

α -D-半预不变凸映射与最优化^{*}

彭志莹, 彭再云, 陈雪静, 邓春艳
(重庆交通大学 数学与统计学院, 重庆 400074)

摘要:【目的】提出了一类新的向量值映射,即 α -D-半预不变凸映射,研究了此类映射的判定定理、性质以及该类映射在优化问题中的应用。【方法】理论推导并举例进行验证,利用向量值映射的半连续性获得 α -D-半预不变凸型映射的相关结论。【结果】首先给出了 α -D-半预不变凸映射的定义,并用实例说明了 α -D-半预不变凸映射的存在性;然后获得了 α -D-半预不变凸映射的判定定理和两个性质;最后讨论了 α -D-半严格半预不变凸映射在向量优化问题中的应用,并举例说明所得结果的正确性。【结论】 α -D-半预不变凸映射在一定程度上丰富了广义凸向量值映射及最优化理论的研究。

关键词: α -D-半预不变凸映射;判定定理;向量优化;应用

中图分类号: O224

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2022)01-0009-10

凸性和广义凸性在数理经济、管理科学和最优化理论中起着非常重要的作用,有关凸性和广义凸性的研究是数学规划最重要的方向之一。其中,在广义凸性的研究中,关于不变凸性的研究非常重要。1981 年, Hanson^[1]首次提出不变凸函数概念,指出它是凸函数的真推广。其后,许多学者借助这类函数获得了一些数学规划问题的最优性结果。

1986 年, Ben 等人^[2]定义了一类新的广义凸函数,即预不变凸函数,它保留了凸函数的一些良好性质。1992 年, Yang 等人^[3]引入了半预不变凸函数的概念,这类函数可看作是预不变凸函数的真推广。之后关于凸性及广义凸性的研究进一步深入,一些学者把广义凸函数推广到广义凸向量值映射,并进行了深入研究^[4-6]。1998 年, Kazmi^[4]提出了向量值情形下的 D -预不变凸映射的概念。2006 年, Peng 等人^[5]提出了 D -半严格预不变凸映射和 D -严格预不变凸映射的概念,并给出了这两类映射与 D -预不变凸映射之间的关系。在文献^[4-5]的基础上, Long 等人^[6]用 D -半严格预不变凸映射刻画了 D -预不变凸映射,讨论了 D -半严格预不变凸映射在向量优化中的应用。2014 年, 彭再云等人^[7]提出了向量值情形下 D - η -半预不变凸映射、 D - η -半严格半预不变凸映射和 D - η -严格半预不变凸映射的概念,并在条件 A 下讨论了三者之间的关系。在此基础上,唐莉萍等人^[8]给出了 D -半预不变凸性的一些新刻画,杨玉红^[9]利用向量值映射的半连续性获得了 D -半预不变凸映射的几个判别准则。

另一方面,一些学者对 α -广义凸类函数进行了研究。2006 年, Noor 等人^[10]提出了强 α -不变凸函数和强 α -预不变凸函数的概念,并讨论了它们和强 $\alpha\eta$ -单调性之间的关系。2007 年, Fan 等人^[11]提出拟 α -预不变凸函数的概念,并讨论了它和拟 α -不变凸函数之间的关系。2013 年, Tang^[12]提出了严格拟 α -预不变凸函数、半严格拟 α -预不变凸函数的概念,并讨论了它们和拟 α -预不变凸函数之间的关系。2015 年, 王海英等人^[13]研究了 α -预不变凸函数的一些性质。2017 年, 李婷等人^[14]将 α -预不变凸函数进行推广,讨论了拟 α -预不变凸函数的几个重要性质。2019 年, 李婷等人^[15]提出了 α -半预不变凸函数的概念,讨论了 α -半预不变凸函数的性质及应用。然而,到目前为止,关于 α -类的不变凸、预不变凸向量值映射仍未见研究。

受文献^[7-9,15]的启发,本文提出了一类新的向量值广义凸映射 α -D-半预不变凸映射。首先给出了向量值 α -D-半预不变凸映射的定义,并举例说明了该类型映射的存在性及它与 α -D-半严格半预不变凸映射之间的关

* 收稿日期:2021-04-15 修回日期:2021-06-24 网络出版时间:2022-02-10 08:43

资助项目:重庆市高校创新研究群体项目(No. CXQT21021);重庆市自然科学基金面上项目(No. cstc2021jcyjmsxmX0080);重庆交通大学院级研究生科研创新基金(No. 2021ST003);重庆交通大学校级研究生科研创新基金(No. 2021S0062)

第一作者简介:彭志莹,女,研究方向为向量优化理论与应用,E-mail:pzyyou123@163.com;通信作者:彭再云,男,教授,博士生导师,E-mail:pengzaiyun@126.com

网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20220209.1731.032.html

系;然后获得了 α - D -半预不变凸映射的判别准则;讨论了 α - D -半预不变凸映射的两个性质;最后得到了 α - D -半严格半预不变凸映射在向量优化问题中的应用,并给出例子对所得结论进行了验证。

1 预备知识

本文均假设 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 是非空集合, $D \subseteq \mathbf{R}^n$ 是点闭凸锥且 $\text{int } D \neq \emptyset$, $f: K \rightarrow \mathbf{R}^n$ 和 $\eta: K \times K \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ 都是向量值映射, $\alpha: K \times K \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}$ 是实值映射, 定义 D 的对偶锥为 $D^* = \{g \in \mathbf{R}^n : g(y) \geq 0, \forall y \in D\}$ 。

定义 1^[3] 设 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 是非空集合, 若存在向量值映射 $\eta: K \times K \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$, 使得 $\forall x, y \in K, \forall \beta \in [0, 1], \forall \lambda \in [0, 1]$, 有 $y + \beta\eta(x, y, \lambda) \in K$, 则称 K 是半不变凸集。

定义 2^[7] 设 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta: K \times K \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的半不变凸集, 向量值映射 $f: K \rightarrow \mathbf{R}^n$, 如果对于 $\forall x, y \in K, \forall \beta \in [0, 1], \forall \lambda \in [0, 1]$, 有:

$$f(y + \beta\eta(x, y, \lambda)) \in \beta f(x) + (1 - \beta)f(y) - D,$$

且满足 $\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta\eta(x, y, \lambda) = 0$, 则称向量值映射 f 是 K 上关于 η 的 D - η -半预不变凸映射。

定义 3^[15] 设 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 是非空集合, 若存在向量值映射 $\eta: K \times K \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\alpha: K \times K \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}$, 使得对于 $\forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0, 1]$, 有 $y + \lambda\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda) \in K$, 则称 K 为关于 η 和 α 的 α -半连通集。

定义 4^[15] 设 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 η 和 α 的 α -半连通集, 函数 $f: K \rightarrow \mathbf{R}$, 如果对于 $\forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0, 1]$, 有:

$$f(y + \lambda\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

且满足 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda\eta(x, y, \lambda) = 0$, 则称实值函数 $f: K \rightarrow \mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α -半预不变凸函数。

下面给出 α -半不变凸集、 α - D -(半严格)半预不变凸映射的概念。

定义 5 设 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 是非空集合, 若存在向量值映射 $\eta: K \times K \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\alpha: K \times K \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}$, 使得对于 $\forall x, y \in K, \forall \beta \in [0, 1], \forall \lambda \in [0, 1]$, 有 $y + \beta\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda) \in K$, 则称 K 为关于 η 和 α 的 α -半不变凸集。

定义 6 设 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集, 向量值映射 $f: K \rightarrow \mathbf{R}^n$, 如果对于 $\forall x, y \in K, \forall \beta \in [0, 1], \forall \lambda \in [0, 1]$, 有:

$$f(y + \beta\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)) \in \beta f(x) + (1 - \beta)f(y) - D,$$

且满足 $\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta\eta(x, y, \lambda) = 0$, 则称向量值映射 $f: K \rightarrow \mathbf{R}^n$ 在 K 上是关于 η 和 α 的 α - D -半预不变凸映射。

定义 7 设 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集, 向量值映射 $f: K \rightarrow \mathbf{R}^n$, 如果对于 $\forall x, y \in K, f(x) \neq f(y), \forall \lambda \in (0, 1), \forall \beta \in (0, 1)$, 有:

$$f(y + \beta\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)) \in \beta f(x) + (1 - \beta)f(y) - \text{int } D,$$

且满足 $\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta\eta(x, y, \lambda) = 0$, 则称向量值映射 $f: K \rightarrow \mathbf{R}^n$ 在 K 上是关于 η 和 α 的 α - D -半严格半预不变凸映射。

注 1 α - D -半预不变凸映射是 D - η -半预不变凸映射的真推广, 当 $\alpha(x, y) = 1$ 时, α - D -半预不变凸映射就退化为 D - η -半预不变凸映射^[7]。

注 2 下面用例 1 来说明 α - D -半预不变凸映射是存在的, 并说明 α - D -半预不变凸映射不必是 α - D -半严格半预不变凸映射。

例 1 令 $K = [0, +\infty), D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}, f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, 其中:

$$f_1(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 1 \\ -1, & x \geq 1 \end{cases}, f_2(x) = \begin{cases} -3x, & x \leq 1 \\ -3, & x \geq 1 \end{cases},$$

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ e^{xy}, & x \geq 1, y \geq 1 \\ y + x, & 0 < x < 1, y > 1 \\ 1 - y, & x > 1, 0 < y < 1 \end{cases}, \eta(x, y, \lambda) = \begin{cases} y - x, & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ \frac{x + y + \lambda}{e^{xy}}, & x \geq 1, y \geq 1 \\ \frac{y - x}{y + x}, & 0 < x < 1, y > 1 \\ 1, & x > 1, 0 < y < 1 \end{cases}.$$

分析 显然 K 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集。

对 $\forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0, 1], \forall \beta \in [0, 1]$, 有以下几种情况:

1) 当 $0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1$ 时, 有 $y + \beta\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda) = y + \beta(x - y) \in [0, 1]$, 故:

$$f(y + \beta\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)) = (-y + \beta(y - x), -3y + 3\beta(y - x)),$$

$$\beta f(x) + (1 - \beta)f(y) = (-y + \beta(y - x), -3y + 3\beta(y - x)),$$

显然可知 $f(y + \beta\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)) \in \beta f(x) + (1 - \beta)f(y) - D$, 且 $\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta\eta(x, y, \lambda) = 0$.

2) 当 $x \geq 1, y \geq 1$ 时, 有 $y + \beta\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda) = y + \beta(x + y + \lambda) \geq 1$, 故:

$$f(y + \beta\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)) = (-1, -3), \beta f(x) + (1 - \beta)f(y) = (-1, -3),$$

显然可知 $f(y + \beta\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)) \in \beta f(x) + (1 - \beta)f(y) - D$, 且 $\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta\eta(x, y, \lambda) = 0$.

3) 当 $0 < x < 1, y > 1$ 时, 有 $y + \beta\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda) = y + \beta(y - x) > 1$, 故:

$$f(y + \beta\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)) = (-1, -3), \beta f(x) + (1 - \beta)f(y) = (-1 + \beta(1 - x), -3 + 3\beta(1 - x)),$$

显然可知 $f(y + \beta\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)) \in \beta f(x) + (1 - \beta)f(y) - D$, 且 $\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta\eta(x, y, \lambda) = 0$.

4) 当 $x > 1, 0 < y < 1$ 时, 有 $y + \beta\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda) = y + \beta(1 - y) \in (0, 1]$, 故:

$$f(y + \beta\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)) = (-y + \beta(y - 1), -3y + 3\beta(y - 1)),$$

$$\beta f(x) + (1 - \beta)f(y) = (-y + \beta(y - 1), -3y + 3\beta(y - 1)),$$

显然可知 $f(y + \beta\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)) \in \beta f(x) + (1 - \beta)f(y) - D$, 且 $\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta\eta(x, y, \lambda) = 0$.

综上, f 是 K 上关于 η 和 α 的 α - D -半预不变凸映射。然而, 当 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}, \beta = \frac{1}{4}, \lambda = \frac{1}{5}$ 时, 有 $f(x) \neq$

$f(y)$, 计算得: $f(y + \beta\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)) = \left(-\frac{3}{8}, -\frac{9}{8}\right), \beta f(x) + (1 - \beta)f(y) = \left(-\frac{3}{8}, -\frac{9}{8}\right)$, 即:

$$f(y + \beta\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)) \notin \beta f(x) + (1 - \beta)f(y) - \text{int}D.$$

显然, f 不是 K 上关于 η 和 α 的 α - D -半严格半预不变凸映射。故, α - D -半预不变凸映射不必是 α - D -半严格半预不变凸映射。

下面用例 2 说明定义 7 中 α - D -半严格半预不变凸映射也是存在的。

例 2 令 $K = (-\infty, +\infty), D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}, f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, 其中:

$$f_1(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}|x|, & |x| \leq 1 \\ -\frac{1}{3}, & |x| \geq 1 \end{cases}, f_2(x) = \begin{cases} -3|x|, & |x| \leq 1 \\ -3, & |x| \geq 1 \end{cases},$$

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} x + y, & x > 0, y > 0 \\ y - x, & x < 0, y < 0 \\ e^x, & x > 1, y < -1 \\ e^y, & x < -1, y > 1 \\ e^y, & -1 \leq x \leq 0, y > 0 \\ e^x, & -1 \leq y \leq 0, x > 0 \\ e^{-y}, & 0 < x \leq 1, y < 0 \\ e^{-x}, & 0 < y \leq 1, x < 0 \end{cases}, \eta(x, y, \lambda) = \begin{cases} \frac{x - y + \lambda}{x + y}, & x > 0, y > 0 \\ \frac{x - y - \lambda}{y - x}, & x < 0, y < 0 \\ \frac{x - y + \lambda}{e^x}, & x > 1, y < -1 \\ \frac{x - y - \lambda}{e^y}, & x < -1, y > 1 \\ \frac{y - x + \lambda}{e^y}, & -1 \leq x \leq 0, y > 0 \\ \frac{y - x - \lambda}{e^x}, & -1 \leq y \leq 0, x > 0 \\ \frac{y - x - \lambda}{e^{-y}}, & 0 < x \leq 1, y < 0 \\ \frac{y - x + \lambda}{e^{-x}}, & 0 < y \leq 1, x < 0 \end{cases}.$$

容易验证 K 是关于 η 和 α 的一个 α -半不变凸集, 由定义 7 不难验证向量值映射 f 是 K 上的 α - D -半严格半预不变凸映射。

定义 8 设函数 $h: K \rightarrow \mathbf{R}$, 若对每个 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $x \in K$ 且 $\|x - \bar{x}\| < \delta$ 时, 有 $h(x) \leq h(\bar{x}) + \epsilon$, 则称

h 在 $\bar{x} \in K$ 处是上半连续的;若对每个 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $x \in K$ 且 $\|x - \bar{x}\| < \delta$ 时, 有 $h(x) \geq h(\bar{x}) - \epsilon$, 则称 h 在 $\bar{x} \in K$ 处是下半连续的。

定义 9^[6] 设向量值映射 $f: K \rightarrow \mathbf{R}^n$, 若对任意的 $q \in D^*$, $q^\circ f(\cdot)$ 在 K 上是上半连续的, 则称 f 是在 K 上是 $*$ -上半连续的;若对任意的 $q \in D^*$, $q^\circ f(\cdot)$ 在 K 上是下半连续的, 则称 f 在 K 上是 $*$ -下半连续的。

定义 10^[16] 设 Y 是度量空间, G 和 M 是 Y 中的两个子集, 令 $\bar{M}$ 表示 M 的闭包, 如果 $G \subseteq \bar{M}$, 那么称集 M 在集 G 中的稠密。若集 M 在集 G 中的稠密, 则对于任意一个 $g \in G$, 在 M 中都能找到一个点列 $\{g_n\}$, 使得 $\{g_n\}$ 收敛于 g 。

2 α - D -半预不变凸映射的判定定理

为了得到 α - D -半预不变凸映射的判定定理, 在文献[17]的启发下, 首先给出条件 C 和引理 1。

条件 C 称向量值映射 $\eta: K \times K \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\alpha: K \times K \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}$ 满足条件 C, 如果对 $\forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0, 1], \forall \beta \in (0, 1)$ 有:

- $C_1)$ $\eta(y, y + \beta\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda), \lambda) = -\beta\eta(x, y, \lambda);$
- $C_2)$ $\eta(x, y + \beta\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda), \lambda) = (1 - \beta)\eta(x, y, \lambda);$
- $C_3)$ $\alpha(x, y) = \alpha(y, y + \beta\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)).$

引理 1 设 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集, 若对 $\forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0, 1], \forall \beta \in (0, 1)$, η 和 α 满足条件 C, 则对 $\forall x, y \in K, \forall \beta_1, \beta_2 \in (0, 1), \forall \lambda \in [0, 1]$, 且 $\beta_1 > \beta_2$, 有:

- 1) $\eta(y + \beta_1\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda), y + \beta_2\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda), \lambda) = (\beta_1 - \beta_2)\eta(x, y, \lambda);$
- 2) $\alpha(x, y) = \alpha(y + \beta_1\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda), y + \beta_2\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)).$

引理 1 的证明利用与文献[17]中引理 2 类似的方法可得。

下面给出集合 A 在区间 $[0, 1]$ 中的一个稠密性结果。

引理 2 设 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集, 且 η 和 α 满足条件 C。若 $f: K \rightarrow \mathbf{R}^n$ 满足对 $\forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0, 1]$, 有 $f(y + \alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)) \in f(x) - D$, 且对 $\forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0, 1], \exists \beta \in (0, 1)$, 使得:

$$f(y + \beta\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)) \in \beta f(x) + (1 - \beta)f(y) - D,$$

则集合

$$A = \{\gamma \in [0, 1] \mid f(y + \gamma\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)) \in \gamma f(x) + (1 - \gamma)f(y) - D\}$$

在区间 $[0, 1]$ 中稠密。

证明 由 $f(y) \in f(y) - D$ 及条件 $f(y + \alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)) \in f(x) - D$ 可知 $0, 1 \in A$ 。反设 A 在区间 $[0, 1]$ 中不稠密, 则存在 $\gamma_0 \in (0, 1)$ 和 γ_0 的邻域 $N(\gamma_0)$ 使得 $N(\gamma_0) \cap A = \emptyset$ 。定义

$$\gamma_1 = \inf\{\gamma \in A \mid \gamma \geq \gamma_0\}, \gamma_2 = \sup\{\gamma \in A \mid \gamma \leq \gamma_0\},$$

则有 $0 \leq \gamma_2 < \gamma_1 \leq 1$ 。因为 $\{\beta, (1 - \beta)\} \subseteq (0, 1)$, 所以可以选择 $v_1, v_2 \in A$, 满足 $v_1 \geq \gamma_1, v_2 \leq \gamma_2$, 即 $v_2 \leq \gamma_2 < \gamma_1 \leq v_1$, 使得 $\max\{\beta, (1 - \beta)\}(v_1 - v_2) < \gamma_1 - \gamma_2$ 。

令 $\bar{\gamma} = \beta v_1 + (1 - \beta)v_2$, 由条件 C, 有:

$$\begin{aligned} & y + v_2\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda) + \beta\alpha(x, y)\eta(y + v_1\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda), y + v_2\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda), \lambda) = \\ & y + v_2\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda) + \beta\alpha(x, y)\eta(y + v_1\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda), y + v_1\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda) - \\ & (v_1 - v_2)\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda), \lambda) = y + v_2\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda) + \beta\alpha(x, y)\eta(y + v_1\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda), y + \\ & v_1\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda) + \frac{v_1 - v_2}{v_1}\alpha(x, y)\eta(y, y + v_1\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda), \lambda), \lambda) = y + v_2\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda) - \\ & \beta\frac{v_1 - v_2}{v_1}\alpha(x, y)\eta(y, y + v_1\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda), \lambda) = \\ & y + (v_2 + (v_1 - v_2)\beta)\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda) = y + \bar{\gamma}\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda). \end{aligned}$$

据 $v_1, v_2 \in A$, 则有:

$$f(y + v_1\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)) \in v_1 f(x) + (1 - v_1)f(y) - D, \quad (1)$$

$$f(y + v_2\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)) \in v_2 f(x) + (1 - v_2)f(y) - D. \quad (2)$$

由引理 1 可知:

$$\alpha(y+v_1\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda), y+v_2\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda))=\alpha(x,y). \quad (3)$$

故由(1)~(3)式可知:

$$\begin{aligned} f(y+\bar{\gamma}\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda)) &= f(y+v_2\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda)) + \\ &\beta\alpha(y+v_1\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda), y+v_2\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda))\eta(y+v_1\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda), y+v_2\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda), \lambda)) = \\ &f(y+v_2\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda)) + \beta\alpha(x,y)\eta(y+v_1\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda), y+v_2\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda), \lambda)) \in \\ &\beta f(y+v_1\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda)) + (1-\beta)f(y+v_2\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda)) - D \subseteq \\ &\beta[v_1f(x) + (1-v_1)f(y) - D] + (1-\beta)[v_2f(x) + (1-v_2)f(y) - D] - D = \\ &\bar{\gamma}f(x) + (1-\bar{\gamma})f(y) - D - D \subseteq \bar{\gamma}f(x) + (1-\bar{\gamma})f(y) - D. \end{aligned}$$

即 $\bar{\gamma} \in A$.

如果 $\bar{\gamma} \geq \gamma_0$, 则 $\bar{\gamma} - v_2 = \beta v_1 + (1-\beta)v_2 - v_2 = \beta(v_1 - v_2) < \gamma_1 - \gamma_2$, 所以 $\bar{\gamma} < \gamma_1$. 而 $\bar{\gamma} \geq \gamma_0$ 且 $\bar{\gamma} \in A$, 这与 γ_1 定义矛盾.

如果 $\bar{\gamma} \leq \gamma_0$, 则 $\bar{\gamma} - v_1 = \beta v_1 + (1-\beta)v_2 - v_1 = (1-\beta)(v_2 - v_1) > \gamma_2 - \gamma_1$, 所以 $\bar{\gamma} > \gamma_2$. 而 $\bar{\gamma} \leq \gamma_0$ 且 $\bar{\gamma} \in A$, 这与 γ_2 定义矛盾. 故集合 A 在 $[0, 1]$ 中稠密. 证毕

在讨论向量值映射时, 经常会用到以下由双极化定理得到的结论.

引理 3^[7] $\forall q \in D^*, d \in \mathbf{R}, q(d) \geq 0 \Leftrightarrow d \in D$.

定理 1 设 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集, 且 η 和 α 满足条件 C. 若 $f: K \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是 $*$ -上半连续的且满足对 $\forall x, y \in K, \lambda \in [0, 1]$, 有 $f(y + \alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)) \in f(x) - D$, 则 f 在 K 上是关于 η 和 α 的 α - D -半预不变凸映射的充要条件为 $\forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0, 1], \exists \beta \in (0, 1)$, 使得:

$$f(y + \beta\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)) \in \beta f(x) + (1-\beta)f(y) - D.$$

证明 由条件可知, 必要性显然成立. 下面只需证明充分性.

设 f 在 K 上不是 α - D -半预不变凸映射, 则存在 $x, y \in K, \lambda \in [0, 1], \bar{\gamma} \in (0, 1)$ 使得:

$$f(y + \bar{\gamma}\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)) \notin \bar{\gamma}f(x) + (1-\bar{\gamma})f(y) - D. \quad (4)$$

令 $z = y + \bar{\gamma}\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)$, 由引理 2 可知 A 在区间 $[0, 1]$ 中稠密, 则由 A 的稠密性可知存在序列 $\{\gamma_n\}$ 满足 $\gamma_n \in A$ 且 $\gamma_n < \bar{\gamma}$ 使得 $\gamma_n \rightarrow \bar{\gamma} (n \rightarrow \infty)$.

定义 $y_n = y + \frac{\bar{\gamma} - \gamma_n}{1 - \gamma_n}\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)$, 则 $y_n \rightarrow y (n \rightarrow \infty)$. 注意到 K 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集, 所以当 n 充分大时, 有 $y_n \in K$, 则由条件 C_2, C_3 有:

$$\begin{aligned} y_n + \gamma_n\alpha(x, y_n)\eta(x, y_n, \lambda) &= \\ y + \frac{\bar{\gamma} - \gamma_n}{1 - \gamma_n}\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda) + \gamma_n\alpha(x, y)\eta\left(x, y + \frac{\bar{\gamma} - \gamma_n}{1 - \gamma_n}\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda), \lambda\right) &= \\ y + \bar{\gamma}\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda) = z. \end{aligned} \quad (5)$$

由于 $\gamma_n \in A$, 由(5)式可知:

$$f(z) = f(y + \bar{\gamma}\alpha(x, y)\eta(x, y, \lambda)) = f(y_n + \gamma_n\alpha(x, y_n)\eta(x, y_n, \lambda)) \in \gamma_nf(x) + (1-\gamma_n)f(y_n) - D.$$

即 $\gamma_nf(x) + (1-\gamma_n)f(y_n) - f(y_n + \gamma_n\alpha(x, y_n)\eta(x, y_n, \lambda)) \in D$. 由引理 3 得:

$$q^\circ[\gamma_nf(x) + (1-\gamma_n)f(y_n) - f(y_n + \gamma_n\alpha(x, y_n)\eta(x, y_n, \lambda))] \geq 0, \forall q \in D^*.$$

进而有:

$$q^\circ[\gamma_nf(x) + (1-\gamma_n)f(y_n)] \geq q^\circ f(y_n + \gamma_n\alpha(x, y_n)\eta(x, y_n, \lambda)), \forall q \in D^*. \quad (6)$$

由 f 在 K 上是 $*$ -上半连续的, 可知对于每一个 $q \in D^*, q(f)(\cdot)$ 在 K 上是上半连续的. 因此, 对 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N > 0$, 使得:

$$q^\circ f(y_n) \leq q^\circ f(y) + \epsilon, \forall n > N. \quad (7)$$

于是由(5)~(7)式可知:

$$\begin{aligned} q^\circ f(z) &= q^\circ f(y_n + \gamma_n\alpha(x, y_n)\eta(x, y_n, \lambda)) \leq \gamma_n q^\circ f(x) + (1-\gamma_n)q^\circ f(y_n) \leq \\ \gamma_n q^\circ f(x) + (1-\gamma_n)[q^\circ f(y) + \epsilon] &\rightarrow \bar{\gamma}q^\circ f(x) + (1-\bar{\gamma})[q^\circ f(y) + \epsilon] (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

由于 $\epsilon > 0$ 可充分小, 于是对所有的 $q \in D^*$, 有 $q^\circ f(z) \leq \bar{\gamma} q^\circ f(x) + (1 - \bar{\gamma}) q^\circ f(y)$ 。

由 q 的线性性可得 $q^\circ (\bar{\gamma} f(x) + (1 - \bar{\gamma}) f(y) - f(z)) \geq 0$ 。

又由引理 3 可得 $\bar{\gamma} f(x) + (1 - \bar{\gamma}) f(y) - f(z) \in D$, 即 $f(z) \in \bar{\gamma} f(x) + (1 - \bar{\gamma}) f(y) - D$, 即:

$$f(y + \bar{\gamma} \alpha(x, y) \eta(x, y, \lambda)) \in \bar{\gamma} f(x) + (1 - \bar{\gamma}) f(y) - D.$$

这与(4)式矛盾, 故结论成立。

证毕

定理 2 设 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集, 且 η 和 α 满足条件 C。若 $f: K \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是 $*$ -下半连续的且满足对 $\forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0, 1]$, 有 $f(y + \alpha(x, y) \eta(x, y, \lambda)) \in f(x) - D$ 。则 f 在 K 上是关于 η 和 α 的 α - D -半预不变凸映射的充要条件为 $\forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0, 1], \exists \beta' \in (0, 1)$, 使得:

$$f(y + \beta' \alpha(x, y) \eta(x, y, \lambda)) \in \beta' f(x) + (1 - \beta') f(y) - D. \quad (8)$$

证明 必要性显然, 只需要证明充分性。假设 f 在 K 上不是 α - D -半预不变凸映射, 则 $\exists \bar{\lambda} \in [0, 1], \exists \bar{x}, \bar{y} \in K, \exists \gamma \in (0, 1)$, 使得:

$$f(\bar{y} + \gamma \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \eta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda})) \notin \gamma f(\bar{x}) + (1 - \gamma) f(\bar{y}) - D. \quad (9)$$

设 $x_t = \bar{y} + t \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \eta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}), t \in (\gamma, 1]$ 。定义:

$$B = \{x_t \in K \mid t \in (\gamma, 1], f(x_t) = f(\bar{y} + t \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \eta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda})) \in t f(\bar{x}) + (1 - t) f(\bar{y}) - D\}, \\ u = \inf\{t \in (\gamma, 1] \mid x_t \in B\}.$$

由条件 $f(y + \alpha(x, y) \eta(x, y, \lambda)) \in f(x) - D$ 知 $x_1 \in B$, 故 $B \neq \emptyset$ 。另外, 由(9)式知:

$$x_\gamma = \bar{y} + \gamma \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \eta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) \notin B.$$

从而, 当 $\gamma \leq t < u$ 时, $x_t \notin B$ 。由 u 的定义, $\exists \{t_n : t_n \in \mathbf{R}\} : t_n \geq u, x_{t_n} \in B$, 使得 $t_n \rightarrow u (n \rightarrow \infty)$ 。由于 $x_{t_n} \in B$, 则:

$$f(x_{t_n}) \in t_n f(\bar{x}) + (1 - t_n) f(\bar{y}) - D, \forall n \in N, \quad (10)$$

即 $t_n f(\bar{x}) + (1 - t_n) f(\bar{y}) - f(x_{t_n}) \in D, \forall n \in N$ 。由引理 3 得:

$$q^\circ [t_n f(\bar{x}) + (1 - t_n) f(\bar{y}) - f(x_{t_n})] \geq 0, \forall q \in D^*, \forall n \in N. \quad (11)$$

因 q 是线性泛函, 则由上式得:

$$t_n q^\circ f(\bar{x}) + (1 - t_n) q^\circ f(\bar{y}) \geq q^\circ f(x_{t_n}), \forall q \in D^*, \forall n \in N. \quad (12)$$

由于 $f: K \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是 $*$ -下半连续的, 则 $\forall q \in D^*, q^\circ f(\cdot)$ 是下半连续的, 结合(12)式得:

$$q^\circ f(x_u) = q^\circ f(\bar{y} + u \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \eta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda})) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} q^\circ f(\bar{y} + t_n \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \eta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda})) = \lim_{n \rightarrow \infty} q^\circ f(x_{t_n}) \leq \\ \lim_{n \rightarrow \infty} [t_n q^\circ f(\bar{x}) + (1 - t_n) q^\circ f(\bar{y})] = u q^\circ f(\bar{x}) + (1 - u) q^\circ f(\bar{y}), \forall q \in D^*. \quad (13)$$

从而 $q^\circ [u f(\bar{x}) + (1 - u) f(\bar{y}) - f(x_u)] \geq 0, \forall q \in D^*$ 。再由引理 3 得:

$$u f(\bar{x}) + (1 - u) f(\bar{y}) - f(x_u) \in D. \quad (14)$$

于是得 $x_u = \bar{y} + u \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \eta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) \in B$ 。

类似地, 设 $y_t = \bar{y} + t \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \eta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}), t \in [0, \gamma)$ 。定义:

$$C = \{y_t \in K \mid t \in [0, \gamma), f(y_t) = f(\bar{y} + t \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \eta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda})) \in t f(\bar{x}) + (1 - t) f(\bar{y}) - D\}, \\ v = \sup\{t \in [0, \gamma) \mid y_t \in C\}.$$

由 $f(\bar{y}) \in f(\bar{y}) - D$, 易知 $y_0 = \bar{y} \in C$, 故 $C \neq \emptyset$ 。

另外, 由(9)式知, $y_\gamma = \bar{y} + \gamma \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \eta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) \notin C$ 。从而, 当 $v < t \leq \gamma$ 时, $y_t \notin C$ 。由 v 的定义, $\exists \{s_n, s_n \in \mathbf{R}\} : s_n \leq v, y_{s_n} \in C$, 使得 $s_n \rightarrow v (n \rightarrow \infty)$ 。类似的, 利用 f 的 $*$ -下半连续性, 重复(10)~(14)式的步骤, 也可以得到 $y_v = \bar{y} + v \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \eta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) \in C$ 。

另一方面, 由 u, v 的定义知, $0 \leq v < \gamma < u \leq 1$ 。对任意的 $\beta \in (0, 1)$, 由引理 1 结论 2) 可知:

$$\alpha(y_v, x_u) = \alpha(\bar{y} + v \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \eta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}), \bar{y} + u \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \eta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda})) = \alpha(\bar{x}, \bar{y}).$$

则由引理 1 中 1) 得:

$$x_u + \beta \alpha(y_v, x_u) \eta(y_v, x_u, \bar{\lambda}) = \\ \bar{y} + u \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \eta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) + \beta \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \eta(\bar{y} + v \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \eta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}), \bar{y} + u \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \eta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}), \bar{\lambda}) = \\ \bar{y} + u \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \eta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) + \beta(v - u) \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \eta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) = \bar{y} + [\beta v + (1 - \beta) u] \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \eta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}).$$

令 $w = \beta v + (1 - \beta)u$, $\beta \in (0, 1)$, 记 $x_w = \bar{y} + w\alpha(\bar{x}, \bar{y})\eta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}) = x_u + \beta\alpha(y_v, x_u)\eta(y_v, x_u, \bar{\lambda})$ 。由于 $\beta \in (0, 1)$, 则 $w \in (v, u)$, 从而 $x_w \notin B \cup C$, $\forall \beta \in (0, 1)$ 。因为 $x_u \in B$, $y_v \in C$, 则:

$$uf(\bar{x}) + (1 - u)f(\bar{y}) \in f(x_u) + D, v f(\bar{x}) + (1 - v)f(\bar{y}) \in f(y_v) + D. \quad (15)$$

注意到 D 是凸锥, 结合(15)式得:

$$\begin{aligned} wf(\bar{x}) + (1 - w)f(\bar{y}) &= [\beta v + (1 - \beta)u]f(\bar{x}) + \{1 - [\beta v + (1 - \beta)u]\}f(\bar{y}) = \\ &= \beta[v f(\bar{x}) + (1 - v)f(\bar{y})] + (1 - \beta)[u f(\bar{x}) + (1 - u)f(\bar{y})] \in \\ &= \beta[f(y_v) + D] + (1 - \beta)[f(x_u) + D] \subseteq \beta f(y_v) + (1 - \beta)f(x_u) + D, \forall \beta \in (0, 1). \end{aligned}$$

从而有:

$$\beta f(y_v) + (1 - \beta)f(x_u) \in wf(\bar{x}) + (1 - w)f(\bar{y}) - D, \forall \beta \in (0, 1). \quad (16)$$

下证:

$$f(x_w) = f(x_u + \beta\alpha(y_v, x_u)\eta(y_v, x_u, \bar{\lambda})) \notin \beta f(y_v) + (1 - \beta)f(x_u) - D, \forall \beta \in (0, 1). \quad (17)$$

假设(17)式不成立, 则 $\exists \bar{\beta} \in (0, 1)$, 使得 $\bar{w} = \bar{\beta}v + (1 - \bar{\beta})u$, 且:

$$f(x_{\bar{w}}) = f(x_u + \bar{\beta}\alpha(y_v, x_u)\eta(y_v, x_u, \bar{\lambda})) \in \bar{\beta}f(y_v) + (1 - \bar{\beta})f(x_u) - D. \quad (18)$$

由(16), (18)式以及 D 是凸锥得:

$$f(x_{\bar{w}}) \in \bar{w}f(\bar{x}) + (1 - \bar{w})f(\bar{y}) - D. \quad (19)$$

显然可知 $x_{\bar{w}} \notin B \cup C$, $\forall \beta \in (0, 1)$, 由 B, C 定义可知 $f(x_{\bar{w}}) \notin \bar{w}f(\bar{x}) + (1 - \bar{w})f(\bar{y}) - D$, 与(19)式矛盾, 故(17)式成立。

综上所述可得: $\exists x_u, y_v \in K$, $\exists \bar{\lambda} \in [0, 1]$, $\forall \beta \in (0, 1)$ 有:

$$f(x_u + \beta\alpha(y_v, x_u)\eta(y_v, x_u, \bar{\lambda})) \notin \beta f(y_v) + (1 - \beta)f(x_u) - D,$$

与(8)式矛盾。故 f 在 K 上是 α - D -半预不变凸映射。

证毕

3 α - D -半预不变凸映射的性质

本节将讨论 α - D -半预不变凸映射的两个性质。

定理 3 设 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集, f 是 K 上关于 η 和 α 的 α - D -半预不变凸映射, 则 $\forall \mu \in \mathbf{R}^n$, 水平集 $L(f(x), \mu) = \{x \in K \mid f(x) \in \mu - D\}$ 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集。

证明 任取 $x_1, x_2 \in L(f(x), \mu) = \{x \in K \mid f(x) \in \mu - D\}$, 则有 $x_1, x_2 \in K$, 且:

$$f(x_1) \in \mu - D, f(x_2) \in \mu - D. \quad (20)$$

因 f 是 α - D -半预不变凸映射, 故 $\forall \beta \in [0, 1]$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, 有:

$$f(x_2 + \beta\alpha(x_1, x_2)\eta(x_1, x_2, \lambda)) \in \beta f(x_1) + (1 - \beta)f(x_2) - D. \quad (21)$$

由(20), (21)式, $\forall \beta \in [0, 1]$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, 有 $f(x_2 + \beta\alpha(x_1, x_2)\eta(x_1, x_2, \lambda)) \in \beta(\mu - D) + (1 - \beta)(\mu - D) - D$, 即:

$$f(x_2 + \beta\alpha(x_1, x_2)\eta(x_1, x_2, \lambda)) \in \mu - D. \quad (22)$$

因 K 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集, 故 $\forall \beta \in [0, 1]$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, 有 $x_2 + \beta\alpha(x_1, x_2)\eta(x_1, x_2, \lambda) \in K$ 。从而由(22)式, 即得 $x_2 + \beta\alpha(x_1, x_2)\eta(x_1, x_2, \lambda) \in L(f(x), \mu)$, $\forall \beta \in [0, 1]$, $\forall \lambda \in [0, 1]$ 。

因此 $\forall \mu \in \mathbf{R}^n$, 水平集 $L(f(x), \mu) = \{x \in K \mid f(x) \in \mu - D\}$ 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集。

证毕

定理 4 设 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集, 假设:

1) $f, g: K \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是 K 上关于同一 η 和 α 的 α - D -半预不变凸映射, 则 $f + g$ 也是 K 上关于同一 η 和 α 的 α - D -半预不变凸映射;

2) $f: K \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α - D -半预不变凸映射, m 是一个常值映射, 则 $f + m$ 也是 K 上关于同一 η 和 α 的 α - D -半预不变凸映射;

3) $f: K \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α - D -半预不变凸映射, $k > 0$, 则 kf 也是 K 上关于同一 η 和 α 的 α - D -半预不变凸映射。

证明 1) 因为 $f, g: K \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是 K 上关于同一 η 和 α 的 α - D -半预不变凸映射, 则对 $\forall x, y \in K$, $\forall \beta \in [0, 1]$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, 有:

$$\begin{aligned} f(y+\beta\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda)) &\in \beta f(x) + (1-\beta)f(y) - D, \\ g(y+\beta\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda)) &\in \beta g(x) + (1-\beta)g(y) - D. \end{aligned}$$

以上两式相加可得:

$$\begin{aligned} (f+g)(y+\beta\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda)) &= f(y+\beta\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda)) + g(y+\beta\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda)) \in \\ &\beta f(x) + (1-\beta)f(y) - D + \beta g(x) + (1-\beta)g(y) - D \in \\ &\beta(f(x) + g(x)) + (1-\beta)(f(y) + g(y)) - D = \beta(f+g)(x) + (1-\beta)(f+g)(y) - D. \end{aligned}$$

故 $f+g$ 也是 K 上关于同一 η 和 α 的 α - D -半预不变凸映射。

2) 因为 $f:K \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α - D -半预不变凸映射, 则对 $\forall x, y \in K, \forall \beta \in [0, 1], \forall \lambda \in [0, 1]$, 有 $f(y+\beta\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda)) \in \beta f(x) + (1-\beta)f(y) - D$ 。

由 m 是一个常值映射, 从而有:

$$\begin{aligned} (f+m)(y+\beta\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda)) &= f(y+\beta\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda)) + m \in \beta f(x) + (1-\beta)f(y) + m - D = \\ &\beta(f(x) + m) + (1-\beta)(f(y) + m) - D = \beta(f+m)(x) + (1-\beta)(f+m)(y) - D. \end{aligned}$$

故 $f+m$ 也是 K 上关于同一 η 和 α 的 α - D -半预不变凸映射。

3) 因为 $f:K \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α - D -半预不变凸映射, 则对 $\forall x, y \in K, \forall \beta \in [0, 1], \forall \lambda \in [0, 1]$, 有 $f(y+\beta\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda)) \in \beta f(x) + (1-\beta)f(y) - D$ 。

由 $k > 0$, 从而有:

$$(kf)(y+\beta\alpha(x,y)\eta(x,y,\lambda)) \in k(\beta f(x) + (1-\beta)f(y) - D) = \beta(kf)(x) + (1-\beta)(kf)(y) - D.$$

故 kf 也是 K 上关于同一 η 和 α 的 α - D -半预不变凸映射。

证毕

4 α - D -半严格半预不变凸映射与最优性

考虑如下的隐约束向量优化问题(VP):

$$\begin{aligned} \min & f(x), \\ \text{s. t. } & x \in K. \end{aligned}$$

首先给出向量优化问题(VP)解的基本定义。

定义 11 令 $f(K) = \bigcup_{x \in K} f(x)$, 则:

1) 称点 $\bar{x} \in K$ 是(VP)的全局有效解, 如果 $(f(\bar{x}) - D \setminus \{0_Y\}) \cap f(K) = \emptyset$; 称点 $\bar{x} \in K$ 是(VP)的局部有效解, 如果存在 $\bar{x}$ 的邻域 U , 满足 $K \cap U \neq \emptyset$, 且 $(f(\bar{x}) - D \setminus \{0_Y\}) \cap f(K \cap U) = \emptyset$ 。

2) 称 $\bar{x} \in K$ 为(VP)的全局弱有效解, 如果 $(f(\bar{x}) - \text{int}D) \cap f(K) = \emptyset$; 称点 $\bar{x} \in K$ 为(VP)的局部弱有效解, 如果存在 $\bar{x}$ 的邻域 U , 满足 $K \cap U \neq \emptyset$, 且 $(f(\bar{x}) - \text{int}D) \cap f(K \cap U) = \emptyset$ 。

下面给出 α - D -半严格半预不变凸映射在向量优化问题(VP)中的一个应用结果。

定理 5 设 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集, 向量值映射 $f:K \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α - D -半严格半预不变凸映射, 且对 $\forall x, y \in K, \alpha(x, y)$ 是有界的, 则向量优化问题(VP)的局部有效解一定是(VP)的全局有效解。

证明 若 $\bar{x} \in K$ 是(VP)的局部有效解, 则存在 $\bar{x}$ 的邻域 U 使得:

$$(f(\bar{x}) - D \setminus \{0_Y\}) \cap f(K \cap U) = \emptyset. \quad (23)$$

假设 $\bar{x}$ 不是(VP)的全局有效解, 即 $(f(\bar{x}) - D \setminus \{0_Y\}) \cap f(K) \neq \emptyset$ 。于是 $\exists x \in K$, 使得 $f(x) \in f(\bar{x}) - D \setminus \{0_Y\}$, 由于 K 是关于 η 和 α 的 α -半不变凸集, 则对任意 $\beta \in (0, 1), \lambda \in [0, 1]$, 有 $\bar{x} + \beta\alpha(x, \bar{x})\eta(x, \bar{x}, \lambda) \in K$ 且由 $f:K \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是 K 上关于 η 和 α 的 α - D -半严格半预不变凸映射, 有:

$$\begin{aligned} f(\bar{x} + \beta\alpha(x, \bar{x})\eta(x, \bar{x}, \lambda)) &\in \beta f(x) + (1-\beta)f(\bar{x}) - \text{int}D \subseteq \\ &\beta(f(x) - D \setminus \{0_Y\}) + (1-\beta)f(\bar{x}) - \text{int}D \subseteq f(\bar{x}) - D \setminus \{0_Y\}. \end{aligned}$$

即对任意的 $\beta \in (0, 1), \lambda \in [0, 1]$, 有:

$$f(\bar{x} + \beta\alpha(x, \bar{x})\eta(x, \bar{x}, \lambda)) \in f(\bar{x}) - D \setminus \{0_Y\}. \quad (24)$$

又因 $\lim_{\beta \rightarrow 0} (\bar{x} + \beta\alpha(x, \bar{x})\eta(x, \bar{x}, \lambda)) = \bar{x}$, 因此存在 $\delta (0 < \delta < 1)$ 对所有的 $\beta \in (0, \delta)$ 满足 $\bar{x} + \beta\alpha(x, \bar{x})\eta(x, \bar{x}, \lambda) \in U \cap K$, 则(24)

式与(23)式矛盾,因此 $\bar{x}$ 是优化问题(VP)的全局有效解。

证毕

注 3 利用与定理 5 类似的方法,还可以获得关于优化问题(VP)全局弱有效解的类似充分性条件。

例 3 继续考虑例 2。在例 2 中,定理 5 中假设全部满足,通过简单计算可得优化问题(VP)局部有效解集 $S = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ 。

由局部有效解的定义可验证 $\bar{x} = \pm 1$ 是向量优化问题(VP)的局部有效解,同时显然可知 $\bar{x} = \pm 1$ 也是向量优化问题(VP)的全局有效解。故此说明定理 5 的可行性。

5 总结

本文研究了一类新的广义凸型映射—— α - D -半预不变凸映射,说明了此类映射的存在性,并利用向量值映射的半连续性,得到了 α - D -半预不变凸映射的判别准则,获得了 α - D -半预不变凸映射的一些性质,给出了 α - D -半严格半预不变凸映射在向量优化问题的应用。本文所得结果将文献[7,15]中相应的结果进行了推广。关于 α - D -半预不变凸映射的研究是非常意义的,能否获得 α - D -半预不变凸规划问题的最优性或偶结果,这将是后续值得研究的课题。

参考文献:

- [1] HANSON M A. On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1981, 80 (2): 545-550.
- [2] BEN I A, MOND B. What is invexity?[J]. Journal of the Australian Mathematical Society, 1986, 28: 1-9.
- [3] YANG X Q, CHENG Y. A class of nonconvex functions and prevariational inequalities[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1992, 169(2): 359-373.
- [4] KAZMI K R. Some remarks on vector optimization problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1998, 96(1): 133-138.
- [5] PENG J W, ZHU D L. On D -preinvex-type functions[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2006(1): 1-14.
- [6] LONG X J, PENG Z Y, ZENG B. Remark on cone-semi-strictly preinvex functions[J]. Optimization Letters, 2009, 3(3): 337-345.
- [7] 彭再云, 王堃颖, 赵勇, 等. D - η -半预不变凸映射的性质与应用[J]. 应用数学和力学, 2014, 35(2): 202-211.
PENG Z Y, WANG K Y, ZHAO Y, et al. Properties and applications of D - η -semi-preinvex mappings[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2014, 35(2): 202-211.
- [8] 唐莉萍, 杨新民. 关于 D -半预不变凸性的某些新性质[J]. 应用数学和力学, 2015, 36(3): 325-331.
TANG L P, YANG X M. A note on some new characteristics of D -Semi-Preinvexity[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2015, 36(3): 325-331.
- [9] 杨玉红. D -半预不变凸映射的一些判别准则[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2018, 35(3): 21-29.
YANG Y H. Some Criteria for D -semi-preinvex mapping[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2018, 35(3): 21-29.
- [10] NOOR M A, NOOR K I. Some characterizations of strongly preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 316: 697-706.
- [11] FAN L Y, GUO Y L. On strongly α -preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 330: 1412-1425.
- [12] TANG W M. On strictly and semistrictly quasi α -preinvex functions[J]. International Journal of Computational Methods, 2013, 15(8): 1391-1402.
- [13] 王海英, 符祖峰, 杨筱珊. α -预不变凸映射的两个新特征性质[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2015(5): 14-18.
WANG H Y, FU Z F, YANG X S. Two new characteristic properties of α -preinvex convex functions[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2015(5): 14-18.
- [14] 李婷, 彭再云, 李科科, 等. 拟 α -预不变凸映射[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2017, 34(4): 8-12.
LI T, PENG Z Y, LI K K, et al. Quasi α -preinvariant convex function[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2017, 34(4): 8-12.

- [15] 李婷,彭再云,邵重阳,等. α -半预不变凸型及其应用研究[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2019(11):1-7.
LI T, PENG Z Y, SHAO C Y, et al. The study of α -semi-preinvexity and its applications[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2019(11):1-7.
- [16] 程其襄,张奠宙,魏国强. 实变函数与泛函分析基础[M]. 第3版. 北京:高等教育出版社,2010:190.
CHENG Q X, ZHANG D Z, WEI G Q. Basis of real variable function and functional analysis[M]. 3rd edition. Beijing: Higher Education Press, 2010:190.
- [17] 邵重阳,李众,胡灿,等. α -半预拟不变凸性多目标规划最优性条件研究[J]. 西华师范大学学报(自然科学版),2019,40(3):283-291.
SHAO C Y, LI Z, HU C, et al. Study on the optimality conditions of α -semi-prequasi-invexity invexity multiobjective programming [J]. Journal of Xihua Normal University (Natural Science Edition), 2019, 40(3):283-291.

Operations Research and Cybernetics

α -D-Semi-Preinvex Mappings and Optimization

PENG Zhiying, PENG Zaiyun, CHEN Xuejing, DENG Chunyan

(College of Mathematics and Statistics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: [Purposes] It presents a new class of vector valued generalized convex mappings, α -D-semi-preinvex mappings, and its decision theorem, properties and application in optimization problems are studied. [Methods] The relevant conclusions of the α -D-semi-preinvex mappings are obtained by using the semi-continuity of the vector-valued mappings. [Findings] First, the definition of α -D-semi-pre-invex mappings is given and its existence is illustrated by examples; then the decision theorem and two properties of α -D-semi-pre-invex mappings are obtained; finally, the application of α -D-semi-strict semi-preinvex mappings in vector optimization problems is discussed and the correctness of the results is verified by examples. [Conclusions] α -D-semi-pre-invex mappings enriches the study of generalized convex vector-valued mappings and optimization theory.

Keywords: α -D-Semi-preinvex mappings; criterion; vector optimization; applications

(责任编辑 黄 颖)