

## 两阶段混合价格折扣的库存问题建模与求解<sup>\*</sup>

陈见标<sup>1</sup>, 陆宇海<sup>2</sup>, 柳 颖<sup>1</sup>

(1. 广州工商学院 管理学院, 广州 510850; 2. 江西财经大学 现代经济管理学院, 南昌 330013)

**摘要:**【目的】考虑单位库存持有成本是否依赖于产品价格,引入“0-1”二元变量,构建了先全量折扣后增量折扣和先增量折扣后全量折扣的两阶段价格折扣混合整数非线性规划模型。【方法】分析了模型解的唯一存在性,并给出了算法过程。【结果】通过算例表明先增量折扣后全量折扣更有利于激励顾客进行大批量订货。【结论】研究成果可以解决供应商采用两阶段混合价格折扣模式制定订货批量折扣点,同时可以解决顾客在面临混合价格折扣时正确制定订货批量。

**关键词:**混合价格折扣;库存;建模;算法

**中图分类号:**O227;F274

**文献标志码:**A

**文章编号:**1672-6693(2022)01-0118-09

库存决策系统中一个非常重要的决策要素就是价格<sup>[1]</sup>。1915 年,Harris<sup>[2]</sup>把价格假定为常数,建立了第一个经济订货批量(Economic order quantity,EOQ)模型,被称为经典“EOQ 模型”,开启了库存问题的定量研究。1963 年,Hadley 等人<sup>[3]</sup>引入价格折扣对经典“EOQ 模型”进行改进,价格折扣对库存系统的影响逐渐得到关注。潘大连等人<sup>[4]</sup>是国内较早对库存问题进行定量研究的学者,他们对北京汽车厂的库存管理进行为期 10 个月的研究和实施,在保障生产、减少库存储备、加速资金周转等方面取得非常显著的成绩。企业通过价格折扣合约来协调供需双方,以达到最优订货批量,主要包括全量折扣和增量折扣两种形式<sup>[5]</sup>。全量折扣是指当顾客订货批量达到某一折扣点时,所有产品按该折扣点的价格支付费用,目前已有学者开展了全量折扣下的库存问题定量研究<sup>[6-9]</sup>;增量折扣是指当顾客订货批量超过某一折扣点时,超出折扣点的部分按该折扣点的价格支付费用,Rubin 等学者开展了这方面的研究<sup>[10-11]</sup>。一些学者把价格折扣和运费折扣相结合,研究双重折扣的经济订货批量模型<sup>[12-15]</sup>,以及对时间较为敏感的易损耗品的不同价格折扣下的库存问题进行研究<sup>[16-18]</sup>。另外,还有学者考虑多种情形下对带价格折扣的库存问题展开研究,如需求信息不对称<sup>[19]</sup>、需求随机分布<sup>[20-22]</sup>、零售商与生产商博弈<sup>[23-24]</sup>等。

以上研究主要针对一种价格折扣,或者把两种价格折扣进行对比分析,目前考虑混合价格折扣情形下库存问题的定量研究还比较少。混合价格折扣是指全量折扣和增量折扣混合使用,顾客在订货批量达到某一折扣点时,按全量折扣(或超出部分按增量折扣)支付费用,订货批量达到下一个折扣点时,超出部分按增量折扣(或全量折扣)支付费用。本文在上述研究的基础上,引入“0-1”二元变量,考虑两阶段价格折扣和单位库存持有成本依赖于产品价格与不依赖于产品价格的情形下,建立了先全量折扣后增量折扣和先增量折扣后全量折扣的混合整数非线性规划模型,分析了 4 种模型解的唯一存在性,给出了算法过程。最后,通过算例比较了 4 种情形下对最优订货批量的影响。

### 1 两阶段混合价格折扣的库存模型建立

考虑一个顾客向一个供应商订购一种产品,以顾客最低订货总成本为目标,建立数学模型,假设条件如下:

1) 采用订货点订货方式,顾客库存下降为 0 时发出订货需求;2) 瞬时补货,不存在补货提前期;3) 不允许缺货;

<sup>\*</sup> 收稿日期:2021-03-08 修回日期:2021-10-20 网络出版时间:2022-02-09 14:31

资助项目:国家自然科学基金(No. 71761003);国家社会科学基金(No. 16BJY085);广东省高校重点平台青年创新人才类项目(No. 2019WQNCX138)

第一作者简介:陈见标,男,讲师,研究方向为运筹学、物流与供应链管理,E-mail:cjbone@163.com

网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20220209.1206.012.html

4) 单位时间的需求量均匀且连续;5) 产品不发生变质。

本文主要对以下 4 种情形建立模型:

情形 1: 价格折扣为先全量折扣后增量折扣, 单位库存持有成本不依赖于产品单价。

情形 2: 价格折扣为先增量折扣后全量折扣, 单位库存持有成本不依赖于产品单价。

情形 3: 价格折扣为先全量折扣后增量折扣, 单位库存持有成本依赖于产品单价。

情形 4: 价格折扣为先增量折扣后全量折扣, 单位库存持有成本依赖于产品单价。

所建立的 4 种模型结构大致相同, 主要区别在于全量折扣和增量折扣的先后顺序以及单位库存持有成本是否依赖于产品单价。

首先对模型的符号进行设定: 产品单价为  $c$ ; 每次补货启动费用为  $A$ ; 先考虑单位库存持有成本不依赖于产品价格, 单位库存持有成本为  $h$ ; 年需求量为  $D$ , 每次订货批量为  $Q$ 。在经典的 EOQ 模型<sup>[2]</sup>和引入价格折扣的 EOQ 模型<sup>[3]</sup>基础上, 更进一步细化考虑同时存在全量折扣和增量折扣的混合折扣条件, 构建 4 种两阶段混合价格折扣的库存模型如下。

**模型 1** 价格折扣为先全量折扣后增量折扣。根据顾客订货批量的大小, 供应商给予顾客两种不同的价格折扣。当顾客订货批量满足  $Q_0 < Q < Q_1$  时, 产品不打折, 价格为  $c_0$ , 其中  $Q_0 = 0$ ; 当顾客订货批量满足  $Q_1 \leq Q < Q_2$  时, 全部产品给予折扣单价  $c_1$ ; 当顾客订货批量满足  $Q \geq Q_2$  时, 给予  $Q_2$  数量的产品折扣单价  $c_1$ , 给予剩余  $Q - Q_2$  数量的产品折扣单价  $c_2$ 。其中:  $c_0 > c_1 > c_2 > 0$ 。引入“0-1”二元变量  $y_k, k=0, 1, 2$ , 当  $Q_0 < Q < Q_1$  时,  $y_0 = 1, y_1 = 0, y_2 = 0$ ; 当  $Q_1 \leq Q < Q_2$  时,  $y_0 = 0, y_1 = 1, y_2 = 0$ ; 当  $Q \geq Q_2$  时,  $y_0 = 0, y_1 = 0, y_2 = 1$ 。因此, 顾客的订货总成本为:

$$C_{\text{total}} = \frac{AD}{Q} + [q_0 c_0 y_0 + (Q_1 + q_1) c_1 y_1 + (Q_2 c_1 + q_2 c_2) y_2] \frac{D}{Q} + \frac{Qh}{2}, \quad (1)$$

其中:  $q_k$  为  $Q$  在  $[Q_k, Q_{k+1})$  范围的订货量,  $q_k \geq 0$ 。因此可知:

$$Q = q_0 y_0 + (Q_1 + q_1) y_1 + (Q_2 + q_2) y_2, \quad (2)$$

$$q_k = (Q - Q_k) \cdot y_k + (Q_{k+1} - Q_k) \sum_{j=k+1}^2 y_j, k=0, 1, 2, j=1, 2. \quad (3)$$

$y_k$  满足:

$$\sum_{k=0}^2 y_k = 1, y_k = 0, 1, k=0, 1, 2. \quad (4)$$

同时,  $q_k$  满足:

$$\begin{cases} 0 \leq q_k \leq Q_{k+1} - Q_k, k=0, 1 \\ q_k \geq 0, k=2 \end{cases}. \quad (5)$$

显然, 由(3)式可知, (5)式其实只对对应于  $k: y_k = 1$  的  $q_k$  起作用。

以追求(1)式顾客的订货总成本最低为目标函数, (2)~(5)式为约束条件, 即可构建情形 1 的混合整数非线性规划数学模型。其中:  $Q, q_k, y_k$  为模型的决策变量,  $j=1, 2, k=0, 1, 2$ 。

**模型 2** 价格折扣为先增量折扣后全量折扣。根据顾客订货批量的大小, 供应商给予顾客两个不同的价格折扣。当顾客订货批量满足  $Q_0 < Q < Q_1$  时, 产品不打折, 价格为  $c_0$ , 其中  $Q_0 = 0$ ; 当顾客订货批量满足  $Q_1 \leq Q < Q_2$  时,  $Q_1$  数量的产品价格为  $c_0$ ,  $Q - Q_1$  数量的产品给予折扣单价  $c_1$ ; 当顾客订货批量满足  $Q \geq Q_2$  时, 给予全部数量的产品折扣单价  $c_2$ ;  $c_0 > c_1 > c_2 > 0$ 。同样引入“0-1”二元变量  $y_k, k=0, 1, 2$ , 当  $Q_0 < Q < Q_1$  时,  $y_0 = 1, y_1 = 0, y_2 = 0$ ; 当  $Q_1 \leq Q < Q_2$  时,  $y_0 = 0, y_1 = 1, y_2 = 0$ ; 当  $Q \geq Q_2$  时,  $y_0 = 0, y_1 = 0, y_2 = 1$ 。以及引入当顾客订货批量  $Q$  满足在  $[Q_k, Q_{k+1})$  范围的订货量  $q_k$ 。

因此, 顾客的订货总成本为:

$$C_{\text{total}} = \frac{AD}{Q} + [q_0 c_0 y_0 + (Q_1 c_0 + q_1 c_1) y_1 + (Q_2 + q_2) c_2 y_2] \frac{D}{Q} + \frac{Qh}{2}. \quad (6)$$

以追求(5)式顾客的订货总成本最低为目标函数, (2)~(5)式为约束条件, 即可构建情形 2 的混合整数非线性规划数学模型。其中:  $Q, q_k, y_k$  为模型的决策变量,  $j=1, 2, k=0, 1, 2$ 。

下面对情形 3 和情形 4 进行建模,用  $f$  表示单位库存持有成本依赖于产品单价时的年库存费率。

**模型 3** 价格折扣为先全量折扣后增量折扣,单位库存持有成本依赖于产品单价,年费率为  $f$ 。模型 3 的具体约定与模型 1 相同。当顾客订货批量满足  $Q_0 < Q < Q_1$  时,单位库存持有成本为  $\frac{fc_0 y_0}{2}$ ,其中  $Q_0 = 0$ ;当顾客订货批量满足  $Q_1 \leq Q < Q_2$  时,单位库存持有成本为  $\frac{fc_1 y_1}{2}$ ;当顾客订货批量满足  $Q \geq Q_2$  时,产品的平均单价为  $\frac{Q_2 c_1 + q_2 c_2}{Q}$ ,单位库存持有成本为  $\frac{fy_2(Q_2 c_1 + q_2 c_2)}{2Q}$ 。因此,顾客的订货总成本为:

$$C_{\text{total}} = \frac{AD}{Q} + [q_0 c_0 y_0 + (Q_1 + q_1) c_1 y_1 + (Q_2 c_1 + q_2 c_2) y_2] \frac{D}{Q} + \frac{Qf}{2} \left( c_0 y_0 + c_1 y_1 + \frac{Q_2 c_1 + q_2 c_2}{Q} \cdot y_2 \right). \quad (7)$$

以追求(6)式顾客的订货总成本最低为目标函数,(2)~(5)式为约束条件,即可构建情形 3 的混合整数非线性规划数学模型。其中: $Q, q_k, y_k$  为模型的决策变量, $j=1,2, k=0,1,2$ 。

**模型 4** 价格折扣为先增量折扣后全量折扣,单位库存持有成本依赖于产品单价。模型 4 的具体约定与模型 2 相同。当顾客订货批量满足  $Q_0 < Q < Q_1$  时,单位库存持有成本为  $\frac{fc_0 y_0}{2}$ ,其中  $Q_0 = 0$ ;当顾客订货批量满足  $Q_1 \leq Q < Q_2$  时,产品的平均单价为  $\frac{Q_1 c_0 + q_1 c_1}{Q}$ ,单位库存持有成本为  $\frac{fy_1(Q_1 c_0 + q_1 c_1)}{2Q}$ ;当顾客订货批量满足  $Q \geq Q_2$  时,单位库存持有成本为  $\frac{fy_2 c_2}{2}$ 。因此,顾客的订货总成本为:

$$C_{\text{total}} = \frac{AD}{Q} + [q_0 c_0 y_0 + (Q_1 c_0 + q_1 c_1) y_1 + (Q_2 + q_2) c_2 y_2] \frac{D}{Q} + \frac{Qf}{2} \left( c_0 y_0 + \frac{Q_1 c_0 + q_1 c_1}{Q} \cdot y_1 + c_2 y_2 \right). \quad (8)$$

以追求(7)式顾客的订货总成本最低为目标函数,(2)~(5)式为约束条件,即可构建情形 4 的混合整数非线性规划数学模型。其中: $Q, q_k, y_k$  为模型的决策变量, $j=1,2, k=0,1,2$ 。

为方便,可以把目标函数  $C_{\text{total}}$  记作  $C_{\text{total}}(Q, \mathbf{q}, \mathbf{y})$ ,把决策变量  $q_k$  记作为向量  $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2)$ ;把决策变量  $y_k$  记作为向量  $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2)$ 。

## 2 模型分析与求解

当  $y_k = 1$  时,  $y_j = 0, j \neq k$ , 易知  $q_k = Q - Q_k, k=0,1,2$ ; 同理, 当  $y_j = 1$  时,  $y_k = 0, j=k+1$ , 易知  $q_k = Q_{k+1} - Q_k, j=1,2$ 。

### 2.1 模型 1 解的存在性分析与求解过程

**定理 1** 存在  $\mathbf{y}^* = (y_0, y_1, y_2)$ ,  $\sum_{k=0}^2 y_k = 1, y_k = 0, 1, k=0,1,2$ , 使得(1)式中订货批量  $Q$  在  $Q=Q^*$  处有唯一最优解。

**证明** 由约束条件(2),(4)式可以把(1)式进行变形:

$$C_{\text{total}}(Q, \mathbf{y}) = \frac{AD}{Q} + \{Qc_0 y_0 + Qc_1 y_1 + [Q_2 c_1 + (Q - Q_2) c_2] y_2\} \frac{D}{Q} + \frac{Qh}{2}. \quad (9)$$

对(9)式求  $Q$  的一阶偏导和二阶偏导,得到(10),(11)式:

$$\frac{\partial C_{\text{total}}(Q, \mathbf{y})}{\partial Q} = \frac{D(Q_2 c_2 y_2 - A - Q_2 c_1 y_2)}{Q^2} + \frac{h}{2}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 C_{\text{total}}(Q, \mathbf{y})}{\partial^2 Q} = \frac{2D(A + Q_2 c_1 y_2 - Q_2 c_2 y_2)}{Q^3}. \quad (11)$$

显然,由  $c_1 > c_2$  可得  $\frac{\partial^2 C_{\text{total}}(Q, \mathbf{y})}{\partial^2 Q} = \frac{2D(A + Q_2 c_1 y_2 - Q_2 c_2 y_2)}{Q^3} > 0$ 。

因此,存在  $\mathbf{y}^*$ , 在满足  $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2), \sum_{k=0}^2 y_k = 1, y_k = 0, 1, k=0,1,2$  的条件下,  $C_{\text{total}}(Q, \mathbf{y}^*)$  是凹函数。

令  $\frac{\partial C_{\text{total}}(Q, \mathbf{y})}{\partial Q} = \frac{D(Q_2 c_2 y_2 - A - Q_2 c_1 y_2)}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0$ , 求得  $Q=Q^*$ , 使得(9)式在  $(Q^*, \mathbf{y}^*)$  处有极小值。因此,

(1)式中订货批量  $Q$  在  $Q=Q^*$  处有唯一最优解。

证毕

具体算法如下。

第 1 步,令  $y_1=1$ ,  $\frac{\partial C_{\text{total}}(Q, \mathbf{y})}{\partial Q} = \frac{D(Q_2 c_2 y_2 - A - Q_2 c_1 y_2)}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0$ , 则  $\frac{-AD}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0$ ,  $Q' = \sqrt{\frac{2AD}{h}}$ 。

第 2 步,若  $Q' < Q_1$ , 则令  $y_0=1$  代入(1)式,得到(12)式:

$$C_{\text{total}} = \frac{AD}{Q} + Dc_0 + \frac{Qh}{2}。 \quad (12)$$

把  $Q' = \sqrt{\frac{2AD}{h}}$  代入(12)式得到:  $C'_{\text{total}} = \frac{AD}{Q'} + Dc_0 + \frac{Q'h}{2}$ 。把  $y_1=1, Q_1, q_k=q_1=0$  代入(1)式得到:  $C_{\text{total}_1} = \frac{AD}{Q_1} +$

$Dc_1 + \frac{Q_1 h}{2}$ 。对比  $C'_{\text{total}}$  和  $C_{\text{total}_1}$  的大小,若  $C'_{\text{total}} < C_{\text{total}_1}$ , 则  $Q^* = Q', y_k = y_0 = 1, q_k = q_0 = Q'$ , 最优订货总成本

$C^*_{\text{total}} = \frac{AD}{Q'} + Dc_0 + \frac{Q'h}{2}$ ; 若  $C'_{\text{total}} \geq C_{\text{total}_1}$ , 则  $Q^* = Q_1, y_k = y_1 = 1, q_k = q_1 = 0, C^*_{\text{total}} = \frac{AD}{Q_1} + Dc_1 + \frac{Q_1 h}{2}$ 。

第 3 步,若  $Q_1 \leq Q' < Q_2$ , 则  $Q^* = Q', y_k = y_1 = 1, q_k = q_1 = Q' - Q_1, C^*_{\text{total}} = \frac{AD}{Q'} + Dc_1 + \frac{Q'h}{2}$ 。

第 4 步,若  $Q' \geq Q_2$ , 则  $Q^* = Q', y_k = y_2 = 1, q_k = q_2 = Q' - Q_2, C^*_{\text{total}} = \frac{AD}{Q'} + [Q_2 c_1 + (Q' - Q_2) c_2] \frac{D}{Q'} + \frac{Q'h}{2}$ 。

## 2.2 模型 2 解的存在性分析与求解过程

**定理 2** 存在  $\mathbf{y}^* = (y_0, y_1, y_2)$ ,  $\sum_{k=0}^2 y_k = 1, y_k = 0, 1, k=0, 1, 2$ , 使得(6)式中订货批量  $Q$  在  $Q=Q^*$  处有唯一最优解。

**证明** 由约束条件(2), (4)式可以把(6)式进行变形:

$$C_{\text{total}}(Q, \mathbf{y}) = \frac{AD}{Q} + \{Qc_0 y_0 + [Q_1 c_0 + (Q - Q_1) c_1] y_1 + Qc_2 y_2\} \frac{D}{Q} + \frac{Qh}{2}。 \quad (13)$$

对(13)式求  $Q$  的一阶偏导和二阶偏导, 得到(14), (15)式:

$$\frac{\partial C_{\text{total}}(Q, \mathbf{y})}{\partial Q} = \frac{D(Q_1 c_1 y_1 - Q_1 c_0 y_1 - A)}{Q^2} + \frac{h}{2}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 C_{\text{total}}(Q, \mathbf{y})}{\partial^2 Q} = \frac{2D(Q_1 c_0 y_1 + A - Q_1 c_1 y_1)}{Q^3}。 \quad (15)$$

显然, 由  $c_0 > c_1$  可得  $\frac{\partial^2 C_{\text{total}}(Q, \mathbf{y})}{\partial^2 Q} = \frac{2D(Q_1 c_0 y_1 + A - Q_1 c_1 y_1)}{Q^3} > 0$ 。

因此, 存在  $\mathbf{y}^*$ , 在满足  $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2)$ ,  $\sum_{k=0}^2 y_k = 1, y_k = 0, 1, k=0, 1, 2$  的条件下,  $C_{\text{total}}(Q, \mathbf{y}^*)$  是凹函数。

令  $\frac{\partial C_{\text{total}}(Q, \mathbf{y})}{\partial Q} = \frac{D(Q_1 c_1 y_1 - Q_1 c_0 y_1 - A)}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0$ , 求得  $Q=Q^*$ , 使得(13)式在  $(Q^*, \mathbf{y}^*)$  处有极小值。因

此, (6)式中订货批量  $Q$  在  $Q=Q^*$  处有唯一最优解。

证毕

具体算法如下。

第 1 步,令  $y_2=1$ ,  $\frac{\partial C_{\text{total}}(Q, \mathbf{y})}{\partial Q} = \frac{D(Q_1 c_1 y_1 - Q_1 c_0 y_1 - A)}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0$ , 则  $\frac{-AD}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0$ ,  $Q' = \sqrt{\frac{2AD}{h}}$ 。

第 2 步,若  $Q' \geq Q_2$ , 则  $Q^* = Q', y_k = y_2 = 1, q_k = q_2 = Q' - Q_2, C^*_{\text{total}} = \frac{AD}{Q'} + Dc_2 + \frac{Q'h}{2}$ 。

第 3 步,若  $Q_1 \leq Q' < Q_2$ , 则令  $y_1=1$ , 把  $Q'$  和  $y_1$  代入(13)式, 得到:  $C_{\text{total}_1} = \frac{AD}{Q'} + Dc_1 + \frac{DQ_1(c_0 - c_1)}{Q'} + \frac{Q'h}{2}$ 。

把  $y_2=1, Q_2, q_k=q_2=0$  代入(6)式得到:  $C_{\text{total}_2} = \frac{AD}{Q_2} + Dc_2 + \frac{Q_2 h}{2}$ 。对比  $C_{\text{total}_1}$  和  $C_{\text{total}_2}$  的大小, 若  $C_{\text{total}_1} \geq C_{\text{total}_2}$ , 则

$Q^* = Q_2, y_k = y_2 = 1, q_k = q_2 = 0, C^*_{\text{total}} = \frac{AD}{Q_2} + Dc_2 + \frac{Q_2 h}{2}$ ; 若  $C_{\text{total}_1} < C_{\text{total}_2}$ , 则  $Q^* = Q', y_k = y_1 = 1, q_k = q_1 = Q' - Q_1$ ,

$$C_{\text{total}}^* = \frac{AD}{Q'} + Dc_1 + \frac{DQ_1(c_0 - c_1)}{Q'} + \frac{Q'h}{2}。$$

第 4 步, 若  $Q' < Q_1$ , 则:  $C'_{\text{total}} = \frac{AD}{Q'} + Dc_0 + \frac{Q'h}{2}$ , 对比  $C'_{\text{total}}$  和  $C_{\text{total}_2}$  的大小, 若  $C'_{\text{total}} \geq C_{\text{total}_2}$ , 则  $Q^* = Q_2, y_k = y_2 = 1, q_k = q_2 = 0, C_{\text{total}}^* = \frac{AD}{Q_2} + Dc_2 + \frac{Q_2 h}{2}$ ; 若  $C'_{\text{total}} < C_{\text{total}_2}$ , 则  $Q^* = Q', y_k = y_0 = 1, q_k = q_0 = Q', C_{\text{total}}^* = \frac{AD}{Q'} + Dc_0 + \frac{Q'h}{2}$ 。

### 2.3 模型 3 解的存在性分析与求解过程

**定理 3** 存在  $y^* = (y_0, y_1, y_2)$ ,  $\sum_{k=0}^2 y_k = 1, y_k = 0, 1, k = 0, 1, 2$ , 使得(7)式中订货批量  $Q$  在  $Q = Q^*$  处有唯一最优解。

**证明** 由约束条件(2), (4)式可以把(7)式进行变形:

$$C_{\text{total}}(Q, y) = \frac{AD}{Q} + \{Qc_0 y_0 + Qc_1 y_1 + [Q_2 c_1 + (Q - Q_2)c_2]y_2\} \frac{D}{Q} + \frac{Qf}{2} \left[ c_0 y_0 + c_1 y_1 + \frac{Q_2(c_1 - c_2) + Qc_2}{Q} \cdot y_2 \right]。 \quad (16)$$

对(16)式求  $Q$  的一阶偏导和二阶偏导, 得到(17), (18)式:

$$\frac{\partial C_{\text{total}}(Q, y)}{\partial Q} = \frac{D(Q_2 c_2 y_2 - A - Q_2 c_1 y_2)}{Q^2} + \frac{f(c_0 y_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2)}{2}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 C_{\text{total}}(Q, y)}{\partial^2 Q} = \frac{2D(A + Q_2 c_1 y_2 - Q_2 c_2 y_2)}{Q^3}。 \quad (18)$$

显然, 由  $c_1 > c_2$  可得  $\frac{\partial^2 C_{\text{total}}(Q, y)}{\partial^2 Q} = \frac{2D(A + Q_2 c_1 y_2 - Q_2 c_2 y_2)}{Q^3} > 0$ 。

因此, 存在  $y^*$ , 在满足  $y = (y_0, y_1, y_2)$ ,  $\sum_{k=0}^2 y_k = 1, y_k = 0, 1, k = 0, 1, 2$  的条件下,  $C_{\text{total}}(Q, y^*)$  是凹函数。

令  $\frac{\partial C_{\text{total}}(Q, y)}{\partial Q} = \frac{D(Q_2 c_2 y_2 - A - Q_2 c_1 y_2)}{Q^2} + \frac{f(c_0 y_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2)}{2} = 0$ , 求得  $Q = Q^*$ , 使得(16)式在  $(Q^*, y^*)$

处有极小值。因此, (7)式中订货批量  $Q$  在  $Q = Q^*$  处有唯一最优解。

证毕

具体算法如下。

第 1 步, 令  $y_1 = 1$ ,  $\frac{\partial C_{\text{total}}(Q, y)}{\partial Q} = \frac{D(Q_2 c_2 y_2 - A - Q_2 c_1 y_2)}{Q^2} + \frac{f(c_0 y_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2)}{2} = 0$ , 则  $\frac{-AD}{Q^2} + \frac{fc_1}{2} = 0$ ,

$$Q' = \sqrt{\frac{2AD}{fc_1}}。$$

第 2 步: 若  $Q' < Q_1$ , 则令  $y_0 = 1$  代入(7)式, 得到(19)式:

$$C_{\text{total}} = \frac{AD}{Q} + Dc_0 + \frac{Qfc_0}{2}, \quad (19)$$

令  $Q'_0 = \sqrt{\frac{2AD}{fc_0}}$  代入(19)式得到:  $C'_{\text{total}} = \frac{AD}{Q'_0} + Dc_0 + \frac{Q'_0 h}{2}$ 。显然,  $c_0 > c_1$ , 所以  $Q'_0 < Q'$ , 把  $y_1 = 1, Q_1$  和  $q_k = q_1 = 0$

代入(7)式得到:  $C_{\text{total}_1} = \frac{AD}{Q_1} + Dc_1 + \frac{Q_1 fc_1}{2}$ 。对比  $C'_{\text{total}_0}$  和  $C_{\text{total}_1}$  的大小, 若  $C'_{\text{total}_0} < C_{\text{total}_1}$ , 则  $Q^* = Q'_0, y_k = y_0 = 1$ ,

$q_k = q_0 = Q'_0, C_{\text{total}}^* = \frac{AD}{Q'_0} + Dc_0 + \frac{Q'_0 fc_0}{2}$ ; 若  $C'_{\text{total}_0} \geq C_{\text{total}_1}$ , 则  $Q^* = Q_1, y_k = y_1 = 1, q_k = q_1 = 0, C_{\text{total}}^* = \frac{AD}{Q_1} + Dc_1 + \frac{Q_1 fc_1}{2}$ 。

第 3 步, 若  $Q_1 \leq Q' < Q_2$ , 则  $Q^* = Q', y_k = y_1 = 1, q_k = q_1 = Q' - Q_1, C_{\text{total}}^* = \frac{AD}{Q'} + Dc_1 + \frac{Q' fc_1}{2}$ 。

第 4 步, 若  $Q' \geq Q_2$ , 则  $Q^* = Q', y_k = y_2 = 1, q_k = q_2 = Q' - Q_2, C_{\text{total}}^* = \frac{AD}{Q'} + [Q_2 c_1 + (Q' - Q_2)c_2] \frac{D}{Q'} + \frac{fQ_2(c_1 - c_2) + fQ'c_2}{2}$ 。

## 2.4 模型 4 解的存在性分析与求解过程

**定理 4** 存在  $\mathbf{y}^* = (y_0, y_1, y_2)$ ,  $\sum_{k=0}^2 y_k = 1$ ,  $y_k = 0, 1, k = 0, 1, 2$ , 使得(8)式中订货批量  $Q$  在  $Q = Q^*$  处有唯一最优解。

**证明** 由约束条件(2)式和(4)式可以把(8)式进行变形:

$$C_{\text{total}}(Q, \mathbf{y}) = \frac{AD}{Q} + \{Qc_0y_0 + [(Q_1c_0 + (Q - Q_1)c_1]y_1 + Qc_2y_2\} \frac{D}{Q} + \frac{Qf}{2} \left[ c_0y_0 + \frac{Q_1(c_0 - c_1) + Qc_1}{Q} \cdot y_1 + c_2y_2 \right]. \quad (20)$$

对(20)式求  $Q$  的一阶偏导和二阶偏导, 得到(21), (22)式:

$$\frac{\partial C_{\text{total}}(Q, \mathbf{y})}{\partial Q} = \frac{D(Q_1c_1y_1 - Q_1c_0y_1 - A)}{Q^2} + \frac{f(c_0y_0 + c_1y_1 + c_2y_2)}{2}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 C_{\text{total}}(Q, \mathbf{y})}{\partial^2 Q} = \frac{2D(Q_1c_0y_1 + A - Q_1c_1y_1)}{Q^3}. \quad (22)$$

显然, 由  $c_0 > c_1$  可得  $\frac{\partial^2 C_{\text{total}}(Q, \mathbf{y})}{\partial^2 Q} = \frac{2D(Q_1c_0y_1 + A - Q_1c_1y_1)}{Q^3} > 0$ 。

因此, 存在  $\mathbf{y}^*$ , 在满足  $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2)$ ,  $\sum_{k=0}^2 y_k = 1$ ,  $y_k = 0, 1, k = 0, 1, 2$  的条件下,  $C_{\text{total}}(Q, \mathbf{y}^*)$  是凹函数。

令  $\frac{\partial C_{\text{total}}(Q, \mathbf{y})}{\partial Q} = \frac{D(Q_1c_1y_1 - Q_1c_0y_1 - A)}{Q^2} + \frac{fQ(c_0y_0 + c_1y_1 + c_2y_2)}{2} = 0$ , 求得  $Q = Q^*$ , 使得(20)式在

$(Q^*, \mathbf{y}^*)$  处有极小值。因此, (8)式中订货批量  $Q$  在  $Q = Q^*$  处有唯一最优解。

证毕

具体算法如下。

第 1 步, 令  $y_2 = 1$ ,  $\frac{\partial C_{\text{total}}(Q, \mathbf{y})}{\partial Q} = \frac{D(Q_1c_1y_1 - Q_1c_0y_1 - A)}{Q^2} + \frac{fc_2}{2} = 0$ , 则  $\frac{-AD}{Q^2} + \frac{fc_2}{2} = 0$ ,  $Q' = \sqrt{\frac{2AD}{fc_2}}$ 。

第 2 步, 若  $Q' \geq Q_2$ , 则  $Q^* = Q'$ ,  $y_k = y_2 = 1$ ,  $q_k = q_2 = Q' - Q_2$ ,  $C_{\text{total}}^* = \frac{AD}{Q'} + Dc_2 + \frac{Q'fc_2}{2}$ 。

第 3 步, 若  $Q_1 \leq Q' < Q_2$ , 则令  $y_1 = 1$ , 把  $Q'$  和  $y_1$  代入(20)式, 得到:  $C_{\text{total}_1} = \frac{AD}{Q'} + Dc_1 + \frac{DQ_1(c_0 - c_1)}{Q'} + \frac{fQ_1(c_0 - c_1) + fQ'c_1}{2}$ , 把  $y_2 = 1, Q_2$  和  $q_k = q_2 = 0$  代入(8)式得到:  $C_{\text{total}_2} = \frac{AD}{Q_2} + Dc_2 + \frac{Q_2fc_2}{2}$ 。对比  $C_{\text{total}_1}$  和  $C_{\text{total}_2}$  的大小, 若  $C_{\text{total}_1} \geq C_{\text{total}_2}$ , 则  $Q^* = Q_2$ ,  $y_k = y_2 = 1$ ,  $q_k = q_2 = 0$ ,  $C_{\text{total}}^* = \frac{AD}{Q_2} + Dc_2 + \frac{Q_2fc_2}{2}$ ; 若  $C_{\text{total}_1} < C_{\text{total}_2}$ , 则  $Q^* = Q'$ ,  $y_k = y_1 = 1$ ,  $q_k = q_1 = Q' - Q_1$ ,  $C_{\text{total}}^* = \frac{AD}{Q'} + Dc_1 + \frac{DQ_1(c_0 - c_1)}{Q'} + \frac{fQ_1(c_0 - c_1) + fQ'c_1}{2}$ 。

第 4 步, 若  $Q' < Q_1$ , 则  $C_{\text{total}}' = \frac{AD}{Q'} + Dc_0 + \frac{Q'fc_0}{2}$ 。对比  $C_{\text{total}}$  和  $C_{\text{total}_2}$  的大小, 若  $C_{\text{total}}' \geq C_{\text{total}_2}$ , 则  $Q^* = Q_2$ ,  $y_k = y_2 = 1$ ,  $q_k = q_2 = 0$ ,  $C_{\text{total}}^* = \frac{AD}{Q_2} + Dc_2 + \frac{Q_2fc_2}{2}$ ; 若  $C_{\text{total}}' < C_{\text{total}_2}$ , 则  $Q^* = Q'$ ,  $y_k = y_0 = 1$ ,  $q_k = q_0 = Q' - Q_1$ ,  $C_{\text{total}}^* = \frac{AD}{Q'} + Dc_0 + \frac{Q'fc_0}{2}$ 。

综上所述, 两阶段混合价格折扣的 4 种库存模型均满足解的唯一存在性, 在企业产品不存在补货提前期、单位时间的需求量均匀且连续、不发生变质等条件下, 如果单位库存持有成本不依赖于产品单价, 对于每次补货启动费用较低、折扣幅度较低而单位库存持有成本较高的产品, 价格折扣应该为先全量折扣后增量折扣, 适合于模型 1; 对于每次补货启动费用较高、折扣幅度较大而单位库存持有成本较低的产品, 价格折扣应该为先增量折扣后全量折扣, 适合于模型 2。如果单位库存持有成本依赖于产品单价, 对于每次补货启动费用较低、折扣幅度较小而年库存费率较高的产品, 价格折扣应该为先全量折扣后增量折扣, 适合于模型 3; 对于每次补货启动费用较高、折扣幅度较大而年库存费率较低的产品, 价格折扣应该为先增量折扣后全量折扣, 适合于模型 4。对于上述 4 种情形以外的更为复杂的环境下, 则需要把相关数据代入 4 种模型进行求解和对比分析, 才能正确地选择适用

的模型。

### 3 算例与分析

假设某企业需要一种零件,该零件每年总需求量  $D$  为 5 000 件,每次补货启动费用  $A$  为 2 000 元,当单位库存持有成本不依赖于产品单价时,单位库存持有成本  $h$  为每年 30 元,当单位库存持有成本依赖于产品单价时,单位库存持有成本年费率  $f$  为 20%,供应商提供的产品价格折扣信息如表 1 所示,求最优订货决策和年支付最低总成本。

表 1 供应商提供的产品价格折扣信息

Tab. 1 The price discount information

| 订货量/件                   | $Q < 1\ 000$ | $1\ 000 \leq Q < 1\ 500$ | $Q \geq 1\ 500$ |
|-------------------------|--------------|--------------------------|-----------------|
| 价格/(元·件 <sup>-1</sup> ) | 150          | 145                      | 140             |

根据上述信息可知: $D=5\ 000$ ;  $A=2\ 000$ ;  $h=30$ ;  $f=20\%$ ;  $c=(150,145,140)$ ;  $Q=(800,1\ 500)$ 。用前面的算法进行求解,可得表 2 所示。

表 2 4 种模型的求解结果

Tab. 2 Solution results of the four models

| 模型 1                          | 模型 2                          | 模型 3                          | 模型 4                          |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| $y_1 = 1$                     | $y_2 = 1$                     | $y_1 = 1$                     | $y_2 = 1$                     |
| $Q^* = 816$                   | $Q^* = 1\ 500$                | $Q^* = 830$                   | $Q^* = 1\ 500$                |
| $q_1 = 16$                    | $q_2 = 0$                     | $q_1 = 30$                    | $q_2 = 0$                     |
| $C_{\text{total}} = 749\ 495$ | $C_{\text{total}} = 729\ 167$ | $C_{\text{total}} = 749\ 083$ | $C_{\text{total}} = 727\ 667$ |

从表 2 可以看出,企业采用混合价格折扣时,先增量折扣后全量折扣可以激励顾客采购更大的批量,有利于提高企业的整体销售量。订货量的增加会导致顾客平均持有库存增加,库存持有成本上升,企业应该制定合理的订货批量折扣点,避免顾客因库存持有成本太高而放弃大批量订货。

### 4 总结

价格折扣是企业激励顾客增加订货批量的有效手段,顾客会把自身需求情况和价格折扣相结合,以确定最优的订货批量。企业一般会采用多阶段全量价格折扣或多阶段增量价格折扣,而极少把两种价格折扣方式混合使用。实际上,混合价格折扣是一个可行的折扣模式。本文通过构建两阶段混合价格折扣模型,分析了模型解的唯一存在性,给出了相应的算法,证实两阶段混合价格折扣可以获得最优订货批量。模型的构建和求解,可以解决供应商采用两阶段混合价格折扣模式制定订货批量折扣点,同时可以解决顾客在面临混合价格折扣时正确的制定订货批量。

本文构建的两阶段混合价格折扣模型,仅仅适用于企业制定两个折扣点的情况。而事实上,绝大部分企业制定价格折扣时,不会制定超过两个价格折扣点。因此,本文的研究具有较高的实用价值。后续可以在多种需求环境下针对 3 个或 3 个以上的价格折扣点展开随机混合价格折扣模型的研究,为企业提供更多的价格折扣模式选择。

#### 参考文献:

- [1] 李小申,班文杰.带有价格折扣的库存控制问题模型构建与求解[J].统计与决策,2016,460(16):47-49.
- [2] LI X S,BAN W J. Modeling and solving inventory problem with price discount[J]. Statistics and Decision,2016,460(16):47-49.
- [3] HARRIS F W. Economic order quantity model[J]. Management Science,1915,35(3):898-900.
- [4] HADLEY G,WHITIN T M. Analysis of inventory system[M]. New Jersey:Englewood Cliffs,Prentice Hall,1963.
- [5] 潘大连,高世义,胡自新,等.库存管理的初步实践[J].系统工程理论与实践,1981(1):61-71.

- PAN D L,GAO S Y,HU Z X,et al. Preliminary practice of inventory management[J]. System Engineering-Theory & Practice, 1981(1):61-71.
- [5] 孙道银,李猛,纪雪洪. 供应链管理研究述评[J]. 技术经济与管理研究,2010(6):54-57.
- SUN D Y,LI M,JI X H. Literature review on supply chain management[J]. Journal of Technical Economics & Management, 2010(6):54-57.
- [6] 王俊峰. 确定有批量价格折扣问题的经济订购批量的最大利润法[J]. 系统工程理论与实践,1996(5):59-64.
- WANG J F. The method which obtain the maximum profit define the economic order quantity in the problem of the discounted price of batch[J]. System Engineering-Theory & Practice,1996(5):59-64.
- [7] GÜDER F,ZYDIAK J L. Fixed cycle ordering policies for capacitated multiple item inventory systems with quantity discounts [J]. Computers & Industrial Engineering,2000,38(1):67-77.
- [8] TOPTAL A. Replenishment decisions under an all-units discount schedule and stepwise freight costs[J]. European Journal of Operational Research,2009,198(2):504-510.
- [9] 史玉敏,周斌,张宁. 基于价格有折扣的零售商订货问题[J]. 物流技术,2008(8):102-104.
- SHI Y M,ZHOU B,ZHANG N. Retailer ordering problem based on price discount[J]. Logistics Technology,2008(8):102-104.
- [10] RUBIN P A,BENTON W C. Evaluating jointly constrained order quantity complexities for incremental discounts[J]. European Journal of Operational Research,2003,149(3):557-570.
- [11] HAKSEVER C,MOUSSOURAKIS J. Determining order quantities in multi-product inventory systems subject to multiple constraints and incremental discounts[J]. European Journal of Operational Research,2006,184(3):930-945.
- [12] TERSINE R J,BARMAN S,TOELLE R A. Composite lot sizing with quantity and freight discounts[J]. Computers and Industrial Engineering,1995,28(1):107-122.
- [13] 张茹秀,徐天芳. 价格折扣/运输折扣的库存-运输联合优化模型[J]. 大连海事大学学报,2005(3):41-44.
- ZHANG R X,XU T F. Inventory and transportation integrated optimization model with price discount and transportation discount[J]. Journal of Dalian Maritime University,2005(3):41-44.
- [14] 王庆金,吴泗宗. 价格折扣和运输折扣下供应链库存-运输优化模型[J]. 信息与控制,2005(3):335-339.
- WANG Q J,WU S Z. Supply chain inventory-transportation optimal model under the price discount and transportation[J]. Information and Control,2005(3):335-339.
- [15] 魏涛,王宜举,华国伟. 带全量价格折扣的供应商最低免运费订货批量研究[J]. 中国管理科学,2012,20(6):70-77.
- WEI T,WANG Y J,HUA G W. Supplier's free shipping quantity with pice all-unit-discount[J]. Chinese Journal of Management Science,2012,20(6):70-77.
- [16] 但斌,陈军,吴庆. 基于多级折扣价格的易逝品订货策略研究[J]. 中国管理科学,2006,16(3):50-57.
- DAN B,CHEN J,WU Q. Optimal ordering policy for perishable product with progressive price discounts[J]. Chinese Journal of Management Science,2006,16(3):50-57.
- [17] 陈军,但斌,张旭梅. 多级价格折扣下基于损耗控制的生鲜农产品 EOQ 模型[J]. 系统工程理论与实践,2009,29(7):43-54.
- CHEN J,DAN B,ZHANG X M. EOQ model for fresh agricultural product under progressive price discount and loss-controlling[J]. System Engineering Theory and Practice,2009,29(7):43-54.
- [18] 陈军,但斌,邱晗光,等. 基于期量折扣的变质产品订货策略[J]. 计算机集成制造系统,2009,15(9):1860-1866.
- CHEN J,DAN B,QIU H G,et al. Ordering policy for deteriorating items under the volume discount in time limit[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems,2009,15(9):1860-1866.
- [19] 李凯,孙乐,安岗,等. 需求信息不对称下数量折扣契约研究[J]. 财会通讯,2013,36(12):112-117.
- LI K,SUN L,AN G,et al. Quantity discounts under asymmetric demand information[J]. Communication of Finance and Accounting,2013,36(12):112-117.
- [20] 蒋国瑞,鲍晓敏. 随机需求下基于价格折扣的供需协调博弈分析[J]. 科技管理研究,2013,33(8):218-222.
- JIANG G R,BAO X M. Game analysis of supply chain coordination based on price discount under stochastic demand[J]. Science and Technology Management Research,2013,33(8):218-222.
- [21] 张文思,李金林,王建才,等. 需求分布未知下含数量折扣的多产品库存与定价[J]. 管理工程学报,2016,30(4):210-220.
- ZHANG W S,LI J L,WANG J C,et al. The distribution-free multi-products ordering and pricing problem with quantity discounts and resource constraint[J]. Journal of Industrial Engineering and Engineering Management,2016,30(4):210-220.
- [22] 张新功,莫宁. 基于 Weibull 函数和价格折扣的易腐品库存订货与定价策略[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2020,37(4):1-5.

- ZHANG X G, MO N. Ordering and pricing strategy of perishable goods inventory based on Weibull function and price discount [J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2020, 37(4): 1-5.
- [23] 周骝华, 万国华, 汪素南. 生产商-零售商供应链博弈研究: 基于全量折扣和营销费用视角[J]. 软科学, 2016, 30(7): 99-103.
- ZHOU S H, WAN G H, WANG S N. A game analysis of manufacturer-retailer supply chain: from the perspective of all-unit discount and marketing fees[J]. Soft Science, 2016, 30(7): 99-103.
- [24] 刘妍, 刘隽, 古天龙. 弱势零售商-强势第三方电子商务平台经营博弈研究[J]. 数学的实践与认识, 2019, 49(20): 89-97.
- LIU Y, LIU J, GU T L. Vulnerable retailers: a study on the operational game of a strong third-party E-commerce platform[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2019, 49(20): 89-97.

## Operations Research and Cybernetics

### Modeling and Solving Inventory Problem with Two-stage Mixed Price Discount

CHEN Jianbiao<sup>1</sup>, LU Yuhai<sup>2</sup>, LIU Ying<sup>1</sup>

(1. College of Management, Guangzhou College of Technology and Business, Guangzhou 510850;

2. School of Modern Economics and Management, Jiangxi University of Finance and Economics, Nanchang 330013, China)

**Abstract:** [Purposes] Under the assumptions whether unit inventory holding cost depends on product price, the mixed integer nonlinear programming model was established on the basis of first full dose discount then increment discount and first increment discount then full dose discount by introducing "0-1" binary variable. [Methods] The unique existence of solution is analyzed and the algorithm process is given out. [Findings] It has indicated that first increment discount then full dose discount are even more to the benefit of simulating customers to conduct large scale goods ordering via arithmetic example. [Conclusions] The research results can solve supplier's adoption of two-phase mixed price discount mode to conduct the formulation of order quantity discount points, at the same time, it can also solve correct formulation of order quantity when customers are facing with mixed price discount.

**Keywords:** mixed price discount; inventory; modelling; algorithm

(责任编辑 黄 颖)