

具有 Wentzell 边界记忆阻尼的波动方程解的渐近行为^{*}

任 然, 范小明

(西南交通大学 数学学院, 成都 611756)

摘要:【目的】研究带 Wentzell 边界且在该边界上具有记忆阻尼的线性波动方程解的能量衰减性质。【方法】由原方程变形构造出抽象的发展方程,使用线性算子的强连续半群理论。【结果】证明了该波动方程平衡解的强稳定性和非零解能量的收敛性。【结论】该波动方程的平衡解具有强稳定性,且任意非零解的能量随时间单调递减并收敛到 0。

关键词:Wentzell 边界; 波动方程; 记忆阻尼; 线性算子半群; 强稳定性

中图分类号:O193

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2021)06-0086-05

本文研究带 Wentzell 边界记忆阻尼的线性波动方程解的渐近行为:

$$u_{tt} - \Delta u = 0, (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \quad (1)$$

$$u = 0, (x, t) \in \Gamma_0 \times (0, \infty), \quad (2)$$

$$u_{tt} - a \Delta_T u + \partial_\nu u - \int_0^\infty \mu(s) \Delta \eta'(s) ds = 0, (x, t) \in \Gamma_1 \times (0, \infty), \quad (3)$$

$$u(x, 0) = u_0, u_t(x, 0) = u_1, x \in \Omega. \quad (4)$$

其中: Ω 在 $\mathbf{R}^n$ 中有界且边界 $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, Γ_0 和 Γ_1 是 Γ 的非空不相交的闭集; ν 是在 $x \in \Gamma$ 处的单位外法线; $a \Delta_T u$ 是拉普拉斯算子在边界 Γ_1 上的正切; 由文献[1]知变量 η' 满足表达式: $\eta'(x, s) = u(x, t) - u(x, t-s)$, 计算可得变式 $\eta_s = -\eta_t + u_t$; $\mu \in C^1(\mathbf{R}^+) \cap L^1(\mathbf{R}^+)$ 是一个记忆核, 对 $s \in \mathbf{R}^+$ 有: 1) $\mu(s) \geq 0, \mu'(s) \leq 0$; 2) $\int_0^\infty \mu(s) ds = k_0 \geq 0$; 3) $\exists \delta > 0, \mu'(s) + \delta \mu(s) \leq 0$ 。

这一类方程多用于描述具有衰减记忆性质的粘性媒介中波动理论的研究。例如: 具有粘性液体的波动系统的理论, 具有记忆性能的电磁材料的电磁波理论。在方程的研究过程中, 众所周知, 方程(1)、(2)式在传统边界 $\Gamma_1: \partial_\nu u + u_t = 0$ 上指数一致稳定。然而 Wentzell 边界在不同条件下, 会出现不同的现象, 在之后的研究中, 李婵等人^[2]证得: 系统在具有摩擦阻尼的 Wentzell 边界条件 $\Gamma_1: u_{tt} - a \Delta_T u + \partial_\nu u + u_t = 0$ 上, 方程解具有强稳定性。在此研究结论的基础上, 张志飞等人^[3]证得: 方程在有摩擦阻尼项和记忆项的边界条件 $u_{tt} + \partial_\nu u - c^2 \Delta_T u + u_t + \int_0^t g(t-s) \Delta_T u(s) ds = 0$ 下, 方程解一致稳定且求出了解的能量衰减率。基于前人的研究成果和研究思路, 本文将方程(1)~(4)式构造抽象的发展方程, 利用算子的相关性质及半群理论, 证明原方程解的强稳定性。

1 预备知识

定义 Hilbert 空间: $H = \{(u, v, u|_{\Gamma_1}, v|_{\Gamma_1}, \eta') \in V \times L^2(\Omega) \times H^1(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_1)\}, V = \{u \in H^1(\Omega), u|_{\Gamma_0} = 0\}$, 定义空间内积和范数:

$$\|u\|_v = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \langle u, v \rangle_H = \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)},$$

$$\|(u, v, u|_{\Gamma_1}, v|_{\Gamma_1}, \eta')\|_H = \|u\|_v^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + a \|\nabla_T u|_{\Gamma_1}\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + \|v|_{\Gamma_1}\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + \|\eta'\|_{L^2(\Gamma_1)}^2.$$

现定义所需线性算子 A :

* 收稿日期: 2021-03-23 修回日期: 2021-11-01 网络出版时间: 2021-11-17 09:58

资助项目: 国家自然科学基金(No. 71873111); 重庆师范大学数学科学学院重点实验室项目

第一作者简介: 任然, 女, 研究方向为常微分方程及动力系统, E-mail: 478844606@qq.com; 通信作者: 范小明, 男, 教授, 博士, E-mail: fanxm@swjtu.edu.cn

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20211116.1650.002.html>

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} u \\ v \\ u|_{\Gamma_1} \\ v|_{\Gamma_1} \\ \eta^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \Delta u \\ v|_{\Gamma_1} \\ -\partial_v u + a\Delta_T u|_{\Gamma_1} + \int_0^\infty \mu(s)\Delta\eta^t(s)ds \\ v|_{\Gamma_1} \end{pmatrix}.$$

此时在矩阵中有:

$$\mathbf{X} \in D(\mathbf{A}) :=$$

$$\left\{ (u, v, u|_{\Gamma_1}, v|_{\Gamma_1}, \eta^t) \in H; v \in V, \Delta u \in L^2(\Omega), v|_{\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1), \partial_v u - a\Delta_T u|_{\Gamma_1} - \int_0^\infty \mu(s)\Delta\eta^t(s)ds \in L^2(\Gamma_1) \right\},$$

其中: $\mathbf{A}$ 是从 $D(\mathbf{A}) \rightarrow H$ 的线性算子, 令:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} u(\cdot, t) \\ v(\cdot, t) \\ u(\cdot, t)|_{\Gamma_1} \\ v(\cdot, t)|_{\Gamma_1} \\ \eta^t(\cdot, t) \end{pmatrix}, \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} u_0(\cdot) \\ u_1(\cdot) \\ u_0|_{\Gamma_1} \\ u_1|_{\Gamma_1} \\ u_1|_{\Gamma_1} \end{pmatrix}.$$

根据以上步骤和文献[2], 可将方程(1)~(4)式在空间 H 中构造抽象发展方程:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}(t), \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \end{cases}, \quad (5)$$

定义方程(5)式在初值条件 $\mathbf{X}_0$ 下所求得 mild 解的能量 $E(t) = E(t; \mathbf{X}_0)$ 表达式如下:

$$E(t; \mathbf{X}_0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t(t, x)|^2 + |\nabla u(t, x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |u_t(t, x)|^2 + a |\nabla_T u(t, x)|^2 d\gamma, \quad (6)$$

边界满足几何条件 (H_0) : 存在 $x_0 \in \mathbf{R}^n$, 使得在边界 Γ_0 上满足: $(x - x_0) \cdot \nu \leq 0$.

引理 1^[2] 设 $\varphi(x, y)$ 是 Hilbert 空间 H 上的一个共轭双线性泛函, 且满足: 1) $\exists M > 0$, 使得 $|\varphi(x, y)| \leq M \|x\| \|y\|$; 2) $\exists \delta > 0$ 使得 $|\varphi(x, y)| \geq \delta \|x\|^2$, 对 $\forall f \in H$ 存在唯一 $y_f \in H$, 使得对 $\forall x \in H, \varphi(x, y_f) = f(x)$.

引理 2^[4] 设 $\mathbf{A}$ 是定义在巴拿赫空间的线性子空间 $D(\mathbf{A})$ 上的线性算子, $\mathbf{A}$ 生成一个收缩半群, 当且仅当: 1) $D(\mathbf{A})$ 在 $\mathbf{X}$ 中是稠密的; 2) $\mathbf{A}$ 是封闭的; 3) $\mathbf{A}$ 是耗散的; 4) 对一些 $\lambda_0 > 0, \mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I}$ 是满射, 此时 $\mathbf{I}$ 是恒等式算子.

引理 3^[5] 设 $(T(t))_{t \geq 0}$ 是巴拿赫空间 $\mathbf{X}$ 上具有生成元 $\mathbf{A}$ 的有界强连续半群, 如果有: 1) $\sigma_p(\mathbf{A}) \cap i\mathbf{R} = \emptyset$; 2) $\sigma(\mathbf{A}) \cap i\mathbf{R}$ 是可数的, 则有 $(T(t))_{t \geq 0}$ 是强稳定的, 即: 对所有 $x \in \mathbf{X}$, 都有 $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)x = 0$.

2 强稳定性

本节利用算子的相关性质及半群理论, 证明了本文方程的强稳定性结论.

定理 1 抽象发展方程(5)式在集合 H 中满足适定性原则, 在条件 (H_0) 成立的情况下, 每个解的能量 $E(t)$ 关于时间 t 单调趋于 0.

证明 步骤 1, 现在证明 $\mathbf{A}$ 在集合 H 上生成一个 C_0 收缩半群.

步骤 1.1, 证明对 $\mathbf{X} = (u, v, u|_{\Gamma_1}, v|_{\Gamma_1}, \eta^t) \in D(\mathbf{A})$, 都有 $\operatorname{Re} \langle \mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle \leq 0$.

$$\operatorname{Re} \langle \mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle = \operatorname{Re} \left\langle \begin{pmatrix} v \\ \Delta u \\ v|_{\Gamma_1} \\ -\partial_v u + a\Delta_T u|_{\Gamma_1} + \int_0^\infty \mu(s)\Delta\eta^t(s)ds \\ v|_{\Gamma_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ u|_{\Gamma_1} \\ v|_{\Gamma_1} \\ \eta^t \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}\langle \nabla u, \nabla v \rangle + a \operatorname{Re}\langle \nabla_T u|_{\Gamma_1}, \nabla_T v|_{\Gamma_1} \rangle + \operatorname{Re}\langle \Delta u, v \rangle + \operatorname{Re}\langle \eta', v|_{\Gamma_1} \rangle + \\ & \operatorname{Re}\left\langle -\partial_v u + a \Delta_T u|_{\Gamma_1} + \int_0^\infty \mu(s) \Delta \eta'(s) ds, v|_{\Gamma_1} \right\rangle = \operatorname{Re}\left\langle \int_0^\infty \mu(s) \Delta \eta'(s) ds, v|_{\Gamma_1} \right\rangle. \end{aligned}$$

存在 $0 \leq g \leq t$, 对 $\int_0^\infty \mu(s) \Delta \eta'(s) ds$ 使用积分第一中值定理得到 $\Delta \eta'(g) \int_0^\infty \mu(s) ds$, 由记忆核基本性质 3) 推导出: $\Delta \eta'(g) \int_0^\infty \mu(s) ds = \Delta \eta'(g) k_0$. 由拉格朗日中值定理得, 在区间 $(0, g)$ 上存在 b , 使得: $\eta'_s(b) = \frac{\eta'(g) - \eta'(0)}{g - 0} = \frac{\eta'(g)}{a}$, 计算得到 $\eta'(g) = g \eta'_s(b)$.

经以上变形和 $v = u_t$ 可得:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle g k_0 \Delta \eta'_s(b), u_t \rangle &= g k_0 \operatorname{Re}\langle -\Delta \eta_t(b) + u_t, u_t \rangle = -g k_0 \operatorname{Re}\langle \Delta \eta_t(b), u_t \rangle + g k_0 \operatorname{Re}\langle \Delta u_t, u_t \rangle = \\ & -g k_0 \operatorname{Re}\langle (\Delta u_t(x, t) - \Delta u_t(x, t-b)), u_t \rangle - g k_0 \int_{\Gamma_1} |\nabla u_t|^2 dx = \\ & g k_0 \operatorname{Re}\langle \Delta u_t(x, t-b), u_t \rangle + g k_0 \int_{\Gamma_1} |\nabla u_t|^2 dx - g k_0 \int_{\Gamma_1} |\nabla u_t|^2 dx = \\ & g k_0 \operatorname{Re}\langle \Delta u_t(x, t-b), u_t(x, t) \rangle = -g k_0 \operatorname{Re} \int_{\Gamma_1} \nabla u_t(x, t-b) \cdot \nabla u_t(x, t) dx. \end{aligned}$$

由函数基本性质, 存在 k , 满足 $t-b \leq k \leq t$, 使得:

$$\int_{\Gamma_1} \nabla u_t(x, t-b) \cdot \nabla u_t(x, t) dx = \int_{\Gamma_1} \nabla u_t(x, k) \cdot \nabla u_t(x, k) dx$$

成立. 通过以上证得: $\operatorname{Re}\langle \mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle = -g k_0 \int_{\Gamma_1} |\nabla u_t(x, k)|^2 dx \leq 0$.

步骤 1.2, 证明 $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ 是满射. 即对于任意的 $(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5) \in H$, 都存在 $\mathbf{X} = (u, v, u|_{\Gamma_1}, v|_{\Gamma_1}, \eta') \in D(\mathbf{A})$, 满足:

$$\begin{pmatrix} u - v \\ v - \Delta u \\ u|_{\Gamma_1} - v|_{\Gamma_1} \\ v|_{\Gamma_1} + \partial_v u - a \Delta_T u|_{\Gamma_1} - \int_0^\infty \mu(s) \Delta \eta'(s) ds \\ \eta' - v|_{\Gamma_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{pmatrix},$$

由上式变形可得如下等价方程:

$$v = u - h_1, \quad (7)$$

$$(\mathbf{I} - \Delta)u = h_1 + h_2, \quad (8)$$

$$v|_{\Gamma_1} = u|_{\Gamma_1} - h_3, \quad (9)$$

$$u|_{\Gamma_1} + \partial_v u - a \Delta_T u|_{\Gamma_1} - \int_0^\infty \mu(s) \Delta \eta'(s) ds = h_3 + h_4, \quad (10)$$

$$\eta' - v|_{\Gamma_1} = h_5. \quad (11)$$

现在构造一个有界双线性函数 $a(u, \omega)$, 存在 $\alpha > 0$, 使该函数满足:

$$a(u, \omega) \geq \alpha (\|u\|_v^2 + \|\omega\|_{H^1(\Gamma_1)}^2), \quad \forall \omega \in V, \omega|_{\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1).$$

由 (7)~(11) 式, 对每个 $(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5) \in H$, 存在 $u \in V, u|_{\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1)$, 使得有界双线性函数 $a(u, \omega)$ 满足表达式: $a(u, \omega) = \int_\Omega (h_1 \bar{\omega} + h_2 \bar{\omega}) dx + \int_{\Gamma_1} (h_3 + h_4 + h_5) \bar{\omega} d\gamma$, 由引理 1 可得 (7)~(11) 式有解: $(u, u - h_1, u|_{\Gamma_1}, u|_{\Gamma_1} - h_3, u|_{\Gamma_1} + h_5 - h_3)$, 因此证得 $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ 是满射.

结合步骤 1.1、步骤 1.2 及引理 2 证得 $\mathbf{A}$ 在集合 H 上生成一个 C_0 收缩半群 $S(t)$. 由线性算子在半群上的强连续性理论可知 (5) 式在集合 H 中满足适定性原理, 且当 $\mathbf{X}_0 \in H$ 时, $\mathbf{X}(t) := S(t)\mathbf{X}_0$ 是抽象方程 (5) 式的唯一 mild 解; 当 $\mathbf{X}_0 \in D(\mathbf{A})$ 时, $\mathbf{X}(t) := S(t)\mathbf{X}_0$ 为该方程的经典解.

当 $\mathbf{X}_0 \in D(\mathbf{A})$, 由方程 (1)、(2) 式和能量方程 (6) 式求得: $\dot{E}(t; \mathbf{X}_0) = - \int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\gamma \leq 0$, 因此得到结论: 能量

$E(t)$ 衰减。

步骤 2, 证明 $E(t)$ 单调衰减到 0。由文献[6]中结论知, 如果 $(u, v, u|_{\Gamma_1}, v|_{\Gamma_1}, \eta') \in D(\mathbf{A})$, 则有 $u \in H^2(\Omega)$, $u|_{\Gamma_1} \in H^2(\Gamma_1)$ 。现有一族紧嵌入 $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$, $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, $H^2(\Gamma_1) \hookrightarrow H^1(\Gamma_1)$, $H^1(\Gamma_1) \hookrightarrow L^2(\Gamma_1)$, 由迹表示定理可以推导出 $D(\mathbf{A})$ 作为 $H^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_1) \times H^1(\Gamma_1) \times H^1(\Gamma_1)$ 集合的子集同样也紧嵌入在集合 H 里。因为 $\mathbf{A}_1 := \mathbf{I} - \mathbf{A}: D(\mathbf{A}) \rightarrow H$ 是满射, $\mathbf{A}_1^{-1}: H \rightarrow H$ 是一个紧算子。得到: $\sigma(\mathbf{A}_1^{-1}) \setminus \{0\} = \sigma_P(\mathbf{A}_1^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma_P(\mathbf{A}_1) \right\}$, 由此得到有: $\sigma(\mathbf{A}) = \sigma_P(\mathbf{A})$ 。现证 $\sigma(\mathbf{A}) \cap i\mathbf{R} = \emptyset$, 令: $(i\sigma - \mathbf{A})\mathbf{X} = 0, \mathbf{X} \in D(\mathbf{A}), \sigma \in \mathbf{R}$, 此时只需证明 $\mathbf{X} = 0$ 。

$$(i\sigma - \mathbf{A}) \begin{pmatrix} u \\ v \\ u|_{\Gamma_1} \\ v|_{\Gamma_1} \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma u - v \\ i\sigma v - \Delta u \\ i\sigma u|_{\Gamma_1} - v|_{\Gamma_1} \\ i\sigma v|_{\Gamma_1} + \partial_v u - a\Delta_T u - \int_0^\infty \mu(s)\Delta\eta'(s)ds \\ i\sigma\eta' - v|_{\Gamma_1} \end{pmatrix} = 0,$$

上式变形得到:

$$-\sigma^2 u - \Delta u = 0, \quad (12)$$

$$-\sigma^2 u|_{\Gamma_1} + \partial_v u - a\Delta_T u - \int_0^\infty \mu(s)\Delta\eta'(s)ds = 0. \quad (13)$$

现用(12)式和 u 做内积, 结合(13)式以及格林公式得到表达式:

$$-\sigma^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \sigma^2 \|u\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + a \|\nabla_T u\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_{\Gamma_1} \int_0^\infty \mu(s)\Delta\eta'(s)ds \cdot u dx = 0. \quad (14)$$

类似地, 对 $\int_{\Gamma_1} \int_0^\infty \mu(s)\Delta\eta'(s)ds \cdot u dx = 0$ 进行同样的推导计算, (14)式可表示成:

$$-\sigma^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \sigma^2 \|u\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + a \|\nabla_T u\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + k_0 \|\nabla u(x, t-k)\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 = 0. \quad (15)$$

当 $\sigma=0$ 时, 由函数基本性质: $u(x, t) = u(x, t-k)$ 对任意的 x 都成立, 从(15)式推导出结论 $u=0$ 。

下证 $\sigma \neq 0$ 时的情况, 用 $i\sigma u|_{\Gamma_1} - v|_{\Gamma_1} = 0$ 和 u 做内积, 得到所需结论 $u|_{\Gamma_1} = 0$, 同时得到结论 $v = i\sigma u|_{\Gamma_1} = 0$, 此时(15)式变形为:

$$-\sigma^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0, \quad (16)$$

因为 $u|_{\Gamma_1} = 0, u|_{\Gamma_0} = 0$, 得 $u|_{\Gamma} = 0$, 且由(13)式可得 $\partial_v u = 0$ 在 Γ_1 边界上成立。

(16)式不能直接说明 $u=0$ 在全局 Ω 中也同样成立。则现在定义 $u = \text{Re } u + i \text{Im } u$, 此时 $\text{Re } u, \text{Im } u$ 分别对应 u 的实部和虚部, 且实部和虚部分别满足表达式: $\frac{n-1}{2} \text{Re } u + (x-x_0) \cdot \nabla \text{Re } u, \frac{n-1}{2} \text{Im } u + (x-x_0) \cdot \nabla \text{Im } u$ 。

为了方便计算, 定义 $m = \text{Re } u$, 则 $\nabla m = \partial_v m v + \nabla_T m$, 现用(12)式和上式做内积得:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \left(\frac{n-1}{2} m + (x-x_0) \cdot \nabla m \right) (-\sigma^2 m - \Delta m) dx = \\ &= -\frac{n-1}{2} \sigma^2 \int_{\Omega} m^2 dx - \int_{\Omega} \sigma^2 (x-x_0) \cdot \nabla m m dx - \frac{n-1}{2} \int_{\Omega} m \Delta m dx - \int_{\Omega} (x-x_0) \cdot \nabla m \Delta m dx = \\ &= -\frac{n-1}{2} \sigma^2 \int_{\Omega} m^2 dx - \int_{\Gamma} \sigma^2 (x-x_0) \cdot v \frac{m^2}{2} d\gamma + \frac{n}{2} \sigma^2 \int_{\Omega} m^2 dx - \frac{n-1}{2} \int_{\Gamma} m \partial_v m d\gamma + \\ &= \frac{n-1}{2} \int_{\Omega} |\nabla m|^2 dx - \int_{\Gamma} (x-x_0) \cdot \nabla m \partial_v m d\gamma + \int_{\Omega} |\nabla m|^2 dx - \frac{n}{2} \int_{\Omega} |\nabla m|^2 dx + \int_{\Gamma} (x-x_0) \cdot v \frac{|\nabla m|^2}{2} d\gamma = \\ &= \frac{\sigma^2}{2} \int_{\Omega} m^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla m|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} (x-x_0) \cdot v (\partial_v m)^2 d\gamma, \end{aligned}$$

计算虚部时可得同样的结果, 在给出的边界条件(H_0)下, 得到 $u=0$, 所以 $v = i\sigma u = 0$ 。

又因为有 $u|_{\Gamma_1} = 0, v|_{\Gamma_1} = 0$, 综上, $\mathbf{X} = 0$ 得证, 同时得出结论: $i\mathbf{R} \cap \sigma(\mathbf{A}) = \emptyset$ 。

因为 $S(t)$ 在 Hilbert 空间中是一个有界强连续半群, 由引理 3 得到:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t)\mathbf{X} = 0, \forall \mathbf{X} \in H, \quad (17)$$

既然能量表达式为 $E(t) = E(t; \mathbf{X}(0)) = \frac{1}{2} \|\mathbf{X}(t)\|^2$, 那么由(17)式推出: $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0$ 。

从而有结论: 方程组任意非零解的能量 $E(t)$ 随时间 t 单调收敛到 0。

证毕

参考文献:

- [1] MA Q Z, ZHONG C K. Existence of strong global attractors for hyperbolic equation with linear memory[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 157(3): 745-758.
- [2] LI C, XIAO T J. Asymptotics for wave equations with Wentzell boundary conditions and boundary damping[J]. Semigroup Forum, 2017, 94(3): 520-531.
- [3] ZHANG Z F, GUO D D. Uniform stabilization of semilinear wave equations with localized internal damping and dynamic Wentzell boundary conditions with a memory term[J]. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 2019, 70(12): 160-166.
- [4] 李延保, 秦国强, 王在华. 有界线性算子半群应用基础[M]. 沈阳: 辽宁科技社, 1992.
LI Y B, GUO Q Q, WANG Z H. The application foundation of bounded linear operators semigroups[M]. Shenyang, Liaoning Science and Technology Press, 1992.
- [5] CAVALCANTI M M, CAVALCANTI V N D, TOUNDYKOV D, et al. Stabilization of the damped wave equation with Cauchy-Ventcel boundary condition[J]. Journal of Evolution Equations, 2009, 9(2): 143-169.
- [6] ENGEL K J, NAGEL R. One-parameter semigroups for linear evolution equations[M]. New York: Springer-Verlag New York Inc, 2000.

Asymptotic Behavior of Solutions of Wave Equations with Wentzell Boundary Memory Damping

REN Ran, FAN Xiaoming

(Department of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)

Abstract: [Purposes] The purpose is to investigate the energy decay of the solutions of linear wave equations with Wentzell boundary which has memory damping. [Methods] The abstract evolution equation is constructed from the original equation, and uses the theory of strong continuous semigroup of linear operators. [Findings] The strong stability of the equilibrium solution of the wave equation and the convergence of the energy of the non-zero solution are proved. [Conclusions] The equilibrium solution of the wave equation is strongly stable, and the energy of any nonzero solution of the wave equation monotonically converges to zero as the time goes to infinity.

Keywords: Wentzell boundary; wave equation; memory damping; semigroup of linear operators; strong stability

(责任编辑 黄 颖)