

可数 Amenable 群作用的可测势函数的拓扑压^{*}

赵 操¹, 季 泳², 王 威³

(1. 苏州科技大学 数学科学学院, 江苏 苏州 215009; 2. 宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211;

3. 南通理工学院 基础教学学院, 江苏 南通 226002)

摘要:【目的】在 Amenable 群作用下, 给出相应的质量分布原理。【方法】综合运用了拓扑学、遍历论与几何测度论的方法。

【结果】对任何可测势函数, 引入了拓扑压、测度意义压的定义, 并证明了相应了质量分布原理。【结论】对于可测势函数, 存在相应的质量分布原理。

关键词:可测势函数; 变分原理; Amenable 群作用

中图分类号: O189

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2021)06-0077-04

1 研究背景与主要结果

拓扑压是当前动力系统研究的热点问题。2019 年, 王威等人^[1]给出了任意空间拓扑压的相关定义和结论, 对拓扑压的工作研究具有一定的推动作用。Amenable 群作用的动力系统是近期该领域的研究热点之一, 它是 Z 作用动力系统的推广。1975 年, Kieffer^[2]将 Shaimon-McMillan 定理推广到了可数 Amenable 群所作用的动力系统。Lindenstrauss^[3]对局部紧致 Amenable 群作用的保测系统, 证明了逐点遍历定理。Ornstein 和 Weiss^[4]将 Z 作用动力系统中经典熵理论扩充到了可数离散 Amenable 群作用的动力系统上。2010 年, 黄文等人^[5]给出了可数离散 Amenable 群作用下的局部熵的变分原理。梁兵兵等人^[6]给出顺从群作用的动力系统中次可加势的局部拓扑压的定义, 并证明了相应的局部变分原理。周效尧等人^[7]研究了 Amenable 群作用的拓扑条件熵及变分原理。郑冬梅等人^[8]给出了非紧集合的 Bowen 熵定义及大偏差定理。张瑞丰^[9]给出了 Amenable 群作用通有点集的条件变分原理。质量分布原理也称为弗罗斯特曼引理, 对于非紧拓扑熵或拓扑压的研究, 质量分布原理起着重要的作用。质量分布原理是估计豪斯多夫维数的一种常用的技巧。Thompson^[10]将质量分布原理推广到拓扑压的形式形式。最近, 出现了更多的应用于拓扑熵或拓扑压的估计, 例如: 对具有伪轨跟踪性质 Z 作用的动力系统, 尹郑^[11]利用拓扑压的质量分布原理, 给出了水平集的条件变分; Mesón 和 Vericat^[12]运用加权版本的质量分布原理, 给出加权熵的重分形分析。本文主要结果是证明了 Amenable 群作用的关于可测势函数的质量分布原理。

设 (X, G) 为可数 Amenable 作用的动力系统, 其中 X 为一个紧度量空间。下面将对任意可测势函数定义相应的拓扑压。设 G 为一个可数的离散群, $F(G)$ 表示所有的非空有限子集。tile $T \subset G$ 是一个具有下述右转移不变有限集, 即存在一个 tiling 中心 $C \subset G$ 使得 $Tc: c \in C$ 构成一个 G 的不交并。注意 $T \in F(G)$ 为 G 的一个 tile 当且仅当任意 $A \in F(G)$ 可以被 T 的不交的右转移所覆盖。本文用 G 表示可数的离散的 Amenable 群, 即存在一个无穷序列 $F_n \subseteq F(G)$ (即 Følner 序列), 使得对于任意 $g \in G$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|g F_n \Delta F_n|}{|F_n|} = 0$, 其中 $|\cdot|$ 表示集合中元素的个数, Δ 表示集合的对称差。由 G 是一个无限群, $|F_n|$ 趋近于无穷大。

对于 $\emptyset \neq F \in F(G)$, 可以定义 X 的度量 $d_F(x, y) = \max_{g \in F} d(gx, gy)$ 。集合 $E \subset Z \subset X$ 称之为 Z 的 (F, ϵ) -分离

* 收稿日期: 2020-11-27 修回日期: 2021-08-14 网络出版时间: 2021-09-13 09:06

资助项目: 国家自然科学基金(No. 11971236); 南通理工学院中青年骨干教师(No. ZQNGGJS202135)

第一作者简介: 赵操, 男, 博士, 讲师, 研究方向为动力系统与遍历论, E-mail: izhaocao@126.com; 通信作者: 王威, 男, 副教授, E-mail: 39658255@qq.com

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20210910.1709.006.html>

集,如果对于任意 $x \neq y \in E$ 有 $d_F(x, y) > \epsilon$. 非空集合 $K \subset Z \subset X$ 称为 Z 的 (F, ϵ) -生成集,如果 $Z \subset \bigcup_{x \in K} B_F(x, \epsilon)$, 其中 $B_F(x, \epsilon) = \{y \in X: d_F(x, y) < \epsilon\}$. 显然,任意 X 的 (F, ϵ) -分离集是有限的,并且对于任意非空集合 Z ,均存在 (F, ϵ) -生成集. 对于一个 Følner 序列 $\{F_n\}$ 和任意 $Z \subset X$, 使用 $r_n(\epsilon, Z)$ ($s_n(\epsilon, Z)$) 表示 Z 的最小(最大)的 (F_n, ϵ) -生成集(分离集).

设 φ 为可测函数, $\{F_n\}$ 为 G 中的一个 Følner 序列. 定义任意子集合 $Z \subset X$ 的拓扑压如下:

$$P_Z(\{F_n\}, \varphi) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|F_n|} \ln \sum_{x \in E} S_{F_n} \varphi(x),$$

其中: $S_{F_n} \varphi(x) = \sum_{h \in F_n} (hx)$ 且上确界取遍 Z 所有的 (F_n, ϵ) -分离集.

定理 1 (质量分布原理) 设 $Z \subset X$ 为一个 Borel 集, 如果 μ 为一个 Borel 概率测度, 且满足 $\mu(Z) > 0$, 对任意可测函数 $\varphi: X \rightarrow \mathbf{R}$, 有: $P_Z(\{F_n\}, \varphi) \geq \inf_{z \in Z} P_\mu(\{F_n\}, \varphi, z)$, 其中

$$P_\mu(\{F_n\}, \varphi, z) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|F_n|} (-\ln \mu(B_{F_n}(z, \epsilon)) + S_{F_n} \varphi(z)).$$

进一步, 如果 $\mu(Z) = 1$, $\varphi: X \rightarrow \mathbf{R}$ 是一个有下界的 Borel 可测函数, 则有: $P_Z(\{F_n\}, \varphi) \geq \int P_\mu(\{F_n\}, \varphi, z) d\mu$.

2 拓扑压的定义

定义 1 设 (Ω, A, μ) 为一个概率空间, $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ 为一个可测函数. 称 φ 为一个关于 μ quasi-可积的, 如果满足 $\int \varphi^+ d\mu < \infty$ 或者 $\int \varphi^- d\mu < \infty$. 其中 $\varphi^+ = \max\{\varphi, 0\}$, $\varphi^- = \max\{-\varphi, 0\}$ 分别表示 φ 的正部与负部. 如果 φ 是 quasi-可积的, 则可以定义它的积分 $\int \varphi d\mu = \int \varphi^+ d\mu - \int \varphi^- d\mu$.

下面介绍 3 个关于拓扑压的定义, 这里不要求势函数的连续性.

定义 2 对于任意的势函数 φ , 以及 $\varphi \neq Z \subset X, \epsilon > 0, n \in \mathbf{N}$, 定义 $P_Z(F_n, \varphi, \epsilon) := \sup_E \sum_{x \in E} S_{F_n} \varphi(x)$, 其中上确界取自 Z 所有的 (F_n, ϵ) -分离集. 同理定义, $Q_Z(F_n, \varphi, \epsilon) := \inf_E \sum_{x \in F_n} S_{F_n} \varphi(x)$, 其中下确界取遍 Z 的所有 (F_n, ϵ) -生成集, 定义 $P_Z(\{F_n\}, \varphi, \epsilon) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{|F_n|} \ln P_Z(F_n, \varphi, \epsilon)$, $Q_Z(\{F_n\}, \varphi, \epsilon) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{|F_n|} \ln Q_Z(F_n, \varphi, \epsilon)$. 最后定义 $P_Z(\{F_n\}, \varphi) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_Z(\{F_n\}, \varphi, \epsilon)$, $Q_Z(\{F_n\}, \varphi) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Q_Z(\{F_n\}, \varphi, \epsilon)$. 称 $P_Z(\{F_n\}, \varphi)$ 为 φ 在 Z 上关于 $\{F_n\}$ 的上拓扑压, $Q_Z(\{F_n\}, \varphi)$ 为 φ 在 Z 上关于 $\{F_n\}$ 的下拓扑压.

注 根据定义, $Q_Z(F_n, \varphi, \epsilon)$ 通常是有限的. 同时, $P_Z(F_n, \varphi, \epsilon) \leq \sup_E |E| \exp(|F_n| \cdot \sup_{x \in X} \varphi(x))$. 进一步, $r_n(\epsilon, Z) \leq s_n(\epsilon, Z) \leq r_n\left(\frac{\epsilon}{2}, Z\right)$. 如果 φ 是有上界的, 则有 $P_Z(F_n, \varphi, \epsilon) < \infty$.

定义 3 令 $\delta > 0, \alpha \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$. 对于 $\emptyset \neq Z \subset X$, 定义 $P_Z(F_n, \varphi, \delta, \alpha) := \inf_F \sum_{x \in F} \exp(-\alpha |F_n| + S_{F_n} \varphi(x))$, 其中下确界取遍所有 Z 的 (F_n, δ) 生成集, 并且设 $CP_\varphi(F_n, \varphi, \delta, \alpha) := 0$. 另外, 设 $CP_Z(\{F_n\}, \varphi, \delta, \alpha) = \limsup_{n \rightarrow \infty} CP_Z(F_n, \varphi, \delta, \alpha)$.

引理 1 设 $\emptyset \neq Z \subset X$, 如果存在 $\alpha \in \mathbf{R}$ 使得 $CP_Z(\{F_n\}, \varphi, \delta, \alpha) < \infty$, 则对任意的 $\beta > \alpha$ 有 $CP_Z(\{F_n\}, \varphi, \delta, \beta) = 0$.

证明 设 $C \in \mathbf{R}$ 且 $E_n \subset X$ 为 Z 的 (F_n, δ) 生成集, 使得对足够大的 N_0 及任意的 $n > N_0$, $\sum_{x \in E_n} \exp(-\alpha |F_n| + S_{F_n} \varphi(x)) < CP_Z(\{F_n\}, \varphi, \delta, \alpha) + 1 < C$. 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有:

$$0 \leq CP_Z(F_n, \varphi, \delta, \beta) \leq \sum_{x \in E_n} \exp(-\beta |F_n| + S_{F_n} \varphi(x)) \leq \frac{C}{\exp((\beta - \alpha) |F_n|)} \rightarrow 0.$$

于是有: $CP_Z(\{F_n\}, \varphi, \delta, \beta) = 0$.

证毕

定义 4 设 $Z \subset X$ 和 $\delta > 0$, 定义 $CP_Z(\{F_n\}, \varphi, \delta) = \inf\{\alpha \in \mathbf{R}: CP_Z(\{F_n\}, \varphi, \delta, \alpha) = 0\}$. 由于对任意的 $0 < \delta' < \delta$, 任意 (F_n, δ') -生成集是由一个 (F_n, δ) -生成的, 于是极限 $CP_Z(\{F_n\}, \varphi) := \lim_{\delta \rightarrow 0} CP_Z(\{F_n\}, \varphi, \delta)$ 存在并且称它为 Z 的关于 $\{F_n\}$ 的容量拓扑压. 设定 $CP_\emptyset(\{F_n\}, \varphi) = -\infty$.

定理 2 对于任意的 $Z \subset X$, 有 $CP_Z(\{F_n\}, \varphi) \leq Q_Z(\{F_n\}, \varphi) \leq P_Z(\{F_n\}, \varphi)$ 。

证明 设 $CP_Z(\{F_n\}, \varphi) > -\infty$ 。固定 δ_0 和 α , 使得对于任意的 $0 < \delta < \delta_0$ 和 $-\infty < \alpha < CP_Z(\{F_n\}, \varphi, \delta)$ 有 $CP_Z(\{F_n\}, \varphi, \delta) > -\infty$, 则有 $CP_Z(\{F_n\}, \varphi, \delta, \alpha) = \infty$ 。根据定义, 存在一个序列 $\{n_l\} \subset \mathbf{N}$, 使得:

$$\infty = CP_Z(\{F_n\}, \varphi, \delta, \alpha) = \liminf_{l \rightarrow \infty} \sum_{x \in F} \exp(-\alpha |F_{n_l}|) \cdot \exp(S_{F_{n_l}} \varphi(x)),$$

其中下确界取遍所有 Z 的 (F_{n_l}, δ) -生成集 F 。

可以取 $l_0 \in \mathbf{N}$ 足够大, 使得对任意 $l > l_0$, 有 $\inf_F \sum_{x \in F} \exp(S_{F_{n_l}} \varphi(x)) = Q_Z(F_{n_l}, \delta, \varphi) \geq \exp(\alpha |F_{n_l}|)$, 并且 $\alpha \leq$

$$\frac{1}{|F_{n_l}|} \ln Q_Z(F_{n_l}, \delta, \varphi) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|F_n|} \ln Q_Z(F_n, \delta, \varphi) + \delta.$$

由于 $\alpha < CP_Z(\{F_n\}, \varphi, \delta)$ 是任意选取的, 令 $\alpha \rightarrow CP_Z(\{F_n\}, \varphi, \delta)$, 可得 $CP_Z(\{F_n\}, \varphi, \delta) \leq Q_Z(\{F_n\}, \varphi, \delta) + \delta$ 。最后令 $\delta \rightarrow 0$, 可得到 $CP_Z(\{F_n\}, \varphi) \leq Q_Z(\{F_n\}, \varphi)$ 。因为极大的 (F_n, δ) -分离集 $E_n \subset Z$ 是 Z 的一个 (F_n, δ) -生成集, 可得 $Q_Z(\{F_n\}, \varphi) \leq P_Z(\{F_n\}, \varphi)$ 。证毕

3 定理 1 的证明

本节主要是给出定理 1 的证明。

定义 5 给定 X 上的一个 Borel 概率测度 μ , 对 $x \in X$ 和 $\delta > 0$ 定义:

$$P_\mu(\{F_n\}, \varphi, x, \epsilon) := \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|F_n|} (-\ln \mu(B_{F_n}(x, \epsilon)) + S_{F_n} \varphi(x)).$$

显然极限 $P_\mu(\{F_n\}, \varphi, x) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_\mu(\{F_n\}, \varphi, x, \epsilon)$ 是存在的, 称之为 φ 在 x 处关于 μ 与 $\{F_n\}$ 的测度压。

当 $\varphi: X \rightarrow \mathbf{R}$ 是可测并且有下界的, 函数 $x \mapsto \frac{1}{|F_n|} (-\ln \mu(B_{F_n}(x, \epsilon)) + S_{F_n} \varphi(x))$ 也是可测并且有下界。因此对于任意 $\delta > 0$, 函数 $x \mapsto P_\mu(\{F_n\}, \varphi, x, \delta)$ 是关于 μ quasi-可积的。 $M(X)$ 表示 X 的所有概率测度, $B(X)$ 表示所有的有下界可测函数 $\varphi: X \rightarrow \mathbf{R}$ 。对于任意 $\mu \in M$ 和 $\varphi \in B(X)$, $P_\mu(\{F_n\}, \varphi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int P_\mu(\{F_n\}, \varphi, x, \epsilon) d\mu(x)$, 称之为 φ 的平均测度压。

下面可以给出定理 1 的证明。首先证明如下定理。

定理 3 设 $\mu \in M(X)$, Z 为 Borel 集且满足 $\mu(Z) > 0$, 则对任意可测函数 $\varphi: X \rightarrow \mathbf{R}$ 有 $P_Z(\{F_n\}, \varphi) \geq \inf_{z \in Z} P_\mu(\{F_n\}, \varphi, z)$ 。

证明 令 $L := \inf_{z \in Z} P_\mu(\{F_n\}, \varphi, z)$ 。如果 $L = -\infty$, 则不需要证明。如果 $-\infty < L < +\infty$, 对于 $\epsilon > 0, \delta > 0$ 和 $N \in \mathbf{N}$, 定义 $Z_{\delta, N}^\epsilon := \{z \in Z: \mu(B_{F_n}(z, \delta)) \leq \exp(-|F_n|(L - \epsilon) + S_{F_n} \varphi(z)), \forall n \geq N\}$ 。

假设 $\mu(Z_{\delta, N}^\epsilon) = 0$ 对于任意的 $\delta > 0, N \in \mathbf{N}$ 。由 L 的定义, 对任意的 $z \in Z$, 存在 $\delta_z^\epsilon > 0$ 和 $N_z^\epsilon \in \mathbf{N}$, 使得对任意 $0 < \delta < \delta_z^\epsilon$ 和 $n \geq N_z^\epsilon$, 有: $L - \epsilon \leq \frac{1}{|F_n|} (-\ln \mu(B_{F_n}(z, \delta)) + S_{F_n} \varphi(z))$ 。

这说明 $Z = \bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{N \geq 1} Z_{\delta, N}^{\frac{1}{n}}$, 且 $\mu(Z) = 0$, 矛盾。因此可以选取 $\delta^\epsilon > 0, N^\epsilon \in \mathbf{N}$, 使得 $\mu(Z_{\delta^\epsilon, N^\epsilon}^\epsilon) > 0$ 。进一步, 对 $0 < \delta < \delta^\epsilon, n \geq N^\epsilon$, 设 F 为 $Z_{\delta^\epsilon, N^\epsilon}^\epsilon$ 的一个 (F_n, δ) -生成集, 由 $F \subset Z_{\delta^\epsilon, N^\epsilon}^\epsilon$ 知:

$$\sum_{z \in F} \exp(-|F_n|(L - \epsilon) + S_{F_n} \varphi(z)) \geq \sum_{z \in F} \mu(B_{F_n}(z, \delta)) \geq \mu(Z_{\delta^\epsilon, N^\epsilon}^\epsilon) > 0.$$

由于覆盖 F 是任意选取的, 令 $n \rightarrow \infty, CP_{Z_{\delta^\epsilon, N^\epsilon}^\epsilon}(\{F_n\}, \varphi, \delta, L - \epsilon) \geq \mu(Z_{\delta^\epsilon, N^\epsilon}^\epsilon) > 0$ 。因此, 对任意的 $0 < \delta < \delta^\epsilon$, $CP_{Z_{\delta^\epsilon, N^\epsilon}^\epsilon}(\{F_n\}, \varphi, \delta) \geq L - \epsilon$ 。

令 $\delta \rightarrow 0$, 由定理 2 可得: $P_Z(\{F_n\}, \varphi) \geq P_{Z_{\delta^\epsilon, N^\epsilon}^\epsilon}(\{F_n\}, \varphi) \geq CP_{Z_{\delta^\epsilon, N^\epsilon}^\epsilon}(\{F_n\}, \varphi) \geq L - \epsilon$ 。

最后令 $\epsilon \rightarrow 0$ 可得 $P_Z(\{F_n\}, \varphi) \geq L$ 。

如果 $L = \infty$, 类似可证, 只须考虑集合 $Z_{\delta, N}^C := \{z \in Z: \mu(B_{F_n}(z, \delta)) \leq \exp(-|F_n|C + S_{F_n} \varphi(z)), \forall n \geq N\}$, 再进一步令 $C \rightarrow \infty$ 即可得证。证毕

由定理 3 可以得到如下推论。

推论 1 设 $\mu \in M(X)$ 和 $\varphi \in B(X)$, 如果 Z 为一个 Borel 集且满足 $\mu(Z) = 1$ 。则有 $P_Z(\{F_n\}, \varphi) \geq P_\mu(\{F_n\}, \varphi)$ 。

证明 假设 $-\infty < P_\mu(\{F_n\}, \varphi) < \infty$ 并且 $\epsilon > 0$ 。显然, $Z_\epsilon := \{z \in Z: P_\mu(\{F_n\}, \varphi, z) \geq P_\mu(\{F_n\}, \varphi) - \epsilon\}$ 是一个

Borel 集且满足 $\mu(Z_\varepsilon) > 0$ 。进一步由定理 3 可得

$$P_Z(\{F_n\}, \varphi) \geq P_{Z_\varepsilon}(\{F_n\}, \varphi) \geq \inf_{z \in Z_\varepsilon} P_\mu(\{F_n\}, \varphi, z) \geq P_\mu(\{F_n\}, \varphi) - \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 可知 $P_Z(\{F_n\}, \varphi) \geq P_\mu(\{F_n\}, \varphi)$ 。另外 $P_\mu(\{F_n\}, \varphi) = \infty$ 的情形同理可证。

证毕

于是由定理 3 和推论 1, 定理 1 即可得证。

参考文献:

- [1] 王威, 曹洁. 任意空间上拓扑压[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2019, 36(6): 93-97.
WANG W, CAO J. The topological pressure on an arbitrary topological space[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2019, 36(6): 93-97.
- [2] KIEFFER J C. A generalized Shannon-McMillan theorem for the action of an amenable group on a probability space[J]. The Annals of Probability, 1975, 3(6): 1031-1037.
- [3] LINDENSTRAUSS E. Pointwise theorems for amenable groups[J]. Inventiones Mathematicae, 2001, 146(2): 259-295.
- [4] ORNSTEIN D, WEISS B. Entropy and isomorphisms for actions of amenable groups[J]. Journal D Analyse Mathématique, 1987, 48(1): 1-141.
- [5] HUANG W, YE X, ZHANG G. Local entropy theory for a countable discrete amenable group action[J]. Journal of Functional Analysis, 2011, 261(4): 1028-1082.
- [6] LIANG B, YAN K. Topological pressure for sub-additive potentials of amenable group actions[J]. Journal of Functional Analysis, 2012, 262(2): 584-601.
- [7] ZHOU X, ZHANG Y, CHEN E. Topological conditional entropy for amenable group actions[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2015, 143(1): 141-150.
- [8] ZHENG D, CHEN E, YANG J. On large deviations for amenable group actions[J]. Discrete & Continuous Dynamical Systems-Series A (DCDS-A), 2017, 36(12): 7191-7206.
- [9] ZHANG R. Topological pressure of generic points for amenable group actions[J]. Journal of Dynamics and Differential Equations 2018, 30(4): 1583-1606.
- [10] THOMPSON D. Irregular sets, the β -transformation and the almost specification property[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2012, 364: 5395-5414.
- [11] YIN Z, CHEN E. The conditional variational principle for maps with the pseudo-orbit tracing property[J]. Discrete Continuous and Discrete Dynamical Systems, 2019, 39(1): 463-481.
- [12] MESÓN A, VERICAT F. Weighted multifractal spectrum of V-Statistics[J/OL]. Journal of Dynamics and Differential Equations. (2020-11-20)[2021-08-14]. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10884-020-09915-7>.

Topological Pressure for Measurable Potentials of Amenable Group Actions

ZHAO Cao¹, JI Yong², WANG Wei³

(1. School of Mathematical Sciences, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou Jiangsu 215009;

2. Department of Mathematics, Ningbo University, Ningbo Zhejiang 315211;

3. School of Basic Teaching, Nantong Institute of Technology, Nantong Jiangsu 226002, China)

Abstract: [Purposes] To give the corresponding mass distribution principle under the action of amenable group. [Methods] The methods of topology, ergodic theory and geometric measure theory were used comprehensively. [Findings] For any measurable potential function, the definitions of topological pressure and measure meaning pressure are introduced, and the corresponding mass distribution principle is proved. [Conclusions] For the measurable potential function, there is a corresponding mass distribution principle.

Keywords: measurable potential; variational principle; Amenable group

(责任编辑 许 甲)