

基于 LS-SVM 的第二类 Fredholm 积分方程的数值解^{*}

曹秀梅, 吴自库

(青岛农业大学 理学与信息科学学院, 山东 青岛 266109)

摘要:【目的】提出一种基于最小二乘支持向量机求解第二类 Fredholm 积分方程的数值算法, 并利用该方法对第二类 Fredholm 积分方程进行数值求解。【方法】具体过程主要由 4 部分组成: 首先将积分区间等分得到训练点, 其次构造未知函数的近似解析式, 然后利用复化 Simpson 求积分公式将问题转化为二次规划问题, 最后求解回归参数。【结果】在给定参数条件下, 证明了解的唯一性; 通过数值算例验证了算法的有效性。【结论】提出的方法用于解第二类 Fredholm 积分方程是可行的。

关键词: 第二类 Fredholm 积分方程; 最小二乘支持向量机; 数值解; 数值积分

中图分类号: O241.83

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2021)06-0081-05

积分方程求解方法虽然名目繁多, 但是通常可以分为两类^[1-2]: 一类是对解析解作近似逼近, 如迭代法^[3]; 另一类是将问题转换为便于进行数值计算的其他类型问题, 如用数值积分方法将问题转化为线性方程组^[4]。第二类 Fredholm 积分方程在工程领域占有重要地位^[5], 一些问题都可以转化为第二类 Fredholm 积分方程。虽然在一定条件下可以证明第二类 Fredholm 积分方程解的存在性及唯一性, 但通常很难给出对应的解析解。因此数值方法对解第二类 Fredholm 积分方程非常重要, 常用的数值方法有配置法^[4]、投影法^[6]、Galerkin 方法^[7]、小波法^[8]、神经网络方法^[9-10]等。

最小二乘支持向量机^[11] (Least squares support vector machines, LS-SVM) 是基于统计学习理论的一种学习方法, 它在分类、预测及模式识别等问题中有着广泛的应用^[12-14]。作为一种软计算方法, 它已被成功地应用于解微分方程及反问题^[15-18], 且给出的是闭式解析解。然而将 LS-SVM 方法用于解积分方程研究成果很少, 尤其是关于第二类 Fredholm 积分方程。本文尝试将该方法用于解第二类 Fredholm 积分方程, 下面将给出求解机制。

1 基于 LS-SVM 的第二类 Fredholm 积分方程的数值解法

本文研究如下形式的第二类 Fredholm 积分方程:

$$f(x) = g(x) + \mu \int_a^c H(x, t) f(t) dt, \quad (1)$$

其中: $g(x)$ 和 $H(x, t)$ 为已知函数, $f(x)$ 为未知函数, μ 为参数, $[a, c]$ 为积分区间。积分方程(1)的数值解法通常要对定积分部分采用数值积分方法, 求对应的近似值。由于复化 Simpson 求积公式具有较高的数值精度, 因而这里采用复化 Simpson 求积公式。将区间 $[a, c]$ 偶等分: $n=2m$; 步长: $\tilde{h} = \frac{c-a}{n}$, $x_i = a + i\tilde{h}$, $i=0, 1, \dots, n$, 节点总数为 $N=n+1$ 。显然 $x_0=a, x_n=c$, 则 $\int_a^c u(x) dx$ 的复化 Simpson 求积公式为:

$$\int_a^c u(x) dx \approx h \left[u(a) + u(c) + 4 \sum_{i=1}^m u(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} u(x_{2i}) \right],$$

* 收稿日期: 2020-10-19 修回日期: 2021-06-15 网络出版时间: 2021-11-17 09:21

资助项目: 国家自然科学基金青年科学基金(No. 11701310); 中华农业科教基金教材建设研究项目(No. NKJ201803046)

第一作者简介: 曹秀梅, 女, 讲师, 研究方向为应用数学, E-mail: strawberry_cxm@126.com; 通信作者: 吴自库, 男, 教授, 博士, E-mail: zkwu1968@126.com

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20211116.1813.006.html>

其中 $h = \frac{1}{3} \tilde{h}$ 。由于 LS-SVM 具有良好的全局逼近能力^[17], 这里采用 LS-SVM 回归方法对未知函数 $f(x)$ 进行逼近。依据 LS-SVM 回归原理, 可令:

$$f(x) \approx s(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j K(x - x_j) + b, \quad (2)$$

这里 b 为偏差项, K 为核函数。本文取高斯核函数: $K(x - x_j) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - x_j}{\sigma}\right)^2\right)$, 其中 σ 为核宽度参数。

$\alpha^T = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 和 b 为需要估计的参数, 总计 $n+2$ 个。

利用复化 Simpson 求积公式有:

$$f(x) \approx g(x) + \rho \left[H(x, a)f(a) + H(x, c)f(c) + 4 \sum_{l=1}^m H(x, x_{2l-1})f(x_{2l-1}) + 2 \sum_{l=1}^{m-1} H(x, x_{2l})f(x_{2l}) \right], \quad (3)$$

这里 $\rho = h\mu$ 。将 $f(x)$ 的近似表达式(2)代入(3)式, 并在节点 x_i 处引入偏差项 e_i 有:

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j G(x_i - x_j) + F(x_i)b - g(x_i) + e_i = 0. \quad (4)$$

其中: $G(x_i - x_j) = K(x_i - x_j) - \rho(K_0(x_i - x_j) + K_1(x_i - x_j))$, $K_0(x_i - x_j) = H(x_i, a)K(a - x_j) + H(x_i, c) \cdot K(c - x_j)$, $K_1(x_i - x_j) = 4 \sum_{l=1}^m H(x_i, x_{2l-1})K(x_{2l-1} - x_j) + 2 \sum_{l=1}^{m-1} H(x_i, x_{2l})K(x_{2l} - x_j)$, $F(x_i) = 1 - \rho(H(x_i, a) + H(x_i, c) + 4 \sum_{l=1}^m H(x_i, x_{2l-1}) + 2 \sum_{l=1}^{m-1} H(x_i, x_{2l}))$ 。

定理 1 问题(4)的参数回归问题可以转化为如下线性方程组的解:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \lambda \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ U \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

其中: $m_{11} = I_N$ (N 阶单位矩阵), $m_{21} = (G(x_i - x_j))_{N \times N}$, $m_{13} = (0)_{N \times 1}$; $m_{12} = m_{21}^T$, $m_{22} = -\frac{1}{\gamma} I_N$, $m_{23} = (F(x_i))_{N \times 1}$; $m_{31} = (0)_{1 \times N}$, $m_{32} = (F(x_i))_{1 \times N}$, $m_{33} = (0)_{1 \times 1}$; $Y = (0)_{N \times 1}$, $U = (g(x_i))_{N \times 1}$; γ 为正则化因子; $\lambda^T = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 为拉格朗日乘子。

证明 依据 LS-SVM 原理^[11,15], 参数估计问题可以转换为如下二次规划问题求解:

$$\min_{\alpha, b, e} \frac{1}{2} \alpha^T \alpha + \frac{\gamma}{2} e^T e,$$

$$\text{s. t. } \sum_{j=0}^n \alpha_j G(x_i - x_j) + F(x_i)b - g(x_i) + e_i = 0. \quad (6)$$

这里 $e^T = (e_0, e_1, e_2, \dots, e_n)$, γ 为正则化因子。二次规划问题(6)可通过拉格朗日乘子法求解, 为此引入拉格朗日乘子 $\lambda^T = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 它的拉格朗日函数为:

$$L = \frac{1}{2} \alpha^T \alpha + \frac{\gamma}{2} e^T e + \sum_{i=0}^n \lambda_i \left\{ \sum_{j=0}^n \alpha_j G(x_i - x_j) + F(x_i)b - g(x_i) + e_i \right\}.$$

由 KKT(Karush-Kuhn-Tucker)最优性条件易得(5)式。系统(5)为 $2n+3$ 阶线性方程组, 它的解容易获得。

证毕

定理 2 如果 $F \neq 0$, 则方程组(5)有唯一解。

证明 令 $Q = m_{21}m_{12} + \frac{1}{\gamma}I_N$, 显然 Q 为对称矩阵。进一步有:

$$\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -Q & F \\ F^T & 0 \end{vmatrix} = (-1)^N \begin{vmatrix} Q & -F \\ F^T & 0 \end{vmatrix} = (-1)^N \begin{vmatrix} Q & -F \\ 0 & F^T Q^{-1} F \end{vmatrix} = (-1)^N |Q| \cdot |F^T Q^{-1} F| \neq 0,$$

即方程组的系数矩阵可逆, 因而线性方程组(5)有唯一解。

证毕

注 方程组(5)的解还依赖于正则化因子 γ 和核宽度参数 σ 。通常正则化因子 γ 取为一个非常大的常数,本文取 $\gamma=10^8$,则 σ 就是唯一可调节参数,而这也是本方法的优点,即可调节参数有且仅有一个。

2 数值算例

为了检测本文算法的有效性,这里给出 4 个数值算例。为了便于比较,4 个例子均取自参考文献。首先将积分区间 100 等分,即配置 101 个节点作为训练点;然后将积分区间 150 等分,即 151 个节点作为验证点。数值例子分别为:

例 1^[10] $f(x) = 2x + \int_0^1 (x+t)f(t)dt$, 精确解为 $f(x) = -12x - 8$;

例 2^[9] $f(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}\int_0^1 xtf(t)dt$, 精确解为 $f(x) = x$;

例 3^[9] $f(x) = \sin x + \int_0^1 (1 - x\cos(xt))f(t)dt$, 精确解为 $f(x) = 1$;

例 4^[19] $f(x) = x^2 - 2\int_0^1 (1 + xt)f(t)dt$, 精确解为 $f(x) = x^2 - \frac{5}{24}x - \frac{11}{72}$ 。

为检验算法的有效性,这里选用最大误差 V_{EM} 和均方根误差 V_{ER} ($V_{EM} = \max_{a \leq x \leq c} |f(x) - s(x)|$, $V_{ER} = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (f(t_i) - s(t_i))^2}$, 这里 $t_i \in [a, c]$ 为测试样本点, L 为样本点的个数) 为衡量指标。最终得到的数值结果见表 1, 数值解的误差曲线见图 1~4, 从图中可以看出提出的算法精度均已达到或超过了文献中的结果。为了检验算法的稳定性, 在已知函数 $g(x)$ 中加入 5% 的随机误差 (即 $\bar{g}(x) = g(x) + 0.1 \|g\| (\text{rand}(x) - 0.5)$, 这里 $\|\cdot\|$ 为最大范数, $\text{rand}(x)$ 为取值在 $(0, 1)$ 区间上的随机函数), 其他条件不变, 数值结果见表 2。从数值例子的结果来看, 本方法具有较高的数值精度和数值稳定性。此外, 本质上 LS-SVM 方法是一种正则化方法, 因而本方法数值稳定性较好。

表 1 数值结果

Tab. 1 Numerical results

	σ	V_{EM}	V_{ER}
例 1	1.225	3.561 8e-3	9.340 4e-4
例 2	0.505	3.421 8e-4	8.551 5e-5
例 3	0.365	8.616 9e-7	5.222 5e-7
例 4	0.525	3.205 0e-4	6.815 9e-5

表 2 $g(x)$ 中加入 5% 的随机误差的数值结果

Tab. 2 Numerical results of $g(x)$ with 5% random error

	σ	V_{EM}	V_{ER}
例 1	1.225	4.080 2e-2	2.853 0e-2
例 2	0.505	2.212 0e-2	5.733 1e-3
例 3	0.365	2.352 6e-2	5.274 4e-3
例 4	0.525	4.506 6e-3	2.528 6e-3

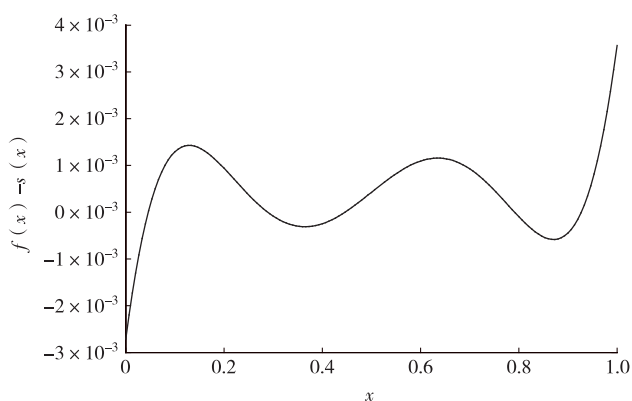


图 1 例 1 数值解的误差曲线

Fig. 1 Error curve of numerical solution in example 1

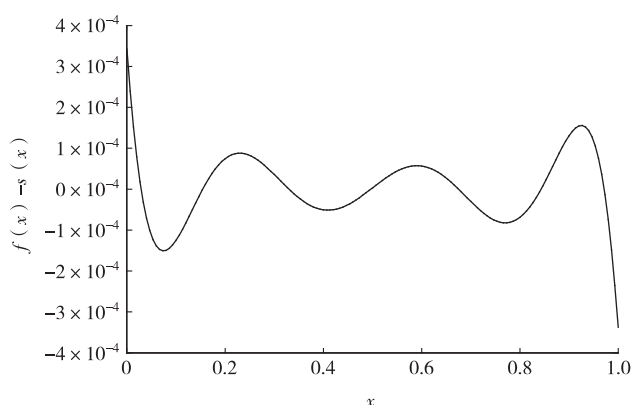


图 2 例 2 数值解的误差曲线

Fig. 2 Error curve of numerical solution in example 2

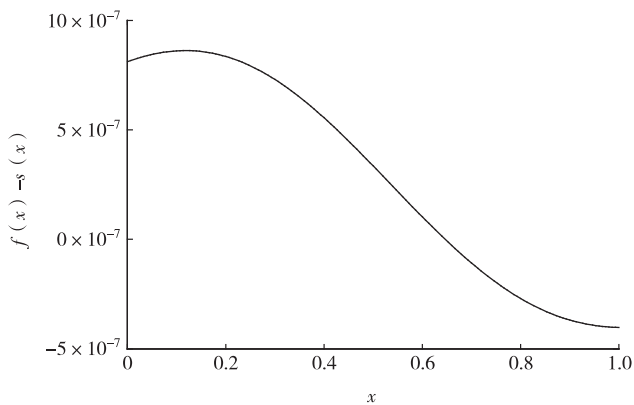


图 3 例 3 数值解的误差曲线

Fig. 3 Error curve of numerical solution in example 3

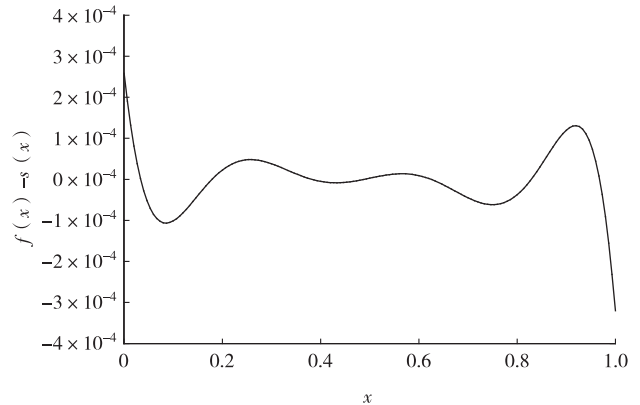


图 4 例 4 数值解的误差曲线

Fig. 4 Error curve of numerical solution in example 4

3 结论

本文利用 LS-SVM 方法对第二类 Fredholm 积分方程的数值解进行了初步研究,结果显示数值结果具有较高的精度和较好的数值稳定性,这主要归功于 LS-SVM 回归的全局逼近能力。此外,本方法只有一个可调节参数,实现简单,且得到的是闭式解析解。然而本方法没有考虑积分核函数的奇性及非线性积分方程,下一步应该关注这些工作。

参考文献:

- [1] 吕涛,黄晋. 积分方程的高精度算法[M]. 北京:科学出版社,2013.
LÜ T, HUANG J. High-precision algorithm for integral equations[M]. Beijing: Science Press, 2013.
- [2] 王玮明. 积分方程求解及其机械化[M]. 兰州:甘肃科学技术出版社,2008.
WANG W M. Solution of integral equations and its mechanization[M]. Lanzhou: Gansu Science and Technology Press, 2008.
- [3] CARDONE A, MESSINA E, RUSSO E. A fast iterative method for discretized Volterra-Fredholm integral equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2006, 189(1): 568-579.
- [4] NAIR M T, PEREVERZEV S V. Regularized collocation method for Fredholm integral equations of the first kind[J]. Journal of Complexity, 2006, 23(4): 454-467.
- [5] 郭钊,郭子涛,易玲艳. 多裂纹问题计算分析的本征 COD 边界积分方程方法[J]. 应用数学和力学, 2019, 40(2): 200-209.
GUO Z, GUO Z T, YI L Y. Analysis of multicrack problems with eigen COD boundary integral equations[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2019, 40(2): 200-209.
- [6] RABBANI M, MALEKNEJAD K, AGHAZADEH N. Computational projection methods for solving Fredholm integral equations [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 191: 140-143.
- [7] HAN G, WANG R. Richardson extrapolation of discrete Galerkin solution for two-dimensional Fredholm integral equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2002, 139: 49-63.
- [8] YOUSEFIA S, RAZZAGHIB M. Legendre wavelets method for the nonlinear Volterra-Fredholm integral equations[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2005, 70: 1-8.
- [9] 姜微,韩惠丽,李风军. 基于自适应小波神经网络第二类 Fredholm 积分方程数值解法[J]. 应用数学和力学, 2019, 40(12): 1399-1408.
JIANG W, HAN H L, LI F J. Numerical solution to the second kind of Fredholm integral equation based on the adaptive wavelet neural network[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2019, 40(12): 1399-1408.
- [10] 李娜,韩惠丽,房彦兵. 基于 Chebyshev 神经网络的非线性 Fredholm 积分方程数值解法[J]. 吉林大学学报(理学版), 2020, 58(2): 277-284.
LI N, HAN H L, FANG Y B. Numerical algorithm of nonlinear Fredholm integral equation based on Chebyshev neural network [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2020, 58(2): 277-284.

- [11] SUYKENS J A K, VANDERWALLE J. Least squares support vector machine classifiers[J]. Neural Processing Letters, 1999, 9(3):293-300.
- [12] 常春, 梅检民, 赵慧敏, 等. 基于局部切空间排列和最小二乘支持向量机的气缸压力识别[J]. 振动与冲击, 2020, 39(13):16-21.
CHANG C, MEI J M, ZHAO H M, et al. Recognition of cylinder pressure based on LTSA-LSSVM[J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(13):16-21.
- [13] 陶开鑫, 俞成丙, 侯颖骛, 等. 基于最小二乘支持向量机的棉针织物活性染料湿蒸染色预测模型[J]. 纺织学报, 2019, 40(7):169-173.
TAO K X, YU C B, HOU Q A, et al. Wet-steaming dyeing prediction model of cotton knitted fabric with reactive dye based on least squares support vector machine[J]. Journal of Textile Research, 2019, 40(7):169-173.
- [14] 高振斌. 基于最小二乘支持向量机微阵列基因特征分类[J]. 计算机应用与软件, 2019, 36(8):288-292.
GAO Z B. Microarray gene feature classification based on LS-SVM[J]. Computer Applications and Software, 2019, 36(8):288-292.
- [15] MEHRKANOON S, FALCK T, SUYKENS J A K. Approximate solution to ordinary differential equations using least squares support vector machines[J]. IEEE Trans Neural Networks Learn System, 2012, 23(9):1356-1367.
- [16] MEHRKANOON S, SUYKENS J A K. Learning solutions to partial differential equations using LS-SVM[J]. Neuro Computing, 2015, 159:105-116.
- [17] 吴自库, 李福乐, 郭道英. 一维热传导方程热源反问题基于最小二乘法的正则化方法[J]. 计算物理, 2016, 33(1):49-56.
WU Z K, LI F L, KWAK D Y. Least squares regularized method for one-dimensional source inverse heat conduction problem [J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2016, 33(1):49-56.
- [18] 阎啸天, 武穆清. 基于最小二乘支持向量机的自适应差分进化算法[J]. 系统仿真学报, 2009, 21(7):1921-1925.
YAN X T, WU M Q. Adaptive differential evolution algorithm based on least square SVM[J]. Journal of System Simulation, 2009, 21(7):1921-1925.
- [19] 陶霞, 张映辉. 第二类 Fredholm 积分方程的数值解法[J]. 湖南理工学院学报(自然科学版), 2019, 32(2):15-18.
TAO X, ZHANG Y H. Numerical methods for Fredholm integral equations of the second kind[J]. Journal of Hunan Institute of Science and Technology (Natural Sciences), 2019, 32(2):15-18.

Numerical Solutions to Fredholm Integral Equations of the Second Kind Using LS-SVM

CAO Xiumei, WU Ziku

(College of Science and Information, Qingdao Agricultural University, Qingdao Shandong 266109, China)

Abstract: [Purposes] An approach based on least squares support vector machines is proposed for numerical solution to Fredholm integral equations of the second kind, and employed it to solve this kind equations. [Methods] The method is divided into four steps: the first step is to allocate the training points through dividing evenly the integral interval; the second step is to construct the approximate analytic expression of the unknown function; the third step is to transform the problem into a quadratic programming problem by using complex Simpson integral formula; and the last step is to solve the regression parameters. [Findings] The uniqueness of the solution is proved under the condition of given parameters. The numerical results show that the proposed method is valid to solve Fredholm integral equations of the second kind. [Conclusions] The proposed method is feasible to solve Fredholm integral equations of the second kind.

Keywords: Fredholm integral equations of the second kind; least squares supports vector machines; numerical solution; numerical integration

(责任编辑 许 甲)