2021 年 11 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Nov. 2021
第 38 卷 第 6 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 38 No. 6

DOI:10.11721/cqnuj20210611

四元数矩阵方程 $\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{B}$ 的特殊最小二乘解*

岳树芳,李 莹,赵建立,王 栋
(聊城大学 数学科学学院,山东 聊城 252000)

摘要:【目的】研究四元数矩阵方程 $\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{B}$ 的最小二乘问题。【方法】提出四元数矩阵的一种新的实向量表示方法,结合矩阵的半张量积将四元数矩阵方程转换为相应实矩阵方程。【结果】给出该方程的最小二乘 Hermitian(反 Hermitian)三对角解,并得到有解的充要条件。【结论】通过数值算法与算例验证了该方法和结果的有效性。

关键词:四元数矩阵方程;矩阵的半张量积;Hermitian 三对角矩阵;反 Hermitian 三对角矩阵
中图分类号:O241.6 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2021)06-0091-06

文中采用以下符号:$\mathbf{R}$ 和 Q 分别表示实数域和四元数除环;$\mathbf{R}^{m\times n}$ 和 $Q^{m\times n}$ 分别表示全体 $m\times n$ 阶实矩阵集合和四元数矩阵集合;$Q_3^{m\times n}$,$Q_{\mathrm{H}}^{n\times n}$ 和 $Q_{\mathrm{AH}}^{n\times n}$ 分别表示 $m\times n$ 阶四元数三对角矩阵集合、$n\times n$ 阶四元数 Hermitian 三对角矩阵集合和四元数反 Hermitian 三对角矩阵集合;$\mathbf{R}^m$,$\mathbf{R}_m$ 分别表示全体 m 维实列向量集合、实行向量集合;Q^n,Q_n 分别表示全体 n 维四元数列向量集合和行向量集合;$\boldsymbol{\delta}_n^k$ 表示单位矩阵$\boldsymbol{I}_n$ 的第 k 列;$\mathbf{0}_k$ 表示元素都为 0 的 k 维列向量;$\mathbf{0}_{m\times n}$表示 $m\times n$ 阶零矩阵;对任意矩阵 $\boldsymbol{A}\in Q^{m\times n}$,$\boldsymbol{A}^{\dagger}$,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的 M-P 逆矩阵、转置矩阵和共轭转置矩阵;$\mathrm{Col}_i(\boldsymbol{A})$和$\mathrm{Row}_i(\boldsymbol{A})$分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列和第 i 行;$\|\cdot\|$表示矩阵的 Frobenius 范数或向量的 Euclid 范数;$\ltimes$和$\otimes$分别表示矩阵的半张量积和张量积。

四元数和四元数矩阵[1]在场论[2-3]、量子物理学[4]、彩色图像处理[5]、信号处理[6-7]和控制理论等众多领域中有着广泛的应用。随着这些学科的快速发展,四元数和四元数矩阵的理论性质和计算问题成为数学中重要的研究内容。

本文研究了四元数矩阵方程:

$$\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{B} \tag{1}$$

的最小二乘问题,其中:$\boldsymbol{A}\in Q^{m\times n}$,$\boldsymbol{X}\in Q^{n\times n}$,$\boldsymbol{B}\in Q^{m\times m}$。这种具有对称模式的矩阵方程出现在统计、振动理论等一些应用领域,众多学者对它进行了研究[8-15]。其中,Dai 等人[10]利用矩阵的奇异值分解研究了(1)式在实数域上的数值对称解;Jürgen 等人[11]导出了(1)式的非负定最小秩解。Wei 等人[13]研究了(1)式的秩约束最小二乘 Hermitian 非负定解;Zheng 等人[14]使用 SVD 两次导出了(1)式的秩约束 Hermitian 非负定解。本文将研究(1)式的极小范数最小二乘 Hermitian 三对角解和反 Hermitian 三对角解,具体问题如下。

问题 1 设 $\boldsymbol{A}\in Q^{m\times n}$,$\boldsymbol{B}\in Q^{m\times m}$,并记 $Q_L=\{\boldsymbol{X}\in Q_{\mathrm{H}}^{n\times n},\|\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{H}}-\boldsymbol{B}\|=\min\}$,求 Q_L 表达式并找到 $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{H}}\in Q_L$ 使 $\|\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{H}}\|=\min\limits_{X\in Q_L}\|\boldsymbol{X}\|$。

问题 2 设 $\boldsymbol{A}\in Q^{m\times n}$,$\boldsymbol{B}\in Q^{m\times m}$,并记 $A_L=\{\boldsymbol{X}\in Q_{\mathrm{AH}}^{n\times n},\|\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{H}}-\boldsymbol{B}\|=\min\}$,求 A_L 表达式并找到 $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{A}}\in A_L$ 使 $\|\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{A}}\|=\min\limits_{X\in A_L}\|\boldsymbol{X}\|$。

1 预备知识

本节将介绍本文相关的四元数知识与矩阵半张量积知识。

定义 1[16] 四元数 $q\in Q$ 可表示为 $q=q_1+q_2\mathrm{i}+q_3\mathrm{j}+q_4\mathrm{k}$,$q_1,q_2,q_3,q_4\in\mathbf{R}$,其中 3 个虚部单位 i,j,k 满足

* **收稿日期**:2021-03-23 **修回日期**:2021-06-30 **网络出版时间**:2021-11-17 11:25
资助项目:国家自然科学基金(No. 11801249);山东省自然科学基金(No. ZR2020MA053)
第一作者简介:岳树芳,女,研究方向为线性系统理论,E-mail:805909810@qq.com;**通信作者**:李莹,女,教授,E-mail:liyingld@163.com
网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20211116.1934.014.html

$\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=\mathrm{ijk}=-1,\mathrm{ij}=\mathrm{k},\mathrm{jk}=\mathrm{i},\mathrm{ki}=\mathrm{j}$。由此可见四元数乘法不满足交换律。

定义 2[17]　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times n},\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{p\times q},t=\mathrm{lcm}(n,p)$是 n 和 p 的最小公倍数,那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的半张量积定义为 $\boldsymbol{A}\ltimes\boldsymbol{B}:=(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{I}_{t/n})(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_{t/p})$。

当 $n=p$ 时矩阵的半张量积就变成了普通矩阵乘法。因此,矩阵半张量积彻底打破了维数限制,是经典矩阵乘法的一个推广。矩阵半张量积满足如下性质。

性质 1[17]　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是具有适当维数的实矩阵,$a,b\in\mathbf{R}$,则:

1) $\boldsymbol{A}\ltimes(a\boldsymbol{B}\pm b\boldsymbol{C})=a\boldsymbol{A}\ltimes\boldsymbol{B}\pm b\boldsymbol{A}\ltimes\boldsymbol{C},(a\boldsymbol{A}\pm b\boldsymbol{B})\ltimes\boldsymbol{C}=a\boldsymbol{A}\ltimes\boldsymbol{C}\pm b\boldsymbol{B}\ltimes\boldsymbol{C}$。

2) $(\boldsymbol{A}\ltimes\boldsymbol{B})\ltimes\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\ltimes(\boldsymbol{B}\ltimes\boldsymbol{C})$。

作为经典矩阵乘法的推广,矩阵的半张量积不能实现一般的可交换性,但在矩阵与向量之间具有伪交换性,向量与向量之间可通过换位矩阵实现换位。

性质 2[18]　设 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^t,\boldsymbol{Y}\in\mathbf{R}_t$,对于任意的实矩阵 $\boldsymbol{A}$,有:$\boldsymbol{X}\ltimes\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{I}_t\otimes\boldsymbol{A})\ltimes\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}\ltimes\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}\ltimes(\boldsymbol{I}_t\otimes\boldsymbol{A})$。

性质 3[18]　设 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^m,\boldsymbol{Y}\in\mathbf{R}_m$,有 $\boldsymbol{W}_{[m,n]}\ltimes\boldsymbol{X}\ltimes\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}\ltimes\boldsymbol{X}$,式中:$\boldsymbol{W}_{[m,n]}=[\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{\delta}_m^1,\ \boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{\delta}_m^2,\cdots,\ \boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{\delta}_m^m]\in\mathbf{R}^{mn\times mn}$为换位矩阵。

定义 3[18]　设$\boldsymbol{W}_i(i=0,1,2,\cdots,n)$为一向量空间,映射 $T:\prod\limits_{i=1}^n\boldsymbol{W}_i\to\boldsymbol{W}_0$ 称为多线性映射,如果 $\dim(\boldsymbol{W}_i)=k_i$,$i=0,1,\cdots,n$,并且$\boldsymbol{W}_i$ 的基底为$\{\boldsymbol{\delta}_{k_i}^1,\boldsymbol{\delta}_{k_i}^2,\cdots,\boldsymbol{\delta}_{k_i}^{k_i}\}$,记:$T(\boldsymbol{\delta}_{k_1}^{j_1},\boldsymbol{\delta}_{k_2}^{j_2},\cdots,\boldsymbol{\delta}_{k_n}^{j_n})=\sum\limits_{s=1}^{k_0}c_s^{j_1,j_2,\cdots,j_n}\boldsymbol{\delta}_{k_0}^s$,$j_t=1,\cdots,k_t$,$t=1,\cdots,n$。那么$\{c_s^{j_1,j_2,\cdots,j_n}\mid j_t=1,\cdots,k_t,\ t=1,\cdots,n;\ s=1,\cdots,k_0\}$称为 T 的结构常数,将结构常数排列成如下矩阵:

$$\boldsymbol{M}_T=\begin{bmatrix}c_1^{11\cdots1}&\cdots&c_1^{11\cdots k_n}&\cdots&c_1^{k_1k_2\cdots k_n}\\c_2^{11\cdots1}&\cdots&c_2^{11\cdots k_n}&\cdots&c_2^{k_1k_2\cdots k_n}\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\c_{k_0}^{11\cdots1}&\cdots&c_{k_0}^{11\cdots k_n}&\cdots&c_{k_0}^{k_1k_2\cdots k_n}\end{bmatrix},$$

称之为 T 的结构矩阵。

下述定理是经典矩阵理论中求解实线性方程组问题的已有结论。

定理 1[19]　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times n},\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^m$,线性矩阵方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘解可以表示为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A})\boldsymbol{y},\forall\,\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$,极小范数最小二乘解是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{b}$。

定理 2[19]　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times n},\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^m$,矩阵方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的充要条件是 $\boldsymbol{AA}^\dagger\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$,当矩阵方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解时,通解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A})\boldsymbol{y},\forall\,\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$。

2 四元数矩阵的实向量表示

本节提出四元数矩阵的一种新实向量表示形式,用上标的“→”对它进行标记,并研究相应性质。

定义 4　1) 设 $q=q_1+q_2\mathrm{i}+q_3\mathrm{j}+q_4\mathrm{k}\in Q$,它的实向量表示 $\vec{q}$ 为:$\vec{q}=[q_1,q_2,q_3,q_4]^{\mathrm{T}}$。

2) 设 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}\in Q^n,\boldsymbol{y}=[y_1,y_2,\cdots,y_n]\in Q_n$,则实向量表示 $\vec{\boldsymbol{x}}$,$\vec{\boldsymbol{y}}$定义为:$\vec{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\vec{x_1}\\\vec{x_2}\\\vdots\\\vec{x_n}\end{bmatrix}$,$\vec{\boldsymbol{y}}=\begin{bmatrix}\vec{y_1}\\\vec{y_2}\\\vdots\\\vec{y_n}\end{bmatrix}$。

3) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in Q^{m\times n}$,四元数矩阵的行实向量表示$\vec{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{r}}$ 和列实向量表示$\vec{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{c}}$ 定义如下:

$$\vec{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{r}}=\begin{bmatrix}\overrightarrow{\mathrm{Row}_1(\boldsymbol{A})}\\\overrightarrow{\mathrm{Row}_2(\boldsymbol{A})}\\\vdots\\\overrightarrow{\mathrm{Row}_m(\boldsymbol{A})}\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{4mn},\vec{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{c}}=\begin{bmatrix}\overrightarrow{\mathrm{Col}_1(\boldsymbol{A})}\\\overrightarrow{\mathrm{Col}_2(\boldsymbol{A})}\\\vdots\\\overrightarrow{\mathrm{Col}_n(\boldsymbol{A})}\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{4mn}。$$

两个四元数的乘积可以转化为它们实向量表示的半张量积。

定理 3　设 $x,y\in Q$,则:

$$\overrightarrow{xy}=\boldsymbol{M}_Q\propto\overrightarrow{x}\propto\overrightarrow{y},\tag{2}$$

式中:$\boldsymbol{M}_Q=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&-1\\0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&1&0&0&-1&0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}$。

下面给出四元数矩阵的实向量表示的性质并证明。

性质 4　设 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\in Q_n$, $\boldsymbol{z}=[z_1,z_2,\cdots,z_n]\in Q_n$, $\boldsymbol{y}=[y_1,y_2,\cdots,y_n]^{\mathrm{T}}\in Q^n$,$\lambda\in\mathbf{R}$,则:1) $\overrightarrow{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}}=\overrightarrow{\boldsymbol{x}}+\overrightarrow{\boldsymbol{z}}$;2) $\overrightarrow{\lambda\boldsymbol{x}}=\lambda\overrightarrow{\boldsymbol{x}}$;3) $\overrightarrow{\boldsymbol{xy}}=\boldsymbol{F}\propto\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\propto\overrightarrow{\boldsymbol{y}}$,式中:$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{M}_Q\propto[\boldsymbol{I}_4\otimes(\boldsymbol{\delta}_n^1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{I}_4\otimes(\boldsymbol{\delta}_n^2)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{I}_4\otimes(\boldsymbol{\delta}_n^n)^{\mathrm{T}}]\in\mathbf{R}^{4\times16n^2}$。

证明　根据定义 4,可得 1)和 2)。下面仅证明 3),利用 1)和(2)式,有:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{xy}}=\overrightarrow{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n}=\overrightarrow{x_1y_1}+\overrightarrow{x_2y_2}+\cdots+\overrightarrow{x_ny_n}=\boldsymbol{M}_Q\propto\left[\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{x_i}\propto\overrightarrow{y_i}\right]=$$

$$\boldsymbol{M}_Q\propto\left[\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{\delta}_n^i)^{\mathrm{T}}\propto\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\propto(\boldsymbol{\delta}_n^i)^{\mathrm{T}}\propto\overrightarrow{\boldsymbol{y}}\right]=\boldsymbol{M}_Q\propto\left[\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{\delta}_n^i)^{\mathrm{T}}\propto(\boldsymbol{I}_{4n}\otimes(\boldsymbol{\delta}_n^i)^{\mathrm{T}})\right]\propto\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\propto\overrightarrow{\boldsymbol{y}}=$$

$$\boldsymbol{M}_Q\propto[\boldsymbol{I}_4\otimes(\boldsymbol{\delta}_n^1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{I}_4\otimes(\boldsymbol{\delta}_n^2)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{I}_4\otimes(\boldsymbol{\delta}_n^n)^{\mathrm{T}}]\propto\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\propto\overrightarrow{\boldsymbol{y}}。$$

证毕

性质 5　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}\in Q^{m\times n}$,$\boldsymbol{B}\in Q^{n\times p}$, $\lambda\in\mathbf{R}$,则:1) $\|\boldsymbol{A}\|=\|\overrightarrow{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{c}}\|=\|\overrightarrow{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{r}}\|$;2) $\overrightarrow{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C})}_{\mathrm{r}}=\overrightarrow{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{r}}+\overrightarrow{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{r}}$, $\overrightarrow{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C})}_{\mathrm{c}}=\overrightarrow{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{c}}+\overrightarrow{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{c}}$;3) $\overrightarrow{\lambda\boldsymbol{A}}_{\mathrm{r}}=\lambda\overrightarrow{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{r}}$, $\overrightarrow{\lambda\boldsymbol{A}}_{\mathrm{c}}=\lambda\overrightarrow{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{c}}$;4) $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}_{\mathrm{r}}=\boldsymbol{M}\propto\overrightarrow{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{r}}\propto\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{c}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}_{\mathrm{c}}=\boldsymbol{M}'\propto\overrightarrow{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{r}}\propto\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{c}}$,其中:

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}\propto(\boldsymbol{\delta}_m^1)^{\mathrm{T}}\propto[\boldsymbol{I}_{4mn}\otimes(\boldsymbol{\delta}_p^1)^{\mathrm{T}}]\\\vdots\\\boldsymbol{F}\propto(\boldsymbol{\delta}_m^1)^{\mathrm{T}}\propto[\boldsymbol{I}_{4mn}\otimes(\boldsymbol{\delta}_p^p)^{\mathrm{T}}]\\\vdots\\\boldsymbol{F}\propto(\boldsymbol{\delta}_m^m)^{\mathrm{T}}\propto[\boldsymbol{I}_{4mn}\otimes(\boldsymbol{\delta}_p^1)^{\mathrm{T}}]\\\vdots\\\boldsymbol{F}\propto(\boldsymbol{\delta}_m^m)^{\mathrm{T}}\propto[\boldsymbol{I}_{4mn}\otimes(\boldsymbol{\delta}_p^p)^{\mathrm{T}}]\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{4mp\times16mn^2p},\boldsymbol{M}'=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}\propto(\boldsymbol{\delta}_m^1)^{\mathrm{T}}\propto[\boldsymbol{I}_{4mn}\otimes(\boldsymbol{\delta}_p^1)^{\mathrm{T}}]\\\vdots\\\boldsymbol{F}\propto(\boldsymbol{\delta}_m^m)^{\mathrm{T}}\propto[\boldsymbol{I}_{4mn}\otimes(\boldsymbol{\delta}_p^1)^{\mathrm{T}}]\\\vdots\\\boldsymbol{F}\propto(\boldsymbol{\delta}_m^1)^{\mathrm{T}}\propto[\boldsymbol{I}_{4mn}\otimes(\boldsymbol{\delta}_p^p)^{\mathrm{T}}]\\\vdots\\\boldsymbol{F}\propto(\boldsymbol{\delta}_m^m)^{\mathrm{T}}\propto[\boldsymbol{I}_{4mn}\otimes(\boldsymbol{\delta}_p^p)^{\mathrm{T}}]\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{4mp\times16mn^2p}。$$

证明　1)、2)、3)显然可得,仅证 4)。

令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\mathrm{Row}_1(\boldsymbol{A})\\\vdots\\\mathrm{Row}_m(\boldsymbol{A})\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=[\mathrm{Col}_1(\boldsymbol{B})\quad\cdots\quad\mathrm{Col}_p(\boldsymbol{B})]$,则 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}\mathrm{Row}_1(\boldsymbol{A})\mathrm{Col}_1(\boldsymbol{B})&\cdots&\mathrm{Row}_1(\boldsymbol{A})\mathrm{Col}_p(\boldsymbol{B})\\\vdots&&\vdots\\\mathrm{Row}_m(\boldsymbol{A})\mathrm{Col}_1(\boldsymbol{B})&\cdots&\mathrm{Row}_m(\boldsymbol{A})\mathrm{Col}_p(\boldsymbol{B})\end{bmatrix}$。

根据性质 5,有:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}_{\mathrm{r}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}\propto\overrightarrow{\mathrm{Row}_1(\boldsymbol{A})}\propto\overrightarrow{\mathrm{Col}_1(\boldsymbol{B})}\\\vdots\\\boldsymbol{F}\propto\overrightarrow{\mathrm{Row}_1(\boldsymbol{A})}\propto\overrightarrow{\mathrm{Col}_p(\boldsymbol{B})}\\\vdots\\\boldsymbol{F}\propto\overrightarrow{\mathrm{Row}_m(\boldsymbol{A})}\propto\overrightarrow{\mathrm{Col}_1(\boldsymbol{B})}\\\vdots\\\boldsymbol{F}\propto\overrightarrow{\mathrm{Row}_m(\boldsymbol{A})}\propto\overrightarrow{\mathrm{Col}_p(\boldsymbol{B})}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}\propto(\boldsymbol{\delta}_m^1)^{\mathrm{T}}\propto\overrightarrow{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{r}}\propto(\boldsymbol{\delta}_p^1)^{\mathrm{T}}\propto\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{c}}\\\vdots\\\boldsymbol{F}\propto(\boldsymbol{\delta}_m^1)^{\mathrm{T}}\propto\overrightarrow{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{r}}\propto(\boldsymbol{\delta}_p^p)^{\mathrm{T}}\propto\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{c}}\\\vdots\\\boldsymbol{F}\propto(\boldsymbol{\delta}_m^m)^{\mathrm{T}}\propto\overrightarrow{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{r}}\propto(\boldsymbol{\delta}_p^1)^{\mathrm{T}}\propto\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{c}}\\\vdots\\\boldsymbol{F}\propto(\boldsymbol{\delta}_m^m)^{\mathrm{T}}\propto\overrightarrow{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{r}}\propto(\boldsymbol{\delta}_p^p)^{\mathrm{T}}\propto\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{c}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}\propto(\boldsymbol{\delta}_m^1)^{\mathrm{T}}\propto[\boldsymbol{I}_{4mn}\otimes(\boldsymbol{\delta}_p^1)^{\mathrm{T}}]\\\vdots\\\boldsymbol{F}\propto(\boldsymbol{\delta}_m^1)^{\mathrm{T}}\propto[\boldsymbol{I}_{4mn}\otimes(\boldsymbol{\delta}_p^p)^{\mathrm{T}}]\\\vdots\\\boldsymbol{F}\propto(\boldsymbol{\delta}_m^m)^{\mathrm{T}}\propto[\boldsymbol{I}_{4mn}\otimes(\boldsymbol{\delta}_p^1)^{\mathrm{T}}]\\\vdots\\\boldsymbol{F}\propto(\boldsymbol{\delta}_m^m)^{\mathrm{T}}\propto[\boldsymbol{I}_{4mn}\otimes(\boldsymbol{\delta}_p^p)^{\mathrm{T}}]\end{bmatrix}\propto\overrightarrow{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{r}}\propto\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{c}}。$$

同理可证明 $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}_{\mathrm{c}}=\boldsymbol{M}'\propto\overrightarrow{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{r}}\propto\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{c}}$。　证毕

3 问题 1,2 的解

本节研究问题 1 和问题 2 的解。根据四元数矩阵的实向量表示和 Frobenius 范数的性质,可以将问题 1、问题 2 转化为相应的实矩阵问题。为了简化运算规模,提取 $\boldsymbol{X}$ 中的独立元素,去除冗余信息来构造 $\overrightarrow{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{s}}$,并给出在 Hermitian(反 Hermitian)三对角条件下 $\overrightarrow{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{s}}$ 和 $\overrightarrow{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{c}}$ 的关系。

定理 4　令 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & & \\ a_1 & b_2 & c_2 & & & & \\ & a_2 & b_3 & c_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & b_{n-2} & c_{n-2} & \\ & & & & a_{n-2} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & a_{n-1} & b_n \end{bmatrix}\in Q_3^{n\times n}$,则:

1) 如果 $\boldsymbol{X}\in Q_{\mathrm{H}}^{n\times n}$,记 $\overrightarrow{\boldsymbol{X}}_s=[\overrightarrow{b_1}^{\mathrm{T}},\overrightarrow{a_1}^{\mathrm{T}},\overrightarrow{b_2}^{\mathrm{T}},\overrightarrow{a_2}^{\mathrm{T}},\cdots,\overrightarrow{b_{n-1}}^{\mathrm{T}},\overrightarrow{a_{n-1}}^{\mathrm{T}},\overrightarrow{b_n}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,则 $\overrightarrow{\boldsymbol{X}}_c=\boldsymbol{H}_1\overrightarrow{\boldsymbol{X}}_s$,式中:

$$\boldsymbol{H}_1=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_n^1\otimes\boldsymbol{I}_4 & \boldsymbol{\delta}_n^2\otimes\boldsymbol{I}_4 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\delta}_n^1\otimes\boldsymbol{E}_4 & \boldsymbol{\delta}_n^2\otimes\boldsymbol{I}_4 & \boldsymbol{\delta}_n^3\otimes\boldsymbol{I}_4 & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{\delta}_n^{n-1}\otimes\boldsymbol{E}_4 & \boldsymbol{\delta}_n^n\otimes\boldsymbol{I}_4 \end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{4n^2\times(8n-4)},\ \boldsymbol{E}_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}。$$

2) 如果 $\boldsymbol{X}\in Q_{\mathrm{AH}}^{n\times n}$,则 $\overrightarrow{\boldsymbol{X}}_c=\boldsymbol{H}_2\overrightarrow{\boldsymbol{X}}_s$,式中:

$$\boldsymbol{H}_2=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_n^1\otimes\boldsymbol{I}_4 & \boldsymbol{\delta}_n^2\otimes\boldsymbol{I}_4 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\delta}_n^1\otimes\boldsymbol{E}_4' & \boldsymbol{\delta}_n^2\otimes\boldsymbol{I}_4 & \boldsymbol{\delta}_n^3\otimes\boldsymbol{I}_4 & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{\delta}_n^{n-1}\otimes\boldsymbol{E}_4' & \boldsymbol{\delta}_n^n\otimes\boldsymbol{I}_4 \end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{4n^2\times(8n-4)},\ \boldsymbol{E}_4'=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

定理 5　设 $\boldsymbol{A}\in Q^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}\in Q^{m\times m}$,令 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{M}'\ltimes\boldsymbol{M}\ltimes\overrightarrow{\boldsymbol{A}}_r\ltimes\boldsymbol{W}_{[4mn,4n^2]}\ltimes\overrightarrow{\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}}_c\ltimes\boldsymbol{H}_1$,则集合 Q_L 可表示为:

$$Q_L=\{\boldsymbol{X}\mid\overrightarrow{\boldsymbol{X}}_s=\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\dagger}\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_c+(\boldsymbol{I}_{8n-4}-\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\dagger}\widetilde{\boldsymbol{A}})\boldsymbol{y},\ \forall\,\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^{8n-4}\},\tag{3}$$

问题 1 中的极小范数最小二乘 Hermitian 三对角解 $\boldsymbol{X_H}$ 满足 $\overrightarrow{\boldsymbol{X_H}}_s=\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\dagger}\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_c$。

证明　根据性质 5 和定理 4,有:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{H}}}_c=\boldsymbol{M}'\ltimes\overrightarrow{\boldsymbol{AX}}_r\ltimes\overrightarrow{\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}}_c=\boldsymbol{M}'\ltimes\boldsymbol{M}\ltimes\overrightarrow{\boldsymbol{A}}_r\ltimes\overrightarrow{\boldsymbol{X}}_c\ltimes\overrightarrow{\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}}_c=$$
$$\boldsymbol{M}'\ltimes\boldsymbol{M}\ltimes\overrightarrow{\boldsymbol{A}}_r\ltimes\boldsymbol{W}_{[4mn,4n^2]}\ltimes\overrightarrow{\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}}_c\ltimes\overrightarrow{\boldsymbol{X}}_c=\boldsymbol{M}'\ltimes\boldsymbol{M}\ltimes\overrightarrow{\boldsymbol{A}}_r\ltimes\boldsymbol{W}_{[4mn,4n^2]}\ltimes\overrightarrow{\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}}_c\ltimes\boldsymbol{H}_1\ltimes\overrightarrow{\boldsymbol{X}}_s,$$

由性质 2 可知,其中 $\boldsymbol{M}'\in\mathbf{R}^{4m^2\times16m^2n^2}$, $\boldsymbol{M}\in\mathbf{R}^{4mn\times16mn^3}$。因此,有:

$$\|\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{H}}-\boldsymbol{B}\|=\|\overrightarrow{(\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{H}}-\boldsymbol{B})}_c\|=\|\overrightarrow{(\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{H}})}_c-\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_c\|=$$
$$\|\boldsymbol{M}'\ltimes\boldsymbol{M}\ltimes\overrightarrow{\boldsymbol{A}}_r\ltimes\boldsymbol{W}_{[4mn,4n^2]}\ltimes\overrightarrow{\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}}_c\ltimes\boldsymbol{H}_1\ltimes\overrightarrow{\boldsymbol{X}}_s-\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_c\|=\|\widetilde{\boldsymbol{A}}\overrightarrow{\boldsymbol{X}}_s-\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_c\|$$

因此 $\|\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{H}}-\boldsymbol{B}\|=\min$ 当且仅当 $\|\widetilde{\boldsymbol{A}}\overrightarrow{\boldsymbol{X}}_s-\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_c\|=\min$。对于实矩阵方程 $\widetilde{\boldsymbol{A}}\overrightarrow{\boldsymbol{X}}_s=\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_c$,由定理 1,该方程最小二乘解为 $\overrightarrow{\boldsymbol{X}}_s=\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\dagger}\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_c+(\boldsymbol{I}_{8n-4}-\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\dagger}\widetilde{\boldsymbol{A}})\boldsymbol{y}$, $\forall\,\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^{8n-4}$,所以可得(3)式。根据性质 5 可得:$\min\limits_{\boldsymbol{X}\in Q_L}\|\boldsymbol{X}\|\Leftrightarrow\min\limits_{\boldsymbol{X}\in Q_L}\|\overrightarrow{\boldsymbol{X}}_c\|\Leftrightarrow\min\limits_{\boldsymbol{X}\in Q_L}\|\overrightarrow{\boldsymbol{X}}_s\|$,根据(3)式可得 $\boldsymbol{X_H}\in Q_L$ 满足 $\overrightarrow{\boldsymbol{X_H}}_s=\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\dagger}\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_c$。　证毕

下面给出问题 1 有解的充要条件。

推论 1　设 $\boldsymbol{A}\in Q^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}\in Q^{m\times m}$,则(1)式有解 $\boldsymbol{X}\in Q_{\mathrm{H}}^{n\times n}$,当且仅当:

$$(\widetilde{\boldsymbol{A}}\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\dagger}-\boldsymbol{I}_{4m^2})\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_c=0。\tag{4}$$

如果(4)式成立,则方程(1)的 Hermitian 三对角解集为:$S=\{\boldsymbol{X}\mid\overrightarrow{\boldsymbol{X}}_s=\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\dagger}\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_c+(\boldsymbol{I}_{8n-4}-\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\dagger}\widetilde{\boldsymbol{A}})\boldsymbol{y},\ \forall\,\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^{8n-4}\}$。

证明　方程(1)具有 Hermitian 三对角解,当且仅当存在 $\boldsymbol{X}\in Q_{\mathrm{H}}^{n\times n}$ 满足 $\|\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{H}}-\boldsymbol{B}\|=0$,根据定理 5 的证明,有 $\|\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{H}}-\boldsymbol{B}\|=\|\widetilde{\boldsymbol{A}}\overrightarrow{\boldsymbol{X}}_s-\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_c\|=\|\widetilde{\boldsymbol{A}}\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\dagger}\widetilde{\boldsymbol{A}}\overrightarrow{\boldsymbol{X}}_s-\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_c\|=\|\widetilde{\boldsymbol{A}}\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\dagger}\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_c-\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_c\|=\|(\widetilde{\boldsymbol{A}}\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\dagger}-I_{4m^2})\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_c\|$。

因此,$\|\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{H}}-\boldsymbol{B}\|=0\Leftrightarrow\|(\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\dagger}\widetilde{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{I}_{4m^2})\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_c\|=0\Leftrightarrow(\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\dagger}\widetilde{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{I}_{4m^2})\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_c=0$。

根据定理 5 的证明,同理可得 $\overrightarrow{\boldsymbol{X}}_s=\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\dagger}\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_c+(\boldsymbol{I}_{8n-4}-\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\dagger}\widetilde{\boldsymbol{A}})\boldsymbol{y}$, $\forall\,\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^{8n-4}$。　证毕

下面讨论问题 2。由于方法与问题 1 相似,所以下面只描述结果,省略证明过程。

定理 6　设 $\boldsymbol{A}\in Q^{m\times n}$,$\boldsymbol{B}\in Q^{m\times m}$,令 $\hat{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{M}'\ltimes\boldsymbol{M}\ltimes\overrightarrow{\boldsymbol{A}}_r\ltimes\boldsymbol{W}_{[4mn,4n^2]}\ltimes\overrightarrow{\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}}_c\ltimes\boldsymbol{H}_2$,则集合 A_L 可表示为 $A_L=\{\boldsymbol{X}\mid\overrightarrow{\boldsymbol{X}}_s=$

$\hat{\boldsymbol{A}}^{\dagger}\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{c}}+(\boldsymbol{I}_{8n-4}-\hat{\boldsymbol{A}}^{\dagger}\hat{\boldsymbol{A}})\boldsymbol{y},\forall\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^{8n-4}\}$。

问题 2 中的极小范数最小二乘反 Hermitian 三对角解$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{A}}$满足$\overrightarrow{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{A}}}_{\mathrm{s}}=\hat{\boldsymbol{A}}^{\dagger}\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{c}}$。

推论 2　设 $\boldsymbol{A}\in Q^{m\times n}$，$\boldsymbol{B}\in Q^{m\times m}$，则(1)式有解 $\boldsymbol{X}\in Q_{\mathrm{AH}}^{n\times n}$ 当且仅当：

$$(\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{A}}^{\dagger}-\boldsymbol{I}_{4m^2})\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{c}}=0,\tag{5}$$

如果(5)式成立，则方程(1)的反 Hermitian 三对角解集为：$S=\{\boldsymbol{X}\mid\overrightarrow{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{s}}=\hat{\boldsymbol{A}}^{\dagger}\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{c}}+(\boldsymbol{I}_{8n-4}-\hat{\boldsymbol{A}}^{\dagger}\hat{\boldsymbol{A}})\boldsymbol{y},\forall\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^{8n-4}\}$。

4 数值算法与数值算例

本节利用第 3 节的结果，提出以下数值算法。

算法 1(问题 1)　步骤 1，输入 $\boldsymbol{A}\in Q^{m\times n}$，$\boldsymbol{B}\in Q^{m\times m}$，输出$\overrightarrow{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{r}}$，$\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{c}}$，$\overrightarrow{\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}}_{\mathrm{c}}$；

步骤 2，输入 $\boldsymbol{M}'$，$\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{W}_{[m,n]}$，$\boldsymbol{H}_1$，输出矩阵$\widetilde{\boldsymbol{A}}$；

步骤 3，根据$\overrightarrow{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{H}}}_{\mathrm{s}}=\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\dagger}\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{c}}$，输出方程(1)的极小范数最小二乘 Hermitian 三对角解 $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{H}}$。

算法 2(问题 2)　步骤 1，输入 $\boldsymbol{A}\in Q^{m\times n}$，$\boldsymbol{B}\in Q^{m\times m}$输出$\overrightarrow{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{r}}$，$\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{c}}$，$\overrightarrow{\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}}_{\mathrm{c}}$；

步骤 2，输入 $\boldsymbol{M}'$，$\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{W}_{[m,n]}$，$\boldsymbol{H}_2$，输出矩阵$\hat{\boldsymbol{A}}$；

步骤 3，根据$\overrightarrow{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{A}}}_{\mathrm{s}}=\hat{\boldsymbol{A}}^{\dagger}\overrightarrow{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{c}}$，输出方程(1)的极小范数最小二乘反 Hermitian 三对角解$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{A}}$。

例 1　考虑四元数矩阵方程 $\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{B}$，令 $m=n=2K(K=2:9)$。在 Matlab 中利用‘rand’函数随机生成四元数系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\mathrm{rand}(n)+\mathrm{rand}(n)\mathrm{i}+\mathrm{rand}(n)\mathrm{j}+\mathrm{rand}(n)\mathrm{k}$ 和实矩阵$\boldsymbol{X}_i(i=1,2,3,4)$，再利用 Hermitian 矩阵性质和‘diag’函数，生成$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{H}}=\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2\mathrm{i}+\boldsymbol{X}_3\mathrm{j}+\boldsymbol{X}_4\mathrm{k}$，$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{H}}\in Q_{\mathrm{H}}^{n\times n}$，计算 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AX}_{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$。根据算法 1，计算得问题 1 的数值解$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{H}}^{*}$，令 $\varepsilon_1=\log_{10}(\|\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{H}}^{*}-\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{H}}\|)$，通过计算得到不同维数的误差如图 1 所示。

例 2　同上在 Matlab 中生成$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2\mathrm{i}+\boldsymbol{X}_3\mathrm{j}+\boldsymbol{X}_4\mathrm{k}\in Q_{\mathrm{AH}}^{n\times n}$，计算 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AX}_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$。根据算法 2，计算得问题 2 的数值解$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{A}}^{*}$，令 $\varepsilon_2=\log_{10}(\|\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{A}}^{*}-\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{A}}\|)$，通过计算得到不同维数的误差见图 2。

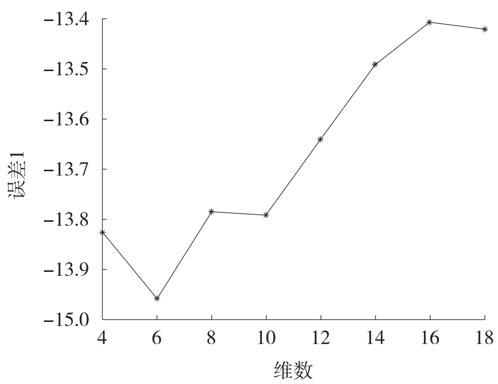

图 1　问题 1 的误差

Fig. 1　The errors for solving Problem 1

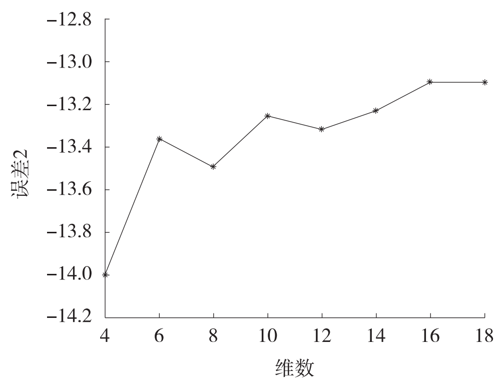

图 2　问题 2 的误差

Fig. 2　The errors for solving Problem 2

5 结束语

本文在四元数矩阵实向量表示和半张量积的基础上，研究了方程(1)上的最小二乘问题。算法只涉及实运算，减小了运算规模，提出的解表达式也只涉及实数矩阵。数值算例说明了该方法的有效性。

参考文献：

[1] ZHANG F Z. Quaternion and matrices of quaternions[J]. Linear Algebra and Its Applications，1997，251：21-57.

[2] FINKELSTEIN D，JAUCH J M，SCHIMINOVICH S，et al. Foundations of quaternion quantum mechanics[J]. Journal of Mathematical Physics，1962，3(2)：207-220.

[3] FARENICK D R，PIDKOWICH B A F. The spectral theorem in quaternions[J]. Linear Algebra and its Applications，2003，371

(2):75-102.

[4] STEPHEN L A. Scattering and decay theory for quaternionic quantum mechanics, and the structure of induced T nonconservation[J]. Physical Review D, 1988, 37(12): 3654-3662.

[5] Le BIHAN N, SANGWINE S J. Color image decomposition using quaternion singular value decomposition[C]//International Conference on Visual Information Engineering VIE 2003. Guildford: IET, 2004.

[6] RADER C, STEINHARDT A. Hyperbolic householder transformations[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1986, 34(6): 1589-1602.

[7] STEINHARDT A O. Householder transforms in signal processing[J]. IEEE ASSP Magazine, 1988, 5(3): 4-12.

[8] YUAN S F, LIAO A P, YAO G Z. The matrix nearness problem associated with the quaternion matrix equation $\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{BYB}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{C}$ [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2011, 37(1/2): 133-144.

[9] BAKSALARY J K. Nonnegative definite and positive definite solutions to the matrix equation $\boldsymbol{AXA}^{*}=\boldsymbol{B}$[J]. Linear and Multilinear Algebra, 1984, 16(1/2/3/4): 133-139.

[10] DAI H, LANCASTER P. Linear matrix equations from an inverse problem of vibration theory[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1996, 246: 31-47.

[11] GROß J. Nonnegative-definite and positive-definite solutions to the matrix equation $\boldsymbol{AXA}^{*}=\boldsymbol{B}$-revisited[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2000, 321(1/2/3): 123-129.

[12] KHATRI C G, MITRA S K. Hermitian and nonnegative definite solutions of linear matrix equations[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1976, 31(4): 579-585.

[13] WEI M S, WANG Q. On rank-constrained Hermitian nonnegative-definite least squares solutions to the matrix equation $\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{B}$[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2007, 84(6): 945-952.

[14] ZHANG X, CHENG M Y. The rank-constrained Hermitian nonnegative-definite and positive-definite solutions to the matrix equation $\boldsymbol{AXA}^{*}=\boldsymbol{B}$[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2003, 370: 163-174.

[15] LING S T, WANG M H, WEI M S. Hermitian tridiagonal solution with the least norm to quaternionic least squares problem [J]. Computer Physics Communications, 2010, 181(3): 481-488.

[16] ZHANG F X, WEI M S, LI Y, et al. An efficient method for least-squares problem of the quaternion matrix equation $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ [EB/OL]. (2020-08-20)[2021-03-20]. https://www.tandfonline.com/doi/citedby/10.1080/03081087.2020.1806197? scroll=top&needAccess=true.

[17] 程代展，齐洪胜，贺风华. 有限集上的映射与动态过程：矩阵半张量积方法[M]. 北京：科学出版社，2016.
CHENG D Z, QI H S, HUO F H. Mappings and dynamic systems over finite sets: a semi-tensor product approach[M]. Beijing: Science Press, 2016.

[18] 程代展，齐洪胜. 矩阵半张量积讲义卷一：基本理论与多线性运算[M]. 北京：科学出版社，2020.
CHENG D Z, QI H S. Lecture notes in semi-tensor product of matrices: basic theory and multilinear operation[M]. Beijing: Science Press, 2020.

[19] 戴华. 矩阵论[M]. 北京：科学出版社，2001.
DAI H. Matrix theory[M]. Beijing: Science Press, 2001.

The Special Least Squares Solutions of Quaternion Matrix Equation $AXA^{\mathrm{H}}=\mathrm{B}$

YUE Shufang, LI Ying, ZHAO Jianli, WANG Dong

(College of Mathematical Sciences, Liaocheng University, Liaocheng Shandong 252000, China)

Abstract: [**Purposes**]It mainly studies the least square solutions of quaternion matrix equation $\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{B}$. [**Methods**]A new kind of real representation of quaternion matrix is proposed. The quaternion matrix equation is transformed into the corresponding real matrix equation by combining the semi-tensor product of matrices. [**Findings**] The least squares Hermitian (anti-Hermitian) tridiagonal solutions of the equation are given, and the necessary and sufficient conditions for the existence of solutions are obtained. [**Conclusions**]The effectiveness of the method and results is demonstrated by numerical algorithm and example.

Keywords: quaternion matrixequation; semi-tensor product of matrices; Hermitian tridiagonl matrix; anti-Hermitian tridiagonal matrix

(责任编辑　黄　颖)