

最小化总完工时间和总延误的两代理公平定价问题^{*}

种贝贝, 樊保强

(鲁东大学 数学与统计科学学院, 山东 烟台 264000)

摘要:【目的】研究单台机器环境下, 一个代理最小化总完工时间而另一个代理最小化总延误的公平定价问题。【方法】每个代理的工件有相同的加工时间, 其中: 第 1 个代理的目标是最小化总完工时间, 第 2 个代理的目标是最小化总延误, 并且第 2 个代理的工件拥有不同的交货期; 将这一问题分为不同的情形分别进行考虑。【结果】在 Pareto 排序集合下的 KS 公平排序可以在线性时间内找到, 并且公平定价的值为 $\frac{1}{2}$, 举例说明了这个界是紧的。【结论】上述结果对已有文献结果进行了推广, 丰富了单台机器环境下两代理排序的公平定价问题的内容。

关键词: 两代理排序; KS 公平; 效用函数; 公平定价

中图分类号: O223

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2022)01-0062-10

两代理排序中的公平定价(Price of fairness)问题是近些年才出现的一类排序博弈问题, 其中涉及的公平问题出现在许多实践应用中, 在经济学、运筹学、数学等不同学科中都有所研究。Agnētis 等人^[1]和 Baker 等人^[2]分别研究了两代理单机排序模型, 其中每个代理都有各自需要优化的目标函数。Leung 等人^[3]研究了在 m 台平行机环境下的两代理排序, 推广了两代理排序理论框架。在经典的组合优化问题中, 目标往往是让系统的效用达到最优。然而, 在多代理竞争有限资源的优化问题中, 一个公平的资源配置方案就显得尤为重要。公平定价的概念由 Bertsimas 等人^[4]首次提出, 他们尝试量化公平分配与最优分配相比系统效用的损失, 并在比例公平和最大最小公平的公平标准下, 给出资源分配问题公平定价的严格下界。在此之后, 关于各个领域的公平问题得到了学者们的广泛研究。Caragiannis 等人^[5]在公平分配问题中引入公平定价的概念, 从 3 种不同的公平标准概念出发, 给出了一系列关于公平定价的结果。

Agnētis 等人^[6]首次考虑了两代理单机排序中的公平定价问题。在他们的工作中, 第 1 个代理的目标是最小化总完工时间, 第 2 个代理的目标是最小化最大延迟, 并假设第 2 个代理的工件有一个公共的交货期。他们证明了 KS 公平解可以在线性时间内找到, 其中 m 是第 1 个代理的工件个数, 并且公平定价的值为 $\frac{2}{3}$ 。他们还刻画了比例公平解存在的条件, 并证明了比例公平解存在与否可以在线性时间内得到验证, 如果该解存在, 则公平定价的值为 $\frac{1}{2}$ 。对于两个代理均是最小化总完工时间的问题, 说明了当其中一个代理只有 1 个工件时 KS 公平的公平定价的上界不小于 $\frac{2}{3}$ 。同时, 他们还证明了确定比例公平排序存在与否以及它如果存在如何求解均是 NP-难的。Zhang 等人^[7]研究了最小化总完工时间的两代理单机排序中的公平定价问题, 考虑了其中的一个代理只有两个工件的情形。他们证明了所有的 KS 公平排序是可以在线性时间内找到的, 并且证明了公平定价的值为 $\frac{1}{2}$ 。张新功等人^[8]研究了第 1 个代理是最小化加权误工工件数, 第 2 个代理最小化最大费用函数的 KS 公平标准下的公平定价问题, 给出了一般情况下公平定价的结构性质和紧界分析。

本文研究单台机器环境下一个代理最小化总完工时间、另一个代理最小化总延误的公平定价问题, 其中每

* 收稿日期: 2021-09-16 修回日期: 2021-10-13 网络出版时间: 2022-02-11 08:42

资助项目: 国家自然科学基金(No. 11801251); 山东省自然科学基金(No. ZR2021MA071)

第一作者简介: 种贝贝, 女, 研究方向为排序论、博弈论, E-mail: beibeichong@163.com; 通信作者: 樊保强, 男, 副教授, 博士, E-mail: baoqiangfan@163.com

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20220210.1629.002.html>

个代理的工件有相同的加工时间。本文首先给出了问题的正式描述,其中包括若干重要的概念与符号;然后证明了在 Pareto 排序集合下的 KS 公平排序可以在线性时间内找到,给出公平定价的值为 $\frac{1}{2}$,且通过举例说明这个界是紧的。

1 预备知识

首先给出两代理单机排序问题的正式描述。有两个代理 A 和 B,他们分别拥有一组工件,所有工件将在一台机器上加工。在不引起混淆情况下,工件和它对应的加工时间用同一个符号表示。代理 A 有 m 个工件 $p_1^A, p_2^A, \dots, p_m^A$,这些工件的加工时间相等,即 $p_i^A = p, i=1, 2, \dots, m$;代理 B 有 n 个工件,它们的加工时间 $p_j^B = p', j=1, 2, \dots, n$,代理 B 的所有工件有两个交货期 d_1^B 和 d_2^B ($d_1^B < d_2^B$),同时要求这 n 个工件分两批交货。容易证明在最优排序中每批工件都是连续加工的,因此可以把每批工件看作是 1 个工件分别记为 p_1^B 和 p_2^B 。由此,在下文将认为代理 B 只有两个工件 p_1^B 和 p_2^B ,它们的加工时间满足 $p_1^B = p_2^B = p' \geq p$,并且有 $p_1^B \leq d_1^B$ 和 $p_1^B + p_2^B \leq d_2^B$ 。代理 A 的目标是最小化总完工时间 $\sum C_j^A$,代理 B 的目标是最小化总延误 $\sum T_j^B$ 。根据排序问题的三参数表示法,该问题表示成 $1 | d_1^B < d_2^B | (\sum C_j^A, \sum T_j^B)$ 。

令 σ 表示一个所有工件的可行排序。对于排序 σ ,令 $f^A(\sigma) = \sum C_j^A(\sigma)$ 和 $f^B(\sigma) = \sum T_j^B(\sigma)$ 分别表示代理 A 和代理 B 的费用。同时,如果排序 σ 和 $\tilde{\sigma}$ 使得两个代理的费用一致,便不作区分。下面给出几个重要的概念。

1) 代理效用。对于每一个排序 $\sigma \in \Sigma_p$,令 $f_{\max}^i = \max\{f^i(\sigma) : \sigma \in \Sigma_p\}$,定义代理效用为:

$$u^i(\sigma) = f_{\max}^i - f^i(\sigma), i \in \{A, B\},$$

其中 Σ_p 表示所有 Pareto 最优排序的集合。

2) 系统效用。对于排序 σ 和给定的常数 $\gamma > 0$,定义系统效用 $U(\sigma)$ 为:

$$U(\sigma) = u^A(\sigma) + \gamma u^B(\sigma)。$$

3) 系统最优效用。令 σ^* 表示使得系统的效用达到最大的排序,那么系统最优效用为:

$$U(\sigma^*) = \max_{\sigma \in \Sigma_p} \{U(\sigma)\}。$$

4) 代理的标准化效用。令 $f_{\min}^i = \min\{f^i(\sigma) : \sigma \in \Sigma_p\}$,给定排序 $\sigma \in \Sigma_p$,代理 i 的标准化效用为:

$$\bar{u}^i(\sigma) = \frac{u^i(\sigma)}{f_{\max}^i - f_{\min}^i}, i \in \{A, B\}。$$

5) KS 公平排序。一个排序 σ_{KS} 被称为是相对于排序集合 Σ_p 的 KS 公平排序,如果满足以下条件:

$$\sigma_{KS} = \arg \max_{\sigma \in \Sigma_p} \min_{i \in \{A, B\}} \{\bar{u}^i(\sigma)\}。$$

6) 公平定价。令 F 表示一个公平标准, σ_F 表示在公平标准 F 下的公平排序。 σ^* 表示一个系统最优效用排序,则公平定价(记为 PoF)定义如下:

$$\text{PoF} = \sup_{\sigma_F \in \Sigma_F, \Sigma_p} \min \left\{ \frac{U(\sigma^*) - U(\sigma_F)}{U(\sigma^*)} \right\}。$$

其中: Σ_F, Σ_p 表示在 Pareto 最优排序的集合 Σ_p 下所有 F 公平排序的集合。

最后给出本文用到的几个关键符号,分别为: 1) $l_1: l_1 = \max_{0 \leq i \leq m} \{i: \sum_{j=1}^i p_j^A + p_1^B + p_2^B \leq d_2^B\}$; 2) $l_2: l_2 = \max_{0 \leq i \leq m} \{i: \sum_{j=1}^i p_j^A + p_1^B \leq d_1^B\}$; 3) $x: p_1^B$ 和 p_2^B 两个工件之间的代理 A 的工件个数; 4) $y: p_2^B$ 之后的代理 A 的工件个数; 5) P : 代理 A 全部工件的加工时间之和,即 $P = \sum_{i=1}^m p_i^A$; 6) $P_x: p_1^B$ 和 p_2^B 两个工件之间的代理 A 的工件加工时间之和,即 $P_x = \sum_{i=m-x-y+1}^{m-y} p_i^A$; 7) $P_y: p_2^B$ 之后的代理 A 工件加工时间之和,即 $P_y = \sum_{i=m-y+1}^m p_i^A$ 。

2 问题 $1 | d_1^B < d_2^B | (\sum C_j^A, \sum T_j^B)$

本节考虑在单台机器环境下一个代理最小化总完工时间、另一个代理最小化总延误的公平定价问题。根据 l_1 和 l_2 的大小情况,分为两种情形研究排序模型 $1 | d_1^B < d_2^B | (\sum C_j^A, \sum T_j^B)$ 在 KS 公平标准下的公平定价问

题,最后给出 $PoF = \frac{1}{2}$ 。

2.1 $l_1 > l_2$ 的情形

本小节考虑问题 $1 | d_1^B < d_2^B | (\sum C_j^A, \sum T_j^B)$ 中 $l_1 > l_2$ 的情形,代理 A 工件的加工时间均为 p ,代理 B 工件的加工时间 $p_1^B = p_2^B = p'$,并且 $p' \geq p$ 。借鉴文献[7]中提供的算法可以找到所有 Pareto 最优的 KS 公平排序,并求得 $PoF = \frac{1}{2}$ 。

首先,给出 $1 | d_1^B < d_2^B | (\sum C_j^A, \sum T_j^B)$ 在 $l_1 > l_2$ 情形下关于 Pareto 最优排序结构的刻画。

引理 1 对于问题 $1 | d_1^B < d_2^B | (\sum C_j^A, \sum T_j^B)$, 当 $l_1 > l_2$ 时,在任何一个 Pareto 最优排序中,都有代理 B 的工件保持最早预定交货(EDD)序;且 p_1^B 之前至少有 l_2 个代理 A 的工件, p_2^B 之前至少有 l_1 个代理 A 的工件。

为了更好地刻画 Pareto 解的结构(图 1),引入两个变量 x, y 。则 $\sigma(x, y)$ 表示与 (x, y) 相对应的排序,其中 x 和 y 均为整数。由引理 1 可知,后面只需要考虑 $0 \leq x \leq m - l_2, 0 \leq y \leq m - l_1$ 和 $0 \leq x + y \leq m - l_2$ 相对应的可行排序。

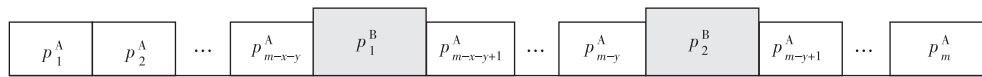


图 1 $\sigma(x, y)$ 的结构

Fig. 1 The structure of $\sigma(x, y)$

根据图 1 中 $\sigma(x, y)$ 的结构,接下来给出两个代理的费用函数和效用函数(表 1)。

表 1 代理的费用和效用函数

Tab. 1 Cost and utility functions of agents

费用和效用	代理 A	代理 B
$f_{\min}^i$	$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^j p_i^A$	0
$f_{\max}^i$	$f_{\min}^A + (l_1 - l_2)p' + 2(m - l_1)p'$	$2P + 3p' - d_1^B - d_2^B$
$f^i(x, y)$	$f_{\min}^A + xp' + 2yp'$	$f^B(x, y)$
$u^i(x, y)$	$K_1 - (x + 2y)p'$	$u^B(x, y)$
$\bar{u}^i(x, y)$	$\frac{K_1 - (x + 2y)p'}{K_1}$	$\bar{u}^B(x, y)$

记 $K_1 = u_{\max}^A = (l_1 - l_2)p' + 2(m - l_1)p', K_2 = u_{\max}^B = 2P + 3p' - d_1^B - d_2^B$ 。为了保证 $K_2 > 0$,不妨假设 $l_1 \leq m - 1$ 。由于 $0 \leq x \leq m - l_2, 0 \leq y \leq m - l_1$,代理 B 的费用函数分类给出如下:

$$f^B(x, y) = \begin{cases} 0, x = l_1 - l_2, y = m - l_1 \\ \sum_{i=1}^{m-y} p_i^A + 2p' - d_2^B, x = m - l_2 - y, y < m - l_1 \\ \sum_{i=1}^{m-x-y} p_i^A + p' - d_1^B, x < l_1 - l_2, y = m - l_1 \\ \sum_{i=1}^{m-x-y} p_i^A + \sum_{i=1}^{m-y} p_i^A + 3p' - d_1^B - d_2^B, x < m - l_2 - y, y < m - l_1 \end{cases}。$$

从而可以求效用函数

$$u^B(x, y) = \begin{cases} K_2, x = l_1 - l_2, y = m - l_1 \\ P + P_y + p' - d_1^B, x = m - l_2 - y, y < m - l_1 \\ P + P_y + P_x + 2p' - d_2^B, x < l_1 - l_2, y = m - l_1 \\ P_x + 2P_y, x < m - l_2 - y, y < m - l_1 \end{cases}。$$

则标准化效用表示如下:

$$\bar{u}^B(x, y) = \begin{cases} 1, x = l_1 - l_2, y = m - l_1 \\ \frac{P + P_y + p' - d_1^B}{K_2}, x = m - l_2 - y, y < m - l_1 \\ \frac{P + P_y + P_x + 2p' - d_2^B}{K_2}, x < l_1 - l_2, y = m - l_1 \\ \frac{P_x + 2P_y}{K_2}, x < m - l_2 - y, y < m - l_1 \end{cases}$$

下面分类讨论以上 4 种情形下 KS 公平排序集合和公平定价的情况。由于前 3 种情况属于代理 B 的工件至多只有 1 个是误工的情形,不妨将这些特殊情况记为情形 1;对于第 4 种情况即两个工件均误工的情况,记为情形 2。

2.1.1 情形 1 该情形又分为 3 种子情况进行讨论。

1) 当 $x = l_1 - l_2, y = m - l_1$ 时。两个代理的标准化效用为 $\bar{u}^A(l_1 - l_2, m - l_1) = 0, \bar{u}^B(l_1 - l_2, m - l_1) = 1$ 。这种情况下与 $(l_1 - l_2, m - l_1)$ 相对应的排序是最为平凡的一种公平排序,从而有 $\text{PoF} = 0$ 。

2) 当 $x = m - l_2 - y, y < m - l_1$ 时。首先,两个代理的标准化效用分别表示为 $\bar{u}^A(m - l_2 - y, y) = \frac{(m - l_1 - y)p'}{K_1}, \bar{u}^B(m - l_2 - y, y) = \frac{(m + y)p + p' - d_1^B}{K_2}$ 。其次,注意到当 y 从 $0 \rightarrow m - l_1 - 1$, $\bar{u}^A$ 的值从 $\frac{(m - l_1)p'}{K_1}$ 递减到 $\frac{p'}{K_1}$; $\bar{u}^B$ 的值从 $\frac{mp + p' - d_1^B}{K_2}$ 递增到 $\frac{(2m - l_1 - 1)p + p' - d_1^B}{K_2}$ 。令 $\bar{u}^A(m - l_2 - y, y) = \bar{u}^B(m - l_2 - y, y)$, 则得到两者的交点为 $y_0 = \frac{K_2(m - l_1)p' - K_1(mp + p' - d_1^B)}{K_1p + K_2p'}$ 。结合以下事实:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{(m - l_1)p' + (m - l_2)p'}{K_2} \geq \frac{(m - l_1)p' + (m - l_2)p'}{(m - l_1)p + (m - l_2)p} = \frac{p'}{p}, \quad (1)$$

可以得到 $p' \leq \frac{K_1}{K_2}p$, 则有 $y_0 \leq 0$ 成立。即 $\bar{u}^A(m - l_2 - y, y)$ 与 $\bar{u}^B(m - l_2 - y, y)$ 在当前取值范围内没有交点或者有一个交点为 0, 则与 $(m - l_2, 0)$ 相对应的排序是一个 KS 公平排序。同时,与 $(m - l_2, 0)$ 相对应的排序也是一个系统最优排序,从而得到 $\text{PoF} = 0$ 。

3) 当 $x < l_1 - l_2, y = m - l_1$ 时。此时,代理的标准化效用 $\bar{u}^A(x, m - l_1) = \frac{(l_1 - l_2 - x)p'}{K_1}, \bar{u}^B(x, m - l_1) = \frac{(2m - l_1 + x)p + 2p' - d_2^B}{K_2}$ 。由系统效用的定义,此时系统效用可表示为 $U(x, m - l_1) = (l_1 - l_2 - x)p' + \gamma[(2m - l_1 + x)p + 2p' - d_2^B]$, 当 $x = 0$ 时,得到最优系统效用 $U(\sigma^*) = U(0, m - l_1) = (l_1 - l_2)p' + \gamma[(2m - l_1)p + 2p' - d_2^B]$ 。即与 $(0, m - l_1)$ 相对应的排序是一个系统最优排序。令 $\bar{u}^A(x, m - l_1) = \bar{u}^B(x, m - l_1)$, 再结合(1)式,则可以得到两者的交点满足:

$$x_0 = \frac{K_2(l_1 - l_2)p' - K_1[(2m - l_1)p + 2p' - d_2^B]}{K_1p + K_2p'}, x_0 \leq \frac{(l_1 - l_2)p' - \frac{K_1}{K_2}[(2m - l_1)p + 2p' - d_2^B]}{2p'} < \frac{l_1 - l_2}{2}。$$

从而有 $0 \leq x_0 < \frac{l_1 - l_2}{2}$ 。如果 $x_0 = 0$, 则与 $(0, m - l_1)$ 相对应的排序不仅是一个系统最优排序,也是一个 KS 公平排序,从而有 $\text{PoF} = 0$ 。如果 $x_0 > 0$, 则得到 $0 \leq x_{\text{KS}} \leq \lceil x_0 \rceil \leq \frac{l_1 - l_2}{2}$ 。

下面要证明对于任何一个 KS 公平排序,有 $\frac{U(\sigma^*) - U(\sigma_{\text{KS}, p})}{U(\sigma^*)} \leq \frac{1}{2}$ 成立。该式可等价转换成证明:

$$\frac{(l_1 - l_2 - x_{\text{KS}})p' + \gamma[(2m - l_1 + x_{\text{KS}})p + 2p' - d_2^B]}{(l_1 - l_2)p' + \gamma[(2m - l_1)p + 2p' - d_2^B]} \geq \frac{1}{2}。 \quad (2)$$

整理(2)式可得,只需证明不等式

$$(l_1 - l_2 - 2x_{\text{KS}})p' + \gamma[(2m - l_1 + 2x_{\text{KS}})p + 2p' - d_2^B] \geq 0$$

是成立的即可。结合 $x_{\text{KS}} \leq \frac{l_1 - l_2}{2}$ 可知: $l_1 - l_2 - 2x_{\text{KS}} \geq 0$ 。又因为 $l_1 \leq m - 1$, 所以有

$$(2m-l_1+2x_{KS})p+2p'-d_2^B > 2(m-l_1+x_{KS})p-p \geq p > 0$$

成立。从而(2)式是成立的,则有 $\text{PoF} \leq \frac{1}{2}$ 。

综合上述对情形 1 的讨论,可以得到下面的结果。

定理 1 当 $l_1 > l_2$ 时,对于情形 1 下的问题 $1 | d_1^B < d_2^B | (\sum C_j^A, \sum T_j^B)$, 可以得到 $\text{PoF} \leq \frac{1}{2}$ 。

2.1.2 情形 2 讨论以下情况: $x < m-l_2-y, y < m-l_1$ 。

该情况的取值范围可等价转换为 $0 \leq x < m-l_2, 0 \leq y < m-l_1$ 和 $0 \leq x+y < m-l_2$ 。注意到这种情形下得到的排序都是 Pareto 最优排序。根据 $\bar{u}^A(x, y) = \frac{K_1 - (x+2y)p'}{K_1}, \bar{u}^B(x, y) = \frac{(x+2y)p}{K_2}$, 令 $\bar{u}^A(x, y) = \bar{u}^B(x, y)$, 可以得到两者的交线,并将它在 xy 平面上的投影记作 L_p 。下面给出一些关于代理标准化效用和 L_p 的一些性质。

引理 2 $\bar{u}^A(x, y)$ 是一个严格递减的函数,当 $y \leq -\frac{x}{2} + \frac{K_1}{4p'}$ 时, $\bar{u}^A(x, y) \geq \frac{1}{2}$; $\bar{u}^B(x, y)$ 是一个严格递增的函数,当 $y \geq -\frac{x}{2} + \frac{K_1}{4p'}$ 时, $\bar{u}^B(x, y) \geq \frac{1}{2}$ 。

证明 由 $\bar{u}^A(x, y)$ 的表达式知,它随着变量 x 和 y 增加而严格递减。当 $\bar{u}^A$ 在直线 $y = -\frac{x}{2} + \frac{K_1}{4p'}$ 上取值时,

$$\text{有 } \bar{u}^A\left(x, -\frac{x}{2} + \frac{K_1}{4p'}\right) = \frac{K_1 - xp' - 2\left(-\frac{x}{2} + \frac{K_1}{4p'}\right)p'}{K_1} = \frac{1}{2}。 \text{ 所以当 } y \leq -\frac{x}{2} + \frac{K_1}{4p'} \text{ 时,有 } \bar{u}^A(x, y) \geq \frac{1}{2} \text{ 成立。}$$

$\bar{u}^B(x, y)$ 是随着变量 x 和 y 增加而递增的函数,其中对于 $y = -\frac{x}{2} + \frac{K_1}{4p'}$ 上的点,有:

$$\bar{u}^B\left(x, -\frac{x}{2} + \frac{K_1}{4p'}\right) = \frac{xp + 2\left(-\frac{x}{2} + \frac{K_1}{4p'}\right)p}{K_2} \geq \frac{\frac{K_1}{2}p \times \frac{K_2}{K_1p}}{K_2} = \frac{1}{2}。$$

所以当 $y \geq -\frac{x}{2} + \frac{K_1}{4p'}$ 时, $\bar{u}^B(x, y) \geq \frac{1}{2}$ 。

证毕

引理 3 如果 (x, y) 位于直线 L_p 的下方,则 $\min\{\bar{u}^A(x, y), \bar{u}^B(x, y)\} = \bar{u}^B(x, y)$; 如果 (x, y) 位于直线 L_p 的上方,则 $\min\{\bar{u}^A(x, y), \bar{u}^B(x, y)\} = \bar{u}^A(x, y)$ 。如果 (x, y) 是 L_p 上的非整数点, $(\lfloor x \rfloor, \lceil y \rceil)$ 和 $(\lceil x \rceil, \lfloor y \rfloor)$ 均在 L_p 的下方,则 $(\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor)$ 不可能是 KS 公平排序; 如果 $(\lfloor x \rfloor, \lceil y \rceil)$ 和 $(\lceil x \rceil, \lfloor y \rfloor)$ 均在 L_p 的上方,则 $(\lceil x \rceil, \lceil y \rceil)$ 不可能是 KS 公平排序。

引理 4 假设 L_p 经过 $(x, y+\alpha)$ 和 $(x+1, z)$ 两点,其中 x 和 y 均是整数, $0 \leq \alpha < 1$, 那么 $y-1 \leq z < y+\alpha$ 。

证明 如果 $z < y-1$, 那么 $(x+1, y-1)$ 位于直线 L_p 的上方。由引理 3 可知, $\bar{u}^A(x+1, y-1) \leq \bar{u}^B(x+1, y-1)$ 。下面考虑 $\bar{u}^A(x, y+\alpha) = \frac{K_1 - xp' - 2(y+\alpha)p'}{K_1} \leq \frac{K_1 - xp' - 2yp' + p'}{K_1} = \bar{u}^A(x+1, y-1)$ 。而

$$\bar{u}^B(x+1, y-1) = \frac{\lfloor (x+1)p + 2(y-1)p \rfloor}{K_2} < \bar{u}^B(x, y)。$$

综上可得 $\bar{u}^A(x+1, y-1) \geq \bar{u}^A(x, y+\alpha) = \bar{u}^B(x, y+\alpha) \geq \bar{u}^B(x, y) \geq \bar{u}^B(x+1, y-1)$, 这与假设得到的结论相矛盾,故 $z \geq y-1$ 成立。

同样假设 $z \geq y+\alpha$, 则 $(x+1, y+\alpha)$ 位于直线 L_p 的下方。由引理 3 可知:

$$\bar{u}^A(x+1, y+\alpha) \geq \bar{u}^B(x+1, y+\alpha)。$$

而 $\bar{u}^A(x+1, y+\alpha) \leq \bar{u}^A(x, y+\alpha) = \bar{u}^B(x, y+\alpha) \leq \bar{u}^B(x+1, y+\alpha)$, 两者相矛盾,故 $z < y+\alpha$ 成立。

证毕

下面寻找 Pareto 最优的 KS 公平排序,用 $(x, y)_{\text{KS}, p}$ 和 $\Sigma_{\text{KS}, p}$ 表示相应的 Pareto 最优的 KS 公平排序和排序集合。借助文献[7]中的算法,该算法记为 KS-算法。它的主要思想是从 L_p 与 y 轴的交点开始追踪 L_p , 检查 L_p 经过的每个正方形的 4 个角所处的点相对应的排序是否是 KS 公平排序。对于 $\bar{u}^A(0, y)$ 与 $\bar{u}^B(0, y)$ 的交点,通过二搜索可以在 $O(\log m)$ 时间内找到。下面给出 KS-算法的具体执行步骤。

输入: 关于 $l_1 > l_2$ 情形下问题 $1 | d_1^B < d_2^B | (\sum C_j^A, \sum T_j^B)$ 的一个实例。

输出:所有 Pareto 最优的 KS 公平排序集合 X 。

步骤 1,在区间 $(0, m]$ 上进行二搜索找到一个整数 y' ,使得 L_p 与 y 轴的交点落在区间 $[y', y'+1)$ 之内。

步骤 2,初始化处理,令 $(x_0, y_0) = (0, y')$, $l=0$, $v_{\max}=0$ 和 $X=\emptyset$ 。当 $x_l < m$ 和 $y_l > 0$ 时,进行以下循环。

步骤 3,如果 $\bar{u}^B(x_l, y_l) \geq \bar{u}^A(x_l, y_l)$, 则 (x_l, y_l) 位于所在正方形的左上角,并将正方形 4 个角所处的点中使得 $\min_{i \in \{A, B\}} \{\bar{u}^i(x, y)\}$ 达到最大的值记为 v_l 。若 $v_l = v_{\max}$, 将该正方形的 4 个角所处的点中满足 $\min_{i \in \{A, B\}} \{\bar{u}^i(x, y)\} = v_l$ 的整数点放入 X ; 若 $v_l > v_{\max}$, 则删除 X 中的其他点,并且令 $v_{\max} = v_l$ 。将 $(x_{l+1}, y_{l+1}) = (x_l + 1, y_l - 1)$ 作为下一步的迭代点。否则,进行步骤 4;

步骤 4, (x_l, y_l) 位于所在正方形的左下角,并将正方形 4 个角所处的点中使得 $\min_{i \in \{A, B\}} \{\bar{u}^i(x, y)\}$ 达到最大的值记为 v_l 。若 $v_l = v_{\max}$, 则将该正方形的 4 个角所处的点中满足 $\min_{i \in \{A, B\}} \{\bar{u}^i(x, y)\} = v_l$ 的整数点放入 X ; 若 $v_l > v_{\max}$, 则删除 X 中的其他点,并且令 $v_{\max} = v_l$ 。将 $(x_{l+1}, y_{l+1}) = (x_l + 1, y_l)$ 作为下一步的迭代点;

步骤 5, $l = l + 1$ 。

步骤 6,跳出循环后,输出集合 X 。

定理 2 当 $l_1 > l_2$ 时,对于情形 2 下的问题 $1 | d_1^B < d_2^B | (\sum C_j^A, \sum T_j^B)$, 所有的 Pareto 最优的 KS 公平排序可以在 $O(m)$ 时间内找到。

引理 5 当 $l_1 > l_2$ 时,对于情形 2 下的任何一个 Pareto 最优的 KS 公平排序 $(x, y)_{KS, p} \in \Sigma_{KS, p}$, 都有 $\bar{u}^B(x, y)_{KS, p} \geq \frac{1}{2}$ 。

证明 假设 (x, y) 是 L_p 上的点, L_p 经过每个正方形的 4 个角 $(\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor)$, $(\lfloor x \rfloor, \lceil y \rceil)$, $(\lceil x \rceil, \lfloor y \rfloor)$ 和 $(\lceil x \rceil, \lceil y \rceil)$ 相对应的排序都是可能的 $(x, y)_{KS, p}$ (图 2)。根据 $\bar{u}^B(x, y)$ 的单调性可知,若 $\bar{u}^B(\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor) \geq \frac{1}{2}$, 则 $\bar{u}^B$ 在其余 3 点的值不小于 $\frac{1}{2}$ 。由引理 2 可知,当 $\lfloor y \rfloor \geq -\frac{\lfloor x \rfloor}{2} + \frac{K_1}{4p'}$ 时,则有 $\bar{u}^B(\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor) \geq \frac{1}{2}$ 成立。当 $\lfloor y \rfloor < -\frac{\lfloor x \rfloor}{2} + \frac{K_1}{4p'}$, 如果 $\lceil y \rceil \leq -\frac{\lceil x \rceil}{2} + \frac{K_1}{4p'}$, 则有 $\bar{u}^A(\lceil x \rceil, \lceil y \rceil) \geq \frac{1}{2}$ 。而 $(\lceil x \rceil, \lceil y \rceil)$ 是 L_p 上方的点,则有 $\min\{\bar{u}^A(\lceil x \rceil, \lceil y \rceil), \bar{u}^B(\lceil x \rceil, \lceil y \rceil)\} \geq \bar{u}^A(\lceil x \rceil, \lceil y \rceil) \geq \frac{1}{2}$ 。如果 $\lceil y \rceil > -\frac{\lceil x \rceil}{2} + \frac{K_1}{4p'}$, 注意到图 2

中, $y = -\frac{x}{2} + \frac{K_1}{4p'}$ 包含所有的整数点 $(\frac{K_1}{2p'} - 2y, y)$, $y =$

$0, 1, \dots, m - l_1$ 。结合假设, $(\lfloor x \rfloor, \lceil y \rceil)$ 和 $(\lceil x \rceil, \lfloor y \rfloor)$ 有一个点在 $y = -\frac{x}{2} + \frac{K_1}{4p'}$ 上, 不妨记为 $(\lceil x \rceil, \lfloor y \rfloor)$, 则 $\min\{\bar{u}^A(\lceil x \rceil, \lfloor y \rfloor), \bar{u}^B(\lceil x \rceil, \lfloor y \rfloor)\} \geq \frac{1}{2}$ 。

综上,在任何一种情形下,都有正方形的一个角 (x', y') 满足 $\min\{\bar{u}^A(x', y'), \bar{u}^B(x', y')\} \geq \frac{1}{2}$, 从而有:

$$\bar{u}^B(x, y)_{KS, p} \geq \min\{\bar{u}^A(x, y)_{KS, p}, \bar{u}^B(x, y)_{KS, p}\} \geq \min\{\bar{u}^A(x', y'), \bar{u}^B(x', y')\} \geq \frac{1}{2}. \quad \text{证毕}$$

引理 6 当 $l_1 > l_2$ 时,对于情形 2 下的问题 $1 | d_1^B < d_2^B | (\sum C_j^A, \sum T_j^B)$, 令 σ^* 是一个系统最优排序, $\sigma_{KS, p}$ 是一个 Pareto 最优的 KS 公平排序, 则有 $\frac{U(\sigma^*) - U(\sigma_{KS, p})}{U(\sigma^*)} \leq \frac{1}{2}$ 。

证明 待证明的结论可等价的转换为,对于任何一个排序 σ , 有 $\frac{u^A(\sigma_{KS, p}) + \gamma u^B(\sigma_{KS, p})}{u^A(\sigma) + \gamma u^B(\sigma)} \geq \frac{1}{2}$, 成立。下面证明

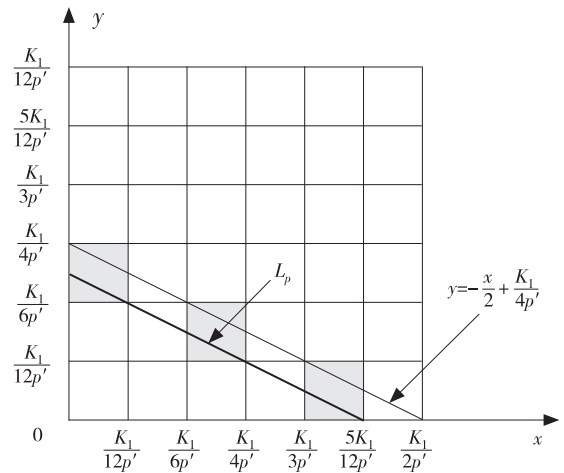


图 2 L_p 的图像

Fig. 2 The graph of L_p

$$\min\{\bar{u}^A(x, y)_{KS, p}, \bar{u}^B(x, y)_{KS, p}\} \geq \frac{1}{2} \quad (3)$$

是成立的。由引理 5 的后半部分证明可知, 当 $\lfloor y \rfloor < -\frac{\lfloor x \rfloor}{2} + \frac{K_1}{4p'}$, 有 (3) 式成立。当 $\lfloor y \rfloor \geq -\frac{\lfloor x \rfloor}{2} + \frac{K_1}{4p'}$ 时, 有 $\bar{u}^B(\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor) \geq \frac{1}{2}$ 。从而 $\min\{\bar{u}^A(\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor), \bar{u}^B(\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor)\} \geq \frac{1}{2}$ 。则有以下式成立:

$$\min\{\bar{u}^A(x, y)_{KS, p}, \bar{u}^B(x, y)_{KS, p}\} \geq \min\{\bar{u}^A(\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor), \bar{u}^B(\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor)\} \geq \frac{1}{2}.$$

又注意到, 对于任何一个排序 σ , 有 $u^A(\sigma) \leq u_{\max}^A = K_1$ 和 $u^B(\sigma) \leq u_{\max}^B = K_2$ 。再结合 (3) 式, 可得到 $\frac{u^A(\sigma_{KS, p})}{u_{\max}^A} \geq \frac{1}{2}$ 和 $\frac{u^B(\sigma_{KS, p})}{u_{\max}^B} \geq \frac{1}{2}$ 。结合一个事实: 对于任何 4 个正整数 a, b, c, d , 如果 $\frac{b}{a} \geq q, \frac{d}{c} \geq q \Rightarrow \frac{b+d}{a+c} \geq q$, 则可以得到:

$$\frac{u^A(\sigma_{KS, p}) + \gamma u^B(\sigma_{KS, p})}{u^A(\sigma) + \gamma u^B(\sigma)} \geq \frac{u^A(\sigma_{KS, p}) + \gamma u^B(\sigma_{KS, p})}{u_{\max}^A + \gamma u_{\max}^B} \geq \frac{1}{2}. \quad \text{证毕}$$

定理 3 当 $l_1 > l_2$ 时, 对于情形 2 下的问题 $1 | d_1^B < d_2^B | (\sum C_j^A, \sum T_j^B)$, 可以得到 $\text{PoF} = \frac{1}{2}$ 。

证明 由引理 6 可知, $\text{PoF} \leq \frac{1}{2}$, 下面证明这个界是紧的。考虑这样一个实例: 代理 A 有 m 个工件, 工件的加工时间均为 p ; 代理 B 有 2 个工件 p_1^B 和 p_2^B , 加工时间均为 p' , 且 $p < p'$ 。工件 p_1^B 和 p_2^B 在交货期 d_1^B 和 d_2^B 前恰有 l_2 个和 l_1 个代理 A 的工件加工, 且满足 $l_1 + l_2$ 是一个偶数。系统效用为 $U(x, y) = u^A(x, y) + \gamma u^B(x, y) = K_1 + (x + 2y)(\gamma p - p')$, 当 $(x, y) = (0, 0)$ 时, 与之相对应的排序是一个最优排序, 即 $U(\sigma^*) = K_1$ 。

下面考虑 KS 公平排序, 对于直线 $y = -\frac{x}{2} + \frac{K_1 K_2}{2K_2 p' + 2K_1 p}$ 上的整数点, 都满足 $\bar{u}^A(x, y) = \bar{u}^B(x, y)$ 。特别地, 可以选择 $(x, y) = \left(\frac{2m - l_1 - l_2}{2}, 0\right)$, 比较容易验证与之相对应的排序是一个 KS 公平排序, 则代理的效用 $u^A\left(\frac{2m - l_1 - l_2}{2}, 0\right) = \frac{K_1}{2}$, $u^B\left(\frac{2m - l_1 - l_2}{2}, 0\right) = \frac{K_2}{2}$ 。根据 PoF 的定义, $\frac{U(\sigma^*) - U(\sigma_{KS, p})}{U(\sigma^*)} = \frac{K_1 - \gamma K_2}{2K_1} \rightarrow \frac{1}{2}$, 当固定 p 的值, 令 $p' \rightarrow \infty$ 。证毕

定理 4 问题 $1 | d_1^B < d_2^B | (\sum C_j^A, \sum T_j^B)$ 在 $l_1 > l_2$ 的情形下, 有 $\text{PoF} = \frac{1}{2}$ 。

2.2 $l_1 \leq l_2$ 的情形

现在, 考虑问题 $1 | d_1^B < d_2^B | (\sum C_j^A, \sum T_j^B)$ 在 $l_1 \leq l_2$ 情形下的公平定价问题, 代理 A 工件的加工时间均为 p , 代理 B 工件的加工时间为 p' , 并且 $p' \geq p$ 。通过两种不同的情形讨论来说明 KS 公平排序集合和公平定价的情况, 并求得 $\text{PoF} \leq \frac{1}{2}$ 。

首先, 给出 Pareto 排序解的结构刻画, 如图 1 所示, 类似地给出 $l_1 \leq l_2$ 情形下代理 A 和代理 B 的费用函数和效用函数(表 2)。

记 $K_3 = u_{\max}^A = 2(m - l_1)p'$, $K_2 = u_{\max}^B = 2P + 3p' - d_1^B - d_2^B$ 。为了保证 $K_2 > 0$, 不妨假设 $l_2 \leq m - 1$ 。表 2 中关于代理 B 的效用函数, 需要分为以下两种情形。

2.2.1 情形 1(当 $l_1 = l_2$ 时) 类似地, 首先给出相应的费用函数:

$$f^B(x, y) = \begin{cases} 0, & x = 0, y = m - l_1 \\ \sum_{i=1}^{m-y} p_i^A + 2p' - d_2^B, & 0 < x \leq m - l_1, y = m - l_1 - x \\ \sum_{i=1}^{m-x-y} p_i^A + \sum_{i=1}^{m-y} p_i^A + 3p' - d_1^B - d_2^B, & 0 \leq x < m - l_1, y < m - l_1 - x \end{cases},$$

进而求出对应的效用函数如下:

$$u^B(x, y) = \begin{cases} K_2, & x = 0, y = m - l_1 \\ P + P_y + p' - d_1^B, & 0 < x \leq m - l_1, y = m - l_1 - x, \\ P_x + 2P_y, & 0 \leq x < m - l_1, y < m - l_1 - x \end{cases}$$

则标准化效用函数可表示为:

$$\bar{u}^B(x, y) = \begin{cases} 1, x=0, y=m-l_1 \\ \frac{P+P_y+p'-d_1^B}{K_2}, 0 < x \leq m-l_1, y=m-l_1-x \\ \frac{P_x+2P_y}{K_2}, 0 \leq x < m-l_1, y < m-l_1-x \end{cases}$$

表 2 代理的费用和效用函数

Tab. 2 Cost and utility functions of agents

费用和效用	代理 A	代理 B
$f_{\min}^i$	$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^j p_i^A$	0
$f_{\max}^i$	$f_{\min}^A + 2(m-l_1)p'$	$2P + 3p' - d_1^B - d_2^B$
$f^i(x, y)$	$f_{\min}^A + (x+2y)p'$	$f^B(x, y)$
$u^i(x, y)$	$K_3 - (x+2y)p'$	$u^B(x, y)$
$\bar{u}^i(x, y)$	$\frac{K_3 - (x+2y)p'}{K_3}$	$\bar{u}^B(x, y)$

下面就以下 3 种子情况分析 KS 公平排序和公平定价的值。

1) 当 $x=0, y=m-l_1$ 时。两个代理的标准化效用为 $\bar{u}^A(0, m-l_1)=0, \bar{u}^B(0, m-l_1)=1$ 。这种情况下与 $(0, m-l_1)$ 相对应的排序是最为平凡的一种公平排序, 从而有 $\text{PoF}=0$ 。

2) 当 $0 < x \leq m-l_1, y=m-l_1-x$ 时。此时两个代理的标准化效用分别为 $\bar{u}^A(x, m-l_1-x) = \frac{K_3 - xp' - 2(m-l_1-x)p'}{K_3} = \frac{xp'}{K_3}, \bar{u}^B(x, m-l_1-x) = \frac{(2m-l_1-x)p + p' - d_1^B}{K_2}$ 。系统效用可以表示成:

$$U(x, m-l_1-x) = xp' + \gamma[(2m-l_1-x)p + p' - d_1^B],$$

则当 $x=m-l_1$ 时, 系统的效用达到最大。令 $\bar{u}^A(x, m-l_1-x) = \bar{u}^B(x, m-l_1-x)$, 可以得到二者的交点:

$$x_0 = \frac{K_3[(2m-l_1)p + p' - d_1^B]}{K_3p + K_2p'} \geq \frac{(2m-l_1)p + p' - d_1^B}{2p} > m-l_1 - \frac{1}{2}。$$

如果 $x_0 \geq m-l_1$, 则 $x_{\text{KS}} = m-l_1$, 从而得到 $\text{PoF}=0$; 如果 $m-l_1 - \frac{1}{2} < x_0 < m-l_1$, 则 $x_{\text{KS}} = \lfloor x_0 \rfloor$ 或 $x_{\text{KS}} = \lceil x_0 \rceil$ 。

由 KS 公平的定义, 这取决于 $\min\{\bar{u}^A(\lfloor x_0 \rfloor, m-l_1-\lfloor x_0 \rfloor), \bar{u}^B(\lfloor x_0 \rfloor, m-l_1-\lfloor x_0 \rfloor)\}$ 与 $\min\{\bar{u}^A(\lceil x_0 \rceil, m-l_1-\lceil x_0 \rceil), \bar{u}^B(\lceil x_0 \rceil, m-l_1-\lceil x_0 \rceil)\}$ 的大小关系。经过验证可以得到 $x_{\text{KS}} = \lceil x_0 \rceil = m-l_1$, 从而得到 $\text{PoF}=0$ 。

3) 当 $0 \leq x < m-l_1, y < m-l_1-x$ 时。这一取值范围可等价转换成 $0 \leq x < m-l_1, 0 \leq y < m-l_1$ 和 $0 \leq x+y < m-l_1$ 。此时有 $\bar{u}^A(x, y) = \frac{K_3 - (x+2y)p'}{K_3}, \bar{u}^B(x, y) = \frac{(x+2y)p}{K_2}$ 。注意到在这种情形下得到的排序都是 Pareto 最优排序。此种情形可以同样地仿照本文 2.1 部分中的情形 2, 推得 $\text{PoF} \leq \frac{1}{2}$ 。

定理 5 对于 $l_1=l_2$ 情形下的问题 $1 | d_1^B < d_2^B | (\sum C_j^A, \sum T_j^B)$, 可以得到 $\text{PoF} \leq \frac{1}{2}$ 。

2.2.2 情形 2(当 $l_1 < l_2$ 时) 同样地, 首先给出代理 B 的费用函数如下:

$$f^B(x, y) = \begin{cases} 0, x=0, y=m-l_1 \\ \sum_{i=1}^{m-y} p_i^A + 2p' - d_2^B, m-l_2 \leq x+y < m-l_1 \\ \sum_{i=1}^{m-x-y} p_i^A + \sum_{i=1}^{m-y} p_i^A + 3p' - d_1^B - d_2^B, 0 \leq x+y < m-l_2 \end{cases},$$

从而得到代理 B 相应的效用函数如下:

$$u^B(x, y) = \begin{cases} K_2, x=0, y=m-l_1 \\ P+P_y+p'-d_1^B, m-l_2 \leq x+y < m-l_1, \\ P_x+2P_y, 0 \leq x+y < m-l_2 \end{cases}$$

可以求出标准化效用函数如下:

$$\bar{u}^B(x, y) = \begin{cases} 1, x=0, y=m-l_1 \\ \frac{P+P_y+p'-d_1^B}{K_2}, m-l_2 \leq x+y < m-l_1, \\ \frac{P_x+2P_y}{K_2}, 0 \leq x+y < m-l_2 \end{cases}$$

下面分 3 种子情况分别讨论 KS 公平排序集合和公平定价的情况。

1) 当 $x=0, y=m-l_1$ 时。两个代理的标准化效用为 $\bar{u}^A(0, m-l_1)=0, \bar{u}^B(0, m-l_1)=1$ 。这种情况下与 $(0, m-l_1)$ 相对应的排序是最为平凡的一种公平排序, 从而有 $PoF=0$ 。

2) 当 $m-l_2 \leq x+y < m-l_1$ 时。注意到在这种情形下, 代理 B 的两个工件应该连续加工, 即 $x=0, m-l_2 \leq y < m-l_1$ 。则有代理的标准化效用为 $\bar{u}^A(0, y) = \frac{K_3-2yp'}{K_3}, \bar{u}^B(0, y) = \frac{(m+y)p+p'-d_1^B}{K_2}$ 。系统效用可以表示成 $U(0, y) = K_3 - 2yp' + \gamma[(m+y)p+p'-d_1^B]$, 很容易验证得到 $U(\sigma^*) = U(0, m-l_2)$ 。令 $\bar{u}^A(0, y) = \bar{u}^B(0, y)$, 得到两者的交点 $y_0 = \frac{K_2K_3 - K_3(m+p+p'-d_1^B)}{K_3p+2K_2p'}$ 。已知 y 的取值范围为 $m-l_2 \leq y < m-l_1$, 可以证明 $y_0 < \frac{m-l_1}{2}$ 是成立的, 从而有 $y_{KS} \leq \frac{m-l_1}{2}$ 。

下面说明 $PoF \leq \frac{1}{2}$ 成立。如果 $y_0 \leq m-l_2$, 则与 $(0, m-l_2)$ 相对应的排序是一个 KS 公平排序, 从而得 $PoF=0$; 如果 $y_0 > m-l_2$, 则 $m-l_2 \leq y_{KS} \leq \frac{m-l_1}{2}$ 。下面证明对于任何一个 KS 公平排序, 有 $\frac{U(\sigma^*) - U(\sigma_{KS, p})}{U(\sigma^*)} < \frac{1}{2}$ 成立。上式可等价转换成证明:

$$\frac{K_3 - 2y_{KS}p' + \gamma[(m+y_{KS})p+p'-d_1^B]}{K_3 - 2(m-l_2)p' + \gamma[(2m-l_2)p+p'-d_1^B]} > \frac{1}{2} \quad (4)$$

整理(4)式可得, 只需证明 $K_3 + 2(m-l_2)p' - 4y_{KS}p' + \gamma[(l_2 + 2y_{KS})p+p'-d_1^B] > 0$ 成立。

结合 $m-l_2 \leq y_{KS} \leq \frac{m-l_1}{2}$ 可知, $K_3 + 2(m-l_2)p' - 4y_{KS}p' > 0$ 。而 $l_2 \leq m-1$, 所以有

$$(l_2 + 2y_{KS})p+p'-d_1^B > (2y_{KS}-1)p \geq p > 0$$

成立。则(4)式是成立的, 从而 $PoF \leq \frac{1}{2}$ 。

3) 当 $0 \leq x+y < m-l_2$ 时。这一取值范围可等价转换成 $0 \leq x < m-l_2, 0 \leq y < m-l_2$ 和 $0 \leq x+y < m-l_2$ 。此时有 $\bar{u}^A(x, y) = \frac{K_3 - (x+2y)p'}{K_3}, \bar{u}^B(x, y) = \frac{(x+2y)p}{K_2}$ 。注意到在这种情形下得到的排序都是 Pareto 最优排序。此种情形的证明类似于本文 2.1 部分中的情形 2, 推得 $PoF \leq \frac{1}{2}$ 。所以有下面的结果成立。

定理 6 对于 $l_1 < l_2$ 情形下的问题 $1 | d_1^B < d_2^B | (\sum C_j^A, \sum T_j^B)$, 可以得到 $PoF \leq \frac{1}{2}$ 。

定理 7 问题 $1 | d_1^B < d_2^B | (\sum C_j^A, \sum T_j^B)$ 在 $l_1 \leq l_2$ 的情形下, 可以得到 $PoF \leq \frac{1}{2}$ 。

定理 8 对于问题 $1 | d_1^B < d_2^B | (\sum C_j^A, \sum T_j^B)$, 有 $PoF = \frac{1}{2}$ 。

3 结束语

本文研究了两代理单机环境下的公平定价问题, 其中一个代理最小化其总完工时间, 另一个代理最小化总延误, 并且该代理有两个交货期的情形。指出所有的 KS 公平排序是可以在线性时间内找到的, 并得到公平定价

的值为 $\frac{1}{2}$,且通过举例说明了这个界是紧的。对于未来的研究,拟关注其他排序模型的公平定价问题。

参考文献:

- [1] AGNETIS A, MIRCHANDANI P B, PACCIARELL D, et al. Scheduling problems with two competing agents[J]. Operations Research, 2004, 52(2): 229-242.
- [2] BAKER K R, SMITH J C. A multiple-criterion model for machine scheduling[J]. Journal of Scheduling, 2003(6): 7-16.
- [3] LEUNG J Y T, PINEDO M, WAN G H. Competitive two-agent scheduling and its applications[J]. Operations Research, 2010, 58(2): 458-469.
- [4] BERTSIMAS D, FARIAS V F, TRICHAKIS N. The price of fairness[J]. Operations Research, 2011, 59(1): 17-31.
- [5] CARAGIANNIS I, KAKLAMANIS C, KANELLOPOULOS P, et al. The efficiency of fair division[J]. Theory of Computing System, 2012, 50(4): 589-610.
- [6] AGNETIS A, CHEN B, NICOSIA G, et al. Price of fairness in two-agent single-machine scheduling problems[J]. European Journal of Operational Research, 2019, 276(1): 79-87.
- [7] ZHANG Y B, ZHANG Z, LIU Z H. The price of fairness for a two-agent scheduling game minimizing total completion time[EB/OL]. (2020-05-17)[2021-09-16]. <https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10878-020-00581-5>.
- [8] 张新功, 刘甲玉, 崔同欣. 误工工件个数和最大费用函数的单机双代理 KS 公平定价问题[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2020, 37(1): 16-21.
ZHANG X G, LIU J Y, CUI T X. Kalai-Smorodinsky price of fairness in two-agent single-machine scheduling problem to minimize the number of tardy jobs and maximum cost function[J]. Journal of Chongqing Normal University (Nature Science), 2020, 37(1): 16-21.

Operations Research and Cybernetics

Price of Fairness in Two-Agent Single-Machine to Minimize the Total Completion Time and the Total Tardiness

CHONG Beibei, FAN Baoqiang

(School of Mathematics and Statistics, Ludong University, Yantai Shandong 264000, China)

Abstract: [Purposes] It considers the price of fairness in two-agent scheduling game, in which one agent minimizes total completion time and another agent minimizes total tardiness in a single machine environment. [Methods] Jobs of each agent have the same processing time, where the first agent seeks to minimize the total completion time, the second agent is to minimize the total tardiness, and the second agent's job has two different delivery times; the problem is analyzed in different cases. [Findings] All of the KS-fairness schedules can be found in logarithmic time, and the price of fairness equals to a half, an instance illustrated the bound is tight. [Conclusions] It generalizes the results which have existed and enriches the content about price of fairness of two agents in single-machine environment.

Keywords: two agents; KS-fairness; utility function; price of fairness

(责任编辑 方 兴)