据得出的倍周期分岔充分条件, 为研究具体的生长过程、推迟传染病高潮到来, 并做出相关决策提供理论依据。利用混沌产生的充分条件, 为后续用一些方法将系统转变为确定系统提供参考。

参考文献:

- [1] 岳国君, 刘文信, 刘劲松, 等. Logistic 模型模拟乙醇发酵产物动力学[J]. 农业工程学报, 2015, 31(5): 280-286.
YUE G J, LIU W X, LIU J S, et al. Product kinetics of Logistic model to simulate ethanol fermentation[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering, 2015, 31(5): 280-286.
- [2] 王景胜, 王秋峰, 李勇, 等. Logistic 模型在不同还原糖初始浓度乙醇发酵中的应用[J]. 中国生物工程杂志, 2017, 37(10): 81-85.
WANG J S, WANG Q F, LI Y, et al. The application of Logistic equation to simulate ethanol fermentation in different initial concentration reducing sugar[J]. China Biotechnology, 2017, 37(10): 81-85.
- [3] 徐洪钟, 施斌, 李雪红. 全过程沉降量预测的 Logistic 生长模型及其适用性研究[J]. 岩土力学, 2005, 26(3): 387-391.
XU H Z, SHI B, LI X H. Logistic growth model and its applicability for predicting settlement during the whole process[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, 26(3): 387-391.
- [4] 朱志铎, 周礼红. 软土路基全过程沉降预测的 Logistic 模型应用研究[J]. 岩土工程学报, 2009, 31(6): 965-969.
ZHU Z D, ZHOU L H. Application of Logistic model in settlement prediction during complete process of embankment construction[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, 31(6): 965-969.
- [5] 刘传喜, 王树平, 刘延庆. 油气田产量预测模型应用新方法[J]. 石油与天然气地质, 2009, 30(3): 384-387.
LIU C X, WANG S P, LIU Y Q. New application of the forecast model of oil/gas output[J]. Oil & Gas Geology, 2009, 30(3): 384-387.
- [6] 姚曦, 李春玲. Logistic 模型曲线的中国广告产业发展阶段判断及预测[J]. 华侨大学学报(哲学社会科学版), 2017(1): 53-66.
YAO X, LI C L. Judgment and forecast of advertising industry development stage in China based on Logistic[J]. Journal of Huaqiao University (Philosophy & Social Sciences), 2017(1): 53-66.
- [7] 宋之杰, 唐晓莉. 基于 Logistic 模型的我国信息产业演化发展研究[J]. 数学的实践与认识, 2019, 49(5): 151-159.
SONG Z J, TANG X L. Research on the development of information industry in China based on the Logistic model[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2019, 49(5): 151-159.
- [8] MAY R M. Biological populations obeying difference equations: stable points, stable cycles and chaos[J]. Journal of Theoretical Biology, 1975, 51(2): 511-524.

- [9] 蔡惠京. 指数型一次 Logistic 迭代方程解的周期倍分岔现象[J]. 数学学报, 2001, 44(4): 761-768.
CAI H J. On the period-doubling bifurcation of the solutions of the first order exponential Logistic iterative equation[J]. Acta Mathematica Sinica, 2001, 44(4): 761-768.
- [10] 刘月华, 谢茂森. 一类差分方程的全局吸引性[J]. 长沙电力学院学报(自然科学版), 2001, 16(2): 9-11.
LIU Y H, XIE M S. Global attractivity of a kind of difference equations[J]. Journal of Changsha Electric Power Institute (Natural Sciences), 2001, 16(2): 9-11.
- [11] 王晓萍. 具有非线性平均增长率的离散 Logistic 方程的稳定性和振动性[J]. 生物数学学报, 1999, 14(1): 56-60.
WANG X P. Oscillation and global attractivity in a Logistic difference equation with nonlinear average growth[J]. Journal of Biomathematics, 1999, 14(1): 56-60.
- [12] 伍代勇. 一类广义离散 Logistic 系统的全局吸引性[J]. 计算机工程与应用, 2012, 48(30): 53-55.
WU D Y. Global attractivity in general discrete Logistic system[J]. Computer Engineering and Applications, 2012, 48(30): 53-55.
- [13] KUZNETSOV Y A. Elements of applied bifurcation theory[M]. New York: Springer-Verlag New York Inc, 1995.
- [14] LI T Y, YORKE J A. Period three implies chaos[J]. The American Mathematical Monthly, 1975, 82(10): 985-992.

Dynamic Analysis of a Class of Exponential Discrete Logistic Iterative Equation

LIU Lingling, LI Meimei

(School of Sciences, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, China)

Abstract: [Purposes] It studies the stability and periodic solution of a class of exponential discrete logistic iterative equation $x_{n+1} = x_n \exp(r(1 - ax_n - bx_n^2))$, $r, a, b > 0$. [Methods] By using qualitative theory and bifurcation theory, the stability, degenerate case of the fixed points and the existence of periodic solutions are discussed. [Findings] The stability condition of the fixed point and the bifurcation condition of period-doubling bifurcation are given. Furthermore, it discusses the existence of 2^k periodic solution and give the sufficient condition of 3-periodic solution. [Conclusions] The obtained results can predict the growth of periodic solution and provide a reference for human intervention activities.

Keywords: Logistic iterative equation; stability; period-doubling bifurcation; Li-Yorke chaos

(责任编辑 黄 颖)